



# SATBAYEV UNIVERSITY



**МСН5022 Механика материалов**



**Лектор: к.т.н.,доцент Исаметова Мадина Есдаулетовна**



**Лекция 5 Сдвиг.**

# **Лекция 4 Геометрические характеристики плоских сечений**

**Геометрические характеристики плоских сечений**

**Иерархия геометрических характеристик**

**Положение центра тяжести**

**Моменты инерции площади поперечного сечений**

**Моменты инерции площади простейших сечений**

**Зависимость между моментами инерции при  
параллельном переносе осей**

**Главные оси сечения**

Геометрические характеристики поперечных сечений - Величина нормальных напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) стержня зависит от площади этого сечения. Таким образом, *площадь поперечного сечения является геометрической характеристикой, определяющей напряжение при растяжении (сжатии)*. В случае других видов напряженно-деформированного состояния (изгиб, кручение) напряжения зависят не от площади, а от некоторых других геометрических характеристик поперечного сечения.

Исходия геометрических характеристик устанавливается видом подынтегрального выражения и представляется следующей:

Площадь поперечного сечения

Статические моменты

Координаты центра тяжести сечения

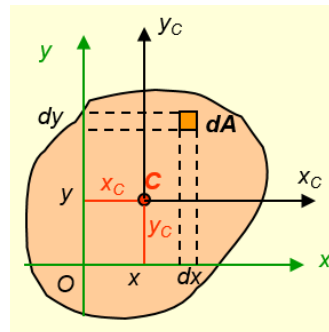
Координаты центра тяжести сложной фигуры

$$A = \int_A dA$$

$$S_x = \int_A y dA;$$

$$S_y = \int_A x dA.$$

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$



Здесь  $x_i$ ,  $y_i$  - координаты центров тяжести простых фигур, для которых они известны или легко находятся.

Напомним процедуру определения положения центра тяжести:

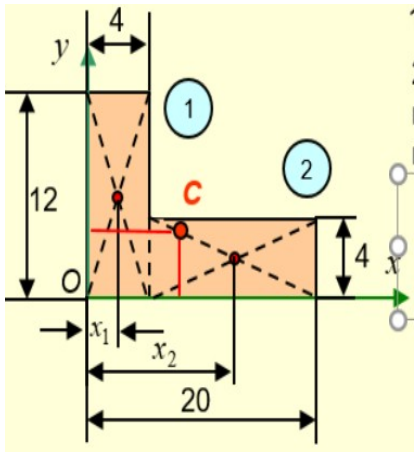
1. выбрать произвольную (начальную) систему координат  $x$ ,  $y$ ;
2. разбить заданную фигуру на более простые фигуры.
3. вычислить статические моменты и использовать формулы координат центра тяжести

$$x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}.$$

**Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными.**

Можно показать, что относительно центральных осей статические моменты обращаются в ноль.

**Пример 1** – Определить положение центра тяжести уголкового поперечного сечения.



1. Выбираем систему координат  $x, y$  с началом в нижнем левом углу сечения.

2. Разбиваем фигуру на два прямоугольника, вычисляем площади и координаты центров тяжести каждого:

3. Вычисляем статические моменты и координаты центра тяжести всего сечения:

$$A_1 = 4 \cdot 12 = 48; \quad x_1 = 2; \quad y_1 = 6;$$

$$A_2 = (20 - 4) \cdot 4 = 64; \quad x_2 = \frac{20 - 4}{2} + 4 = 12; \quad y_2 = 2;$$

$$S_{x1} = y_1 A_1 = 6 \cdot 48 = 288; \quad S_{y1} = x_1 A_1 = 2 \cdot 48 = 96;$$

$$S_{x2} = y_2 A_2 = 2 \cdot 64 = 128; \quad S_{y2} = x_2 A_2 = 12 \cdot 64 = 768;$$

$$x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{96 + 768}{48 + 64} = \frac{864}{112} = 7,71.$$

$$y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{S_{x1} + S_{x2}}{A_1 + A_2} = \frac{288 + 128}{48 + 64} = \frac{416}{112} = 3,71.$$

■ **Моменты инерции площади поперечного сечения:**

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

- осевые моменты инерции площади,

$$I_{xy} = \int_A xy dA,$$

центробежный момент инерции площади.

$$I_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A \rho^2 dA.$$

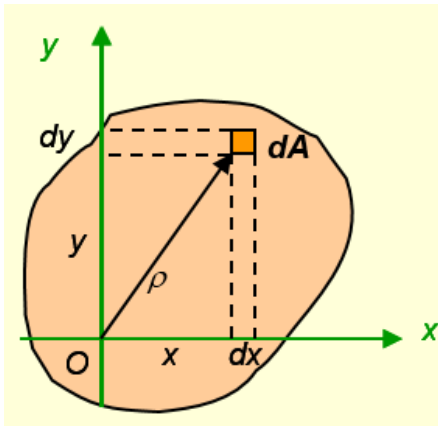
полярный момент инерции площади

**Полярный** момент инерции не зависит ориентации координатных осей  $x$ ,  $y$  и всегда равен сумме осевых моментов инерции:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x.$$

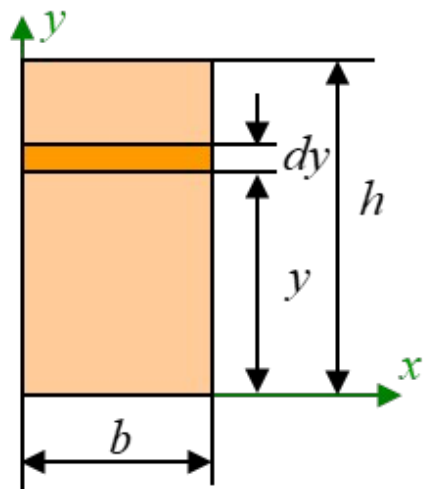
**Моменты инерции площади используются при определении напряжений при изгибе и кручении.**

Можно показать, что **центробежный** момент инерции относительно осей, одна из которых совпадает с осью **симметрии**, равен нулю. В самом деле, в этом случае элементарной площадке  $dA$  с координатами  $x$ ,  $y$  всегда будет соответствовать такая же площадка координатами  $-x$ ,  $y$  или  $x$ ,  $-y$ . Суммирование (интегрирование) произведений  $xy dA$  даст нуль. Далее будет показано, что для любой, в том числе несимметричной, фигуры можно найти такое положение осей, при котором центробежный момент обращается в нуль.



## ■ Моменты инерции площади простейших сечений:

### ■ Прямоугольник



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Известно, что центр тяжести прямоугольника находится на пересечении осей симметрии ( $x_c = b/2$ ,  $y_c = h/2$ ).

Для вычисления моментов инерции относительно центральных осей достаточно считать, что координата  $y$  измеряется от центральной оси  $x_c$  и изменить пределы интегрирования:

$$I_{x_c} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично получим для других осей:

$$I_y = \frac{hb^3}{3}, \quad I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}.$$

Центробежный момент инерции (по симметрии):

$$I_{xy} = 0.$$

Полярный момент инерции:

$$I_\rho = I_{x_c} + I_{y_c} = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12} = \frac{bh(h^2 + b^2)}{12}.$$

## ■ Треугольник

Элементарная площадка имеет переменную ширину и зависит от ее координаты по оси  $y$ :

$$\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}; \quad b_y = \frac{h-y}{h} b;$$

$$dA = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy.$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} b dy =$$

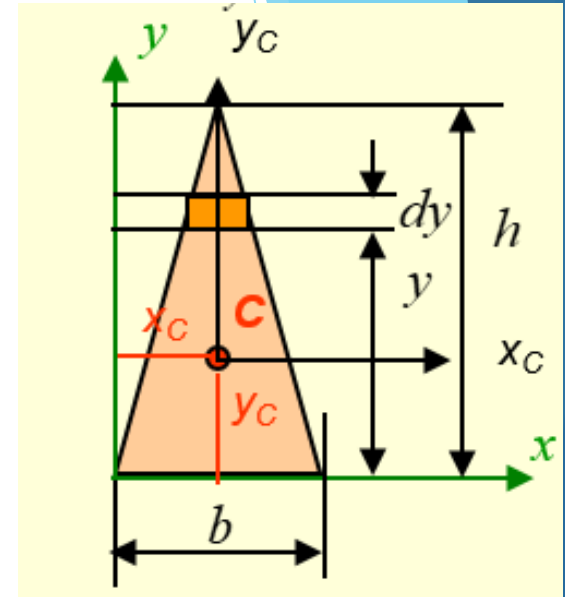
$$= \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy = \frac{b}{h} \left( h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

Момент инерции относительно центральной оси  $x_C$ :

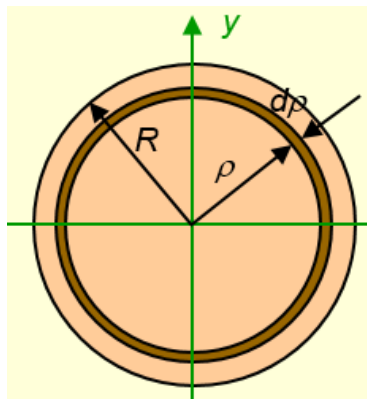
$$I_{xC} = \frac{b}{h} \int_{-h/3}^{2h/3} (hy^2 - y^3) dy = \frac{b}{h} \left( h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{-h/3}^{2h/3} = \frac{bh^3}{36}.$$

Момент инерции относительно центральной оси  $y_C$ :

$$I_{yC} = 2I_{yC(b/2)} = 2 \frac{h(b/2)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$



Круглое сечение:



Вычислим вначале полярный момент инерции:

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Моменты инерции относительно центральных осей с учетом симметрии:

$$I_x = I_y = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

В технике часто используют приближенные значения (погрешность менее 2%):

$$I_{\rho} \approx 0,1d^4.$$

$$I_x = I_y \approx 0,05d^4.$$

■ Кольцевое сечение:

Достаточно изменить пределы интегрирования:

$$I_{\rho} = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_r^R = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}.$$

Моменты инерции относительно центральных осей с учетом симметрии:

$$I_x = I_y = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}.$$

Для *тонкостенного* кольца ( $t < 0,075R$ ) можно приближенно считать, что  $\rho = R_{cp} = \text{const}$  по его толщине и  $A = 2\pi R_{cp}t$ :

$$I_{\rho} = \rho^2 \int_A dA = R_{cp}^2 2\pi R_{cp}t = 2\pi R_{cp}^3 t = \frac{\pi D_{cp}^3 t}{4}.$$

В технике иногда используют приближенные значения в виде:

$$I_{\rho} \approx 0,8D_{cp}^3 t. \quad I_x = I_y \approx 0,4D_{cp}^3 t.$$

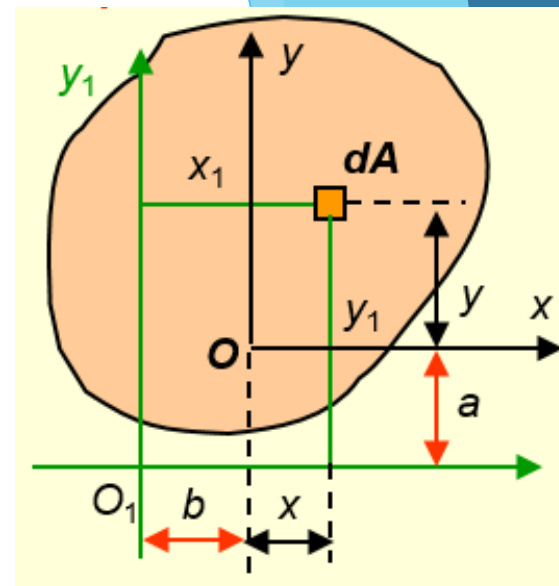
Для тонкост.



- **Моменты инерции площади составных сечений** -вычисляются , так же как и при вычислении координат центра тяжести, методом разбиения на простые фигуры, для которых известны или легко вычисляются координаты центров тяжести и моменты инерции.

Например, момент инерции кольцевого сечения может быть вычислен как разность моментов инерции круглого сплошного сечения радиуса  $R$  и такого же сечения, но радиуса  $r$ .

Заметим, что при сложении моментов инерции по каждой из координатных осей для каждой из фигур моменты инерции должны вычисляться относительно осей, являющихся общими для рассматриваемого сечения и всех составляющих фигур. Отсюда следует необходимость располагать формулами, позволяющими переходить от одних осей к другим.



- **Зависимость между моментами инерции при параллельном переносе осей**

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $I_x$   $S_x$   $A$

$$I_{x1} = I_x + 2aS_x + a^2 A.$$

$$I_{y1} = I_y + 2aS_y + b^2 A.$$

$$I_{x1y1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (y + a)(x + b) dA.$$

$$I_{x1y1} = I_{xy} + aS_y + bS_x + abA.$$

Формулы упрощаются, если исходные оси являются **центральными**, т.к.  $S_{xc} = S_{yc} = 0$ :

$$I_{x1} = I_{xc} + a^2 A.$$

$$I_{y1} = I_{yc} + b^2 A.$$

$$I_{x1y1} = I_{xcyc} + abA.$$

## Главные оси сечения

Для главных осей сечения должны выполняться следующие условия:

1. Центробежный момент инерции сечения относительно этих осей должен быть равен нулю:  $I_{xy} = 0$
2. Осевые моменты инерции относительно этих осей должны быть экстремальны.
3. Эти оси должны быть взаимно перпендикулярны.

**Главные центральные оси** - главные оси, проходящие через центр тяжести сечения.

## Зависимость между моментами инерции при повороте осей

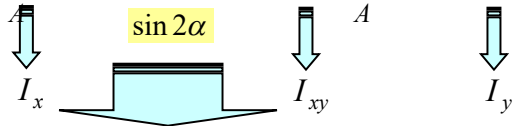
Координаты элементарной площадки  $dA$  в системе координат  $u, v$  выражаются через исходные координаты  $x, y$  линейными зависимостями:

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad v = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Осевые моменты инерции относительно осей  $u$  и  $v$ :

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA =$$

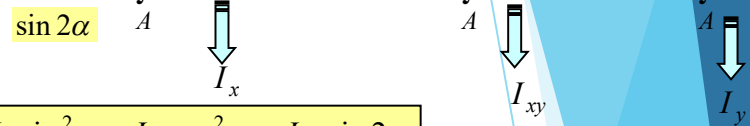
$$= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA.$$



$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 dA =$$

$$= \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \cos^2 \alpha \int_A x^2 dA.$$



$$I_u = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$I_x + I_y = \text{const} = \text{invar}$$

$$I_u + I_v = I_x + I_y.$$

**Центробежный момент инерции относительно осей  $u$  и  $v$ :**

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (y \sin \alpha + x \cos \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA =$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha$$

$$\sin \alpha \cos \alpha \left( \int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A xy dA.$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.$$

**Главные оси и главные моменты инерции** – Полученные зависимости

показывают, что при изменении угла поворота осей значения моментов инерции изменяются, при этом сумма осевых моментов инерции остается постоянной.

Это означает, что можно определить такое положение осей, при котором один из осевых моментов достигает максимального значения, а другой – соответственно минимального значения

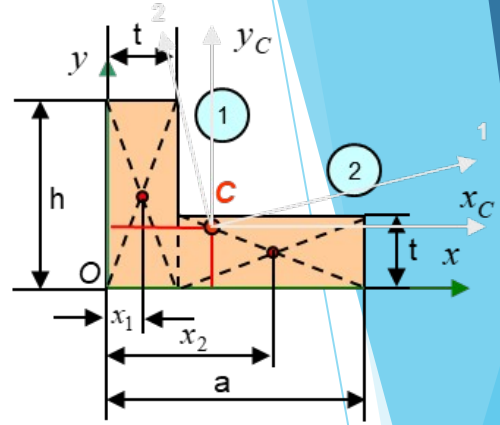
$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$$

■ **Радиус инерции** – есть величина, связывающая момент инерции с площадью поперечного сечения и определяемая из равенств:

$$I_x = i_x^2 A.$$

$$I_y = i_y^2 A.$$

Радиус инерции представляет собой расстояние от рассматриваемой оси до той точки, в которой условно можно сосредоточить всю площадь поперечного сечения. Эта величина характеризует насколько хорошо “развито” сечение, как далеко отстоят от оси отдельные области сечения, что в свою очередь характеризует экономичность сечения при изгибе и сжатии с изгибом.



Радиусом инерции удобно пользоваться при оценке гибкости сжатых стержней.

Конечно для этого радиусы инерции предварительно вычисляются для типовых и прокатных сечений по формулам:

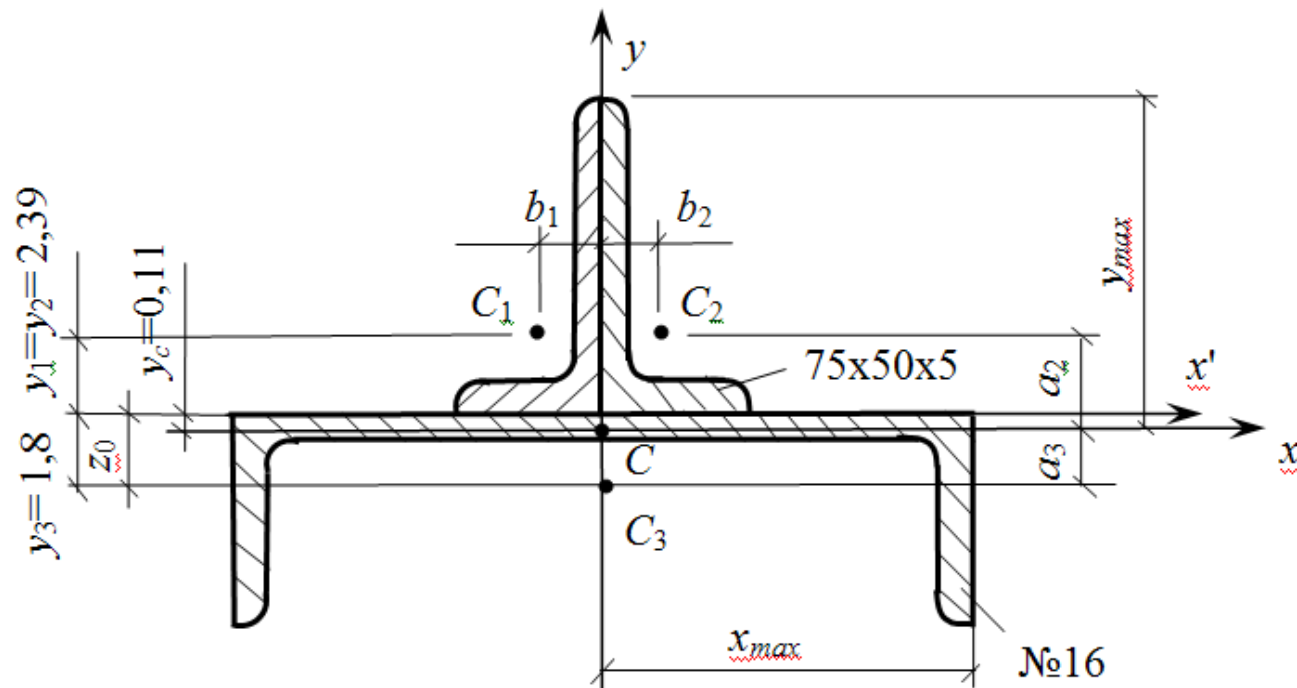
$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}.$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}.$$

■ **Вычисление моментов инерции сложных фигур** – выполняется в следующем порядке:

1. Сечение разбивается на части, для которых известны координаты центров тяжести и моменты инерции или легко находятся.
2. Выбираются начальные оси, относительно которых вычисляются координаты центра тяжести сечения.
3. Вычисляются координаты центра тяжести сечения.
4. Проводятся центральные оси (проходящие через центр тяжести сечения), относительно которых вычисляются моменты инерции.
5. Вычисляются осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно центральных осей.
6. Вычисляются главные центральные моменты и определяется положение главных осей.

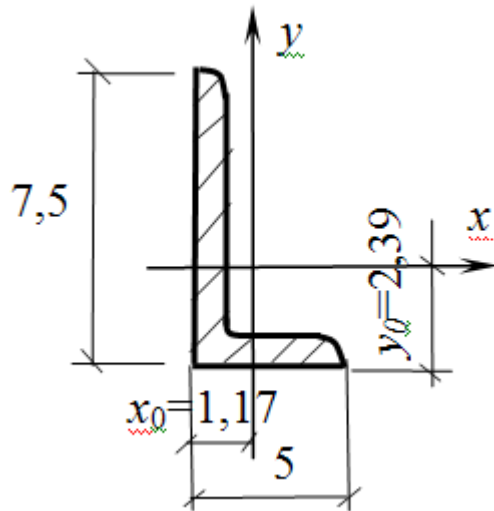
**ПРИМЕР** Определить главные центральные моменты инерции, осевые моменты сопротивления сечения, составленного из стандартных профилей проката. Сечение состоит из двух неравнополочных уголков 75×50×5 (маркировка в мм) и швеллера № 16 (№ швеллера говорит о его высоте в см).  
<https://prosopromat.ru/category/zadachi/geometricheskie-xarakteristiki>



Определим положение центра тяжести сечения.

Сечение симметрично относительно оси  $y$ , проводим её как ось - главную и центральную. Координата  $x_C=0$ . Для нахождения  $y_C$  проводим случайную ось  $x'$  (выбранную случайным образом). Обозначим центры тяжести всех профилей и выпишем необходимые характеристики профилей из сортамента прокатной стали.

Фигуры 1,2 - уголки 75×50×5

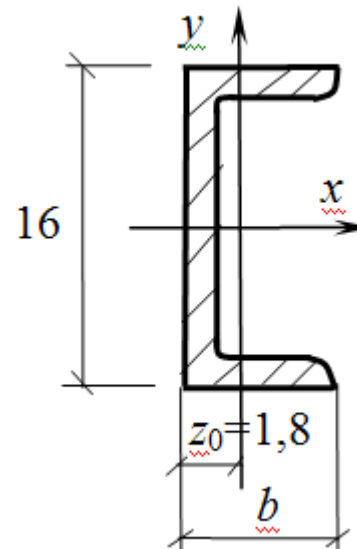


$$A_1=A_2=6,11 \text{ см}^2$$

$$I_{x1}= I_{x2}=34,8 \text{ см}^4$$

$$I_{y1}= I_{y2}=12,5 \text{ см}^4$$

Фигура 3 - швеллер №16



$$A_3=18,1 \text{ см}^2,$$

$$I_{x3}=747 \text{ см}^4,$$

$$I_{y3}=63,3 \text{ см}^4.$$

Покажем на схеме и определим координаты  $y$  для профилей

$$y_1 = y_2 = y_0 = 2,39 \text{ см,}$$

$$y_3 = -z_0 = -1,8 \text{ см.}$$

Определим координату  $y_C$  по формуле

$$y_C = \frac{S_{x'}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

где  $A_i$  - площадь каждого профиля,

$y_i$  - координата.

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(A_1 \cdot y_1) \cdot 2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 \cdot 2 + A_3} = \\ &= \frac{(6,11 \cdot 2,39) \cdot 2 + 18,1 \cdot (-1,8)}{6,11 \cdot 2 + 18,1} = \frac{29,2 - 32,58}{12,22 + 18,1} = -\frac{3,38}{30,32} = -0,11 \text{ см} \end{aligned}$$

Проводим главную центральную ось  $x$  вниз от оси  $x'$  на  $0,11$  см, наносим т.С - центр тяжести всего сечения.

2. Определяем главные центральные моменты инерции по формулам перехода:

$$I_x = \sum (I_{xi} + A_i a_i^2), I_y = \sum (I_{yi} + A_i b_i^2)$$

где  $I_{xi}$ ,  $I_{yi}$  – моменты инерции каждой фигуры;

$A_i$  - площадь сечения каждой фигуры;

$a_i$  - расстояние от центра тяжести каждой фигуры до главной центральной оси  $x$ ;

$b_i$  - расстояние от центра тяжести каждой фигуры до главной центральной оси  $y$ .

Определяем  $a_i$  (смотрим схему)

$$a_1 = a_2 = y_1 + |y_C| = 2,39 + 0,11 = 2,5 \text{ см},$$

$$a_3 = - (|y_3| - |y_C|) = -1,69 \text{ см}.$$

Определяем  $I_x$ . Следует обратить внимание на то, что фигура 3 - швеллер - повернут, поэтому, для определения  $I_x$  следует из сортамента взять  $I_y$  швеллера.

$$I_{x3} = 63,3 \text{ см}^4$$

$$\begin{aligned} I_x &= (I_{x1} + A_1 a_1^2) \cdot 2 + I_{x3} + A_3 a_3^2 = (34,8 + 6,11 \cdot 2,5^2) \cdot 2 + 63,3 + 18,1(-1,69)^2 = \\ &= 145,97 + 63,3 + 51,69 = 261 \text{ см}^4. \end{aligned}$$



Определяем  $I_y$ . Для швеллера (повернут)  $I_{y3} = I_x = 747 \text{ см}^4$ .

Определим размеры  $b_i$ , показываем на схеме.

$$b_1 = -x_0 = -1,17 \text{ см},$$

$$b_2 = x_0 = 1,17 \text{ см},$$

$b_3 = 0$ , т.к. центр тяжести швеллера лежит на оси  $y$ .

$$I_y = (I_{y1} + A_1 b_1^2) \cdot 2 + I_{y3} + A_3 b_3^2 = (12,5 + 6,11 \cdot 1,17^2) \cdot 2 + 747 + 0 = 788,73 \text{ см}^4$$

$$I_{\max} = I_y; I_{\min} = I_x$$

$$I_y = (I_{y1} + A_1 b_1^2) \cdot 2 + I_{y3} + A_3 b_3^2 = (12,5 + 6,11 \cdot 1,17^2) \cdot 2 + 747 + 0 = 788,73 \text{ см}^4$$

$$I_{\max} = I_y; I_{\min} = I_x$$

3. Определим осевые моменты сопротивления сечения по формулам:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}$$

Из схемы видно, что

$$x_{\max} = \frac{1}{2} 16 = 8 \text{ см};$$

$$y_{\max} = |y_c| + h_{\text{уголка}} = 0,11 + 7,5 = 7,61 \text{ см}$$

3. Определим осевые моменты сопротивления сечения по формулам:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{max}}$$

Из схемы видно , что

$$x_{max} = \frac{1}{2} 16 = 8 \text{ см};$$

$$y_{max} = |y_c| + h_{\text{уголка}} = 0,11 + 7,5 = 7,61 \text{ см}$$

$$W_x = \frac{261}{7,61} = 34,3 \text{ см}^3, W_y = \frac{788,73}{8} = 98,6 \text{ см}^3$$

## Рекомендуемая литература

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1989.-622 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: изд. МГТУ, 1999. -591с.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов - М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997.-320 с.
5. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И Руководство к решению задач по сопротивлению материалов - М.: Высшая школа, 1999. -592 с.
6. Миролубов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов -М: Высшая школа, 1985. -399 с.
7. Бондаренко А.Н. Электронный учебник по сопротивлению материалов. Москва. 2007 г.
8. Панков А.Д. Руководство по курсовому проектированию по сопротивлению материалов Расчет валов. г. Саров. 2008 г.
9. Панков А.Д. Вопросы для электронного тестирования по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2009 г.
10. Панков А.Д. Лабораторный практикум по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2010 г.
1. Шелофаст В.В. Основы проектирования машин. Изд –во АПМ., 2007 г.