



**SATBAYEV
UNIVERSITY**



МСН5022 Механика материалов



Лектор: к.т.н.,доцент Исаметова Мадина Есдаuletовна



Лекция 6 Кручение прямого цилиндрического стержня.

Лекция 6 КРУЧЕНИЕ.

Кручение стержней круглого поперечного сечения

Построение эпюр крутящих моментов

Касательные напряжения при кручении

Деформации при кручении

Расчёт вала на прочность и жёсткость

Анализ напряженного состояния при кручении

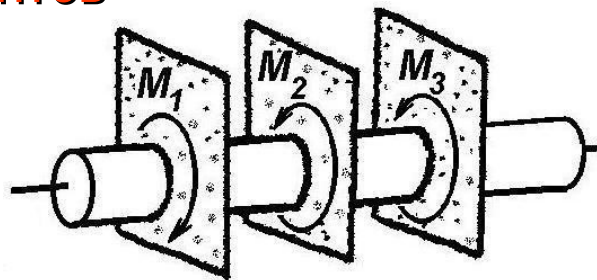
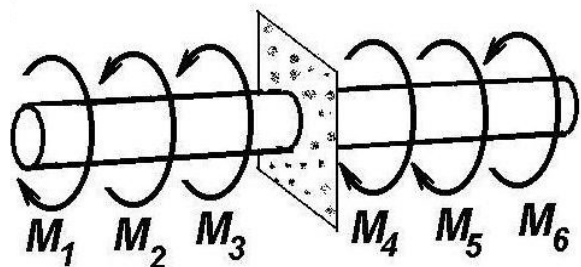
Статически неопределимые задачи при кручении

- **Кручение стержней круглого поперечного сечения** – Кручение характерно тем, что в поперечных сечениях возникают касательные напряжения τ , приводящиеся к крутящему моменту M_z .

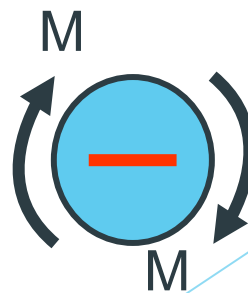
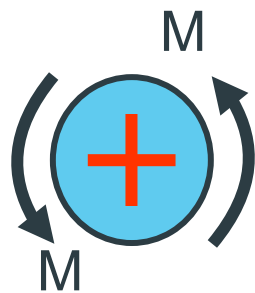
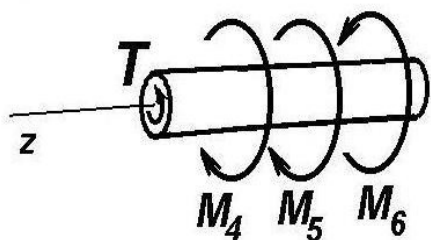
Деформация стержня при кручении выражается тем, что поперечные сечения поворачиваются вокруг оси стержня

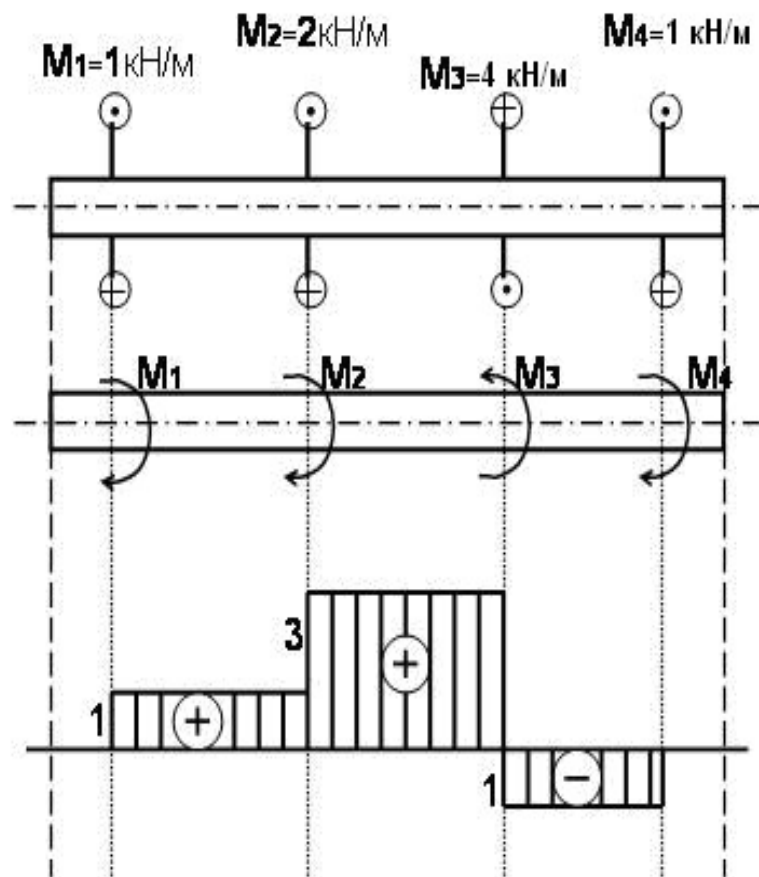
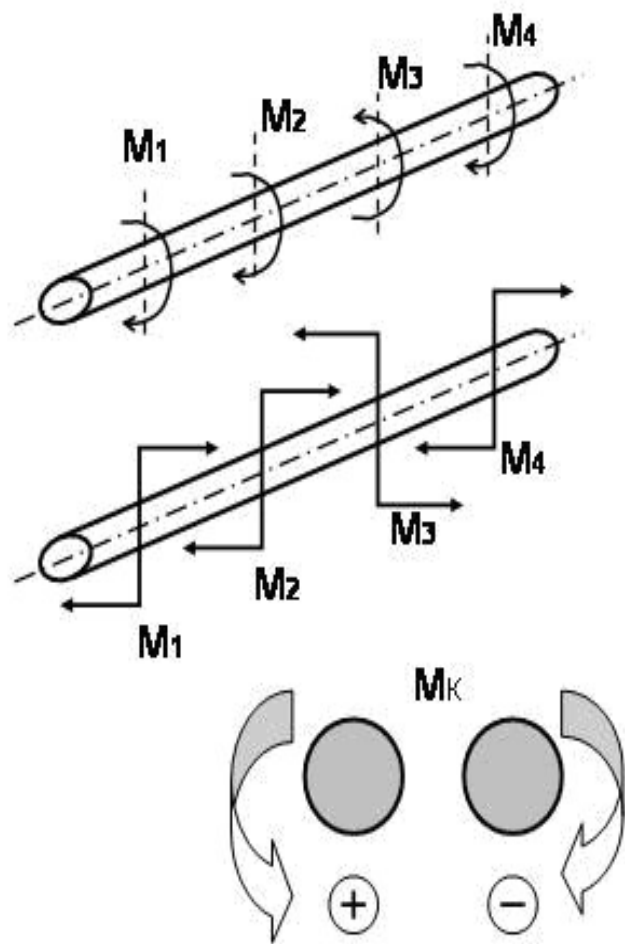
z на некоторые углы $\varphi = \varphi(z)$, называемые *углами закручивания*.

Построение эпюр крутящих моментов



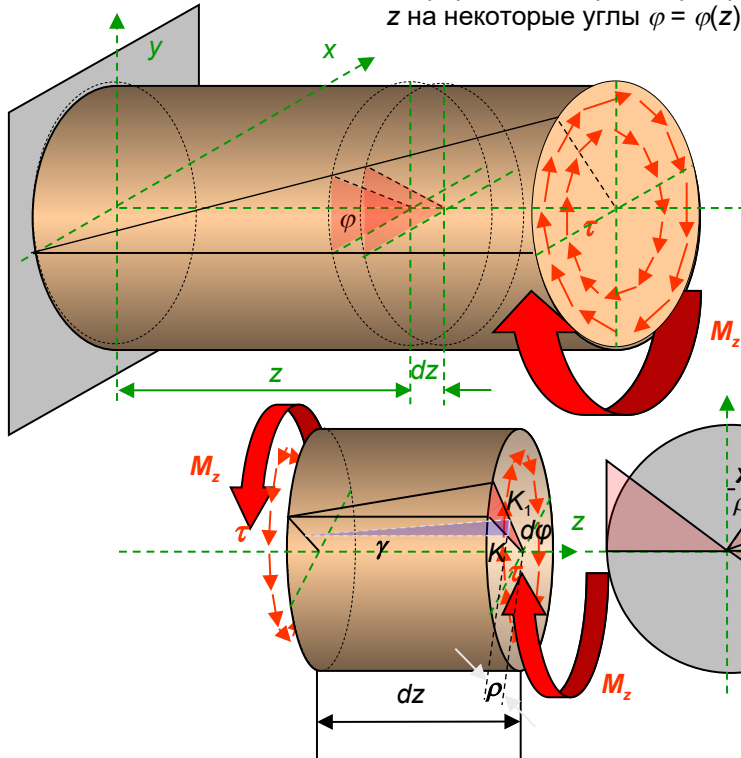
Правило знаков
крутящих моментов:





- **Кручение стержней круглого поперечного сечения** – Кручение характерно тем, что в поперечных сечениях возникают касательные напряжения τ , приводящиеся к крутящему моменту M_z .

Деформация стержня при кручении выражается тем, что поперечные сечения поворачиваются вокруг оси стержня z на некоторые углы $\varphi = \varphi(z)$, называемые *углами закручивания*.



- **Касательные напряжения при кручении** – Как указывалось ранее, задача определения напряжений является статически неопределимой, для решения которой необходимо последовательно рассмотреть три стороны задачи:

1. **Статика:** Выделим малый элемент двумя нормальными к оси бруса сечениями и заменим действие отброшенных частей касательными напряжениями. Под их действием элемент находится в равновесии.

Ранее приведением *распределенных сил к центру и центральным осям* было получено интегральное соотношение, связывающее крутящий момент с касательными напряжениями:

$$M_z = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

Касательное напряжение произвольного направления в каждой точке плоскости поперечного сечения можно разложить по двум другим направлениям, а именно, по радиусу ρ , соединяющему точку с центром тяжести сечения, и по перпендикуляру к этому радиусу. Момент относительно центральной оси z будет создавать лишь вторая компонента, обозначаемая одним символом τ . Тогда:

$$M_z = \int_A \tau \rho dA$$

Из этого соотношения найти напряжение по известному крутящему моменту пока нельзя, поскольку закон изменения напряжений по радиусу сечения неизвестен.

Геометрия: Согласно гипотезе плоских сечений при своем повороте сечения остаются плоскими (справедливо лишь для круглых сечений). Следующее допущение состоит в том, что все радиусы сечения остаются прямыми и поворачиваются на один тот же угол (угол закручивания).

3. **Физика:** По закону Гука при сдвиге: $\tau = G\gamma$. $\Rightarrow \tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$.

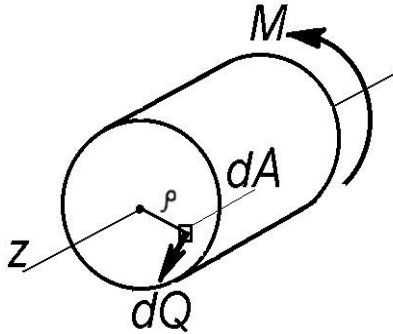
Подставляем в интеграл:

$$M_z = \int_A G \frac{d\varphi}{dz} \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} I_p. \Rightarrow d\varphi = \frac{M_z dz}{GI_p}$$

Подставляем в выражение для напряжений:

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho.$$

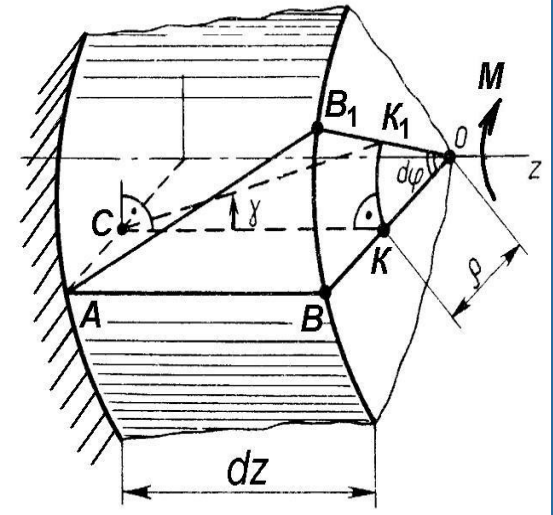
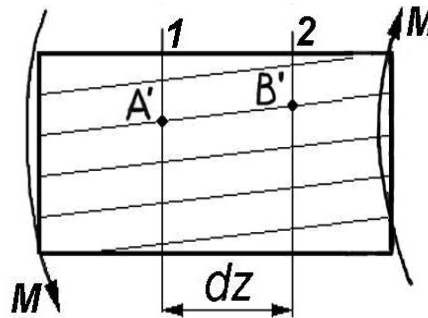
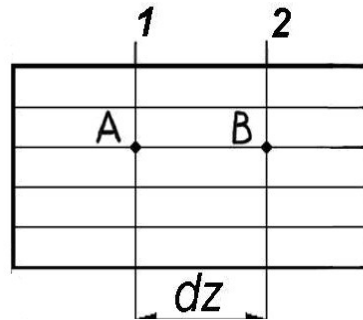
Напряжения при кручении



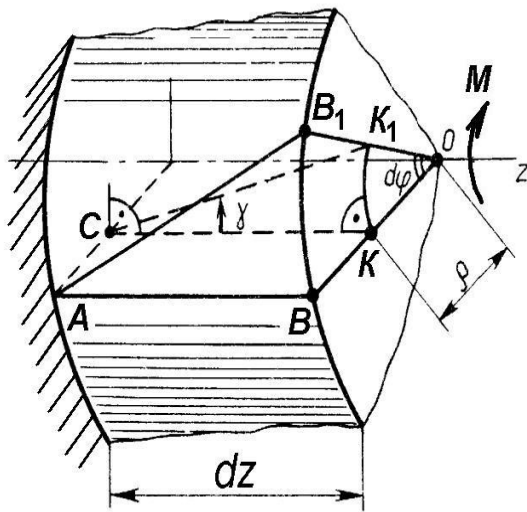
$$dQ = \tau dA$$

$$dQ \cdot \rho = \tau \cdot \rho dA$$

$$T = \int_A \tau \rho dA$$



Напряжения при кручении

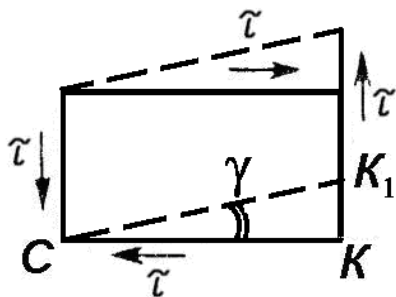


$$KK' = \gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi \quad \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

по закону Гука: $\tau = G \cdot \gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$

$\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ - относительный угол закручивания, $\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GI_\rho}$

$$T = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} I_\rho$$

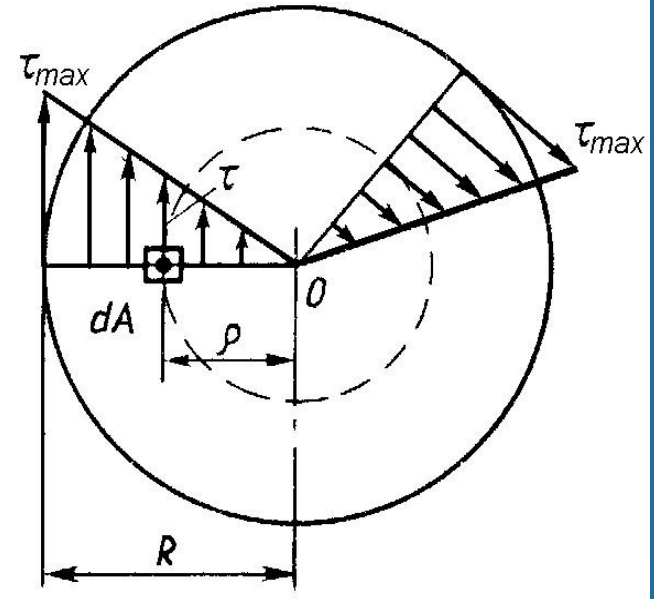


$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho$$

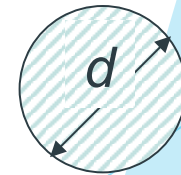
Напряжения при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_{\rho}} \rho_{\max} = \frac{T}{W_{\rho}}$$

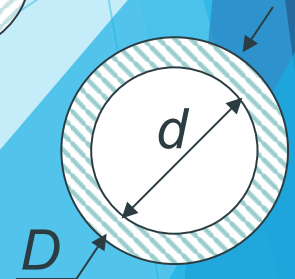
$$W_{\rho} = I_{\rho} / \rho_{\max} = I_{\rho} / R = 2I_{\rho} / d$$



Для круглого сечения $W_{\rho} = \pi d^3 / 16 \approx 0,2 d^3$



Для сечения в виде кольца $W_{\rho} = 0,2 D^3 (1 - c^4)$

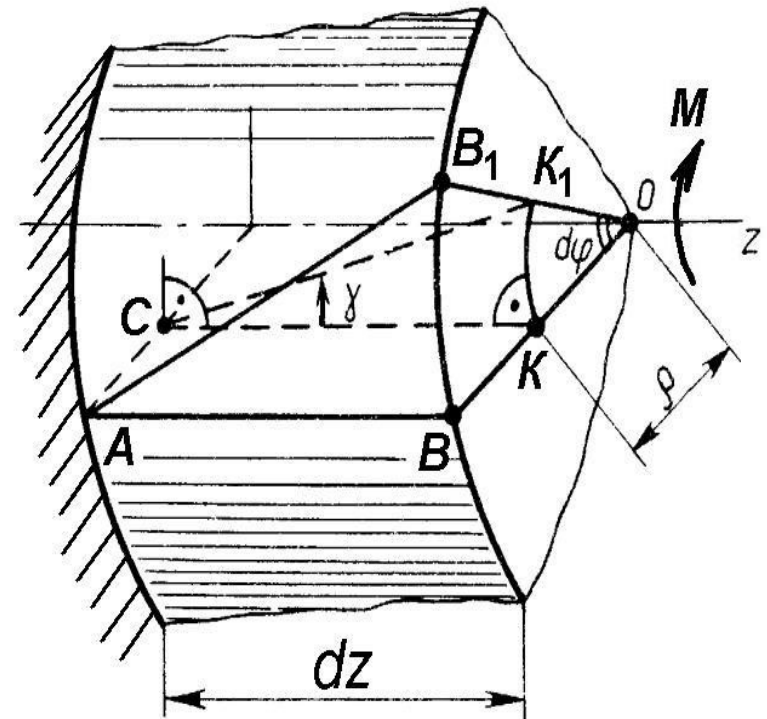


Деформации при кручении

$$d\varphi = \frac{T}{GI_{\rho}} dz \quad \varphi = \int_l \frac{T}{GI_{\rho}} dz$$

$$\varphi = \sum \int_l \frac{T}{GI_{\rho}} dz$$

$$\varphi = \frac{T}{GI_{\rho}} l$$



GI_{ρ} - жесткость сечения вала при кручении

Расчёт вала на прочность и жёсткость

Условие прочности вала

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{\max}}{0,2[\tau]}}$$

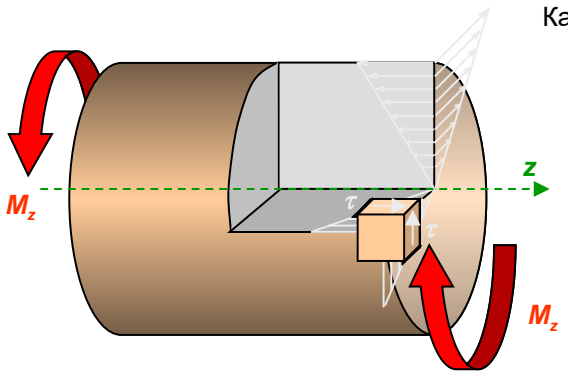
$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

$$[T] \leq [\tau]W_{\rho}$$

Условие жёсткости вала

$$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_{\rho}} \leq [\theta]$$

Анализ напряженного состояния при кручении – По закону парности касательных напряжений полученная формула для касательных напряжений, возникающих в поперечном сечении, одновременно определяет касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной продольному диаметральному сечению:



Каждый прямоугольный элемент материала испытывает **напряженное состояние чистого сдвига**.

Определение углов закручивания – При выводе формулы касательных напряжений при кручении была получена дифференциальная зависимость:

$$d\varphi = \frac{M_z}{GI_p} dz$$

Угол закручивания определяется из этого дифференциального соотношения интегрированием левой и правой части:

$$\varphi = \int_{z_0}^z \frac{M_z}{GI_p} dz + \varphi_0, \text{ поворота при } z = 0.$$

В частном случае при постоянном моменте M_z , постоянной жесткости GI_p и неподвижном сечении в начале координат ($\varphi_0 = 0$) получаем:

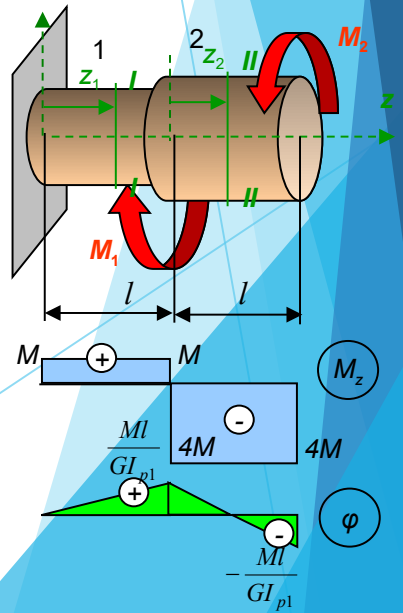
$$\varphi = \frac{M_z z}{GI_p} \Big|_0^l = \frac{M_z l}{GI_p}$$

Этой формулой можно пользоваться при определении угла для вала *постоянного* или *ступенчато постоянного* сечения, нагруженного *сосредоточенными* моментами. При этом на каждом из участков, на котором крутящий момент, жесткость постоянны, угол закручивания изменяется по *линейному* закону. Как следует из общей формулы определения угла закручивания, при построении эпюры углов закручивания ординаты эпюры откладываются от уровня предыдущего угла закручивания, т.е. строятся *нарастающим итогом*, учитывая угол закручивания предыдущего участка.

Пример: Построить эпюру углов закручивания для стержня нагруженного сосредоточенными моментами: $M_1=5M$, $M_2=4M$, где M – параметр нагрузки, $I_{p2}/I_{p1} = 2$.

1. Сечение I-I ($0 < z_1 < l$): $M_z^{I-I} = \sum M_{zi}^{\text{справа}} = M_1 - M_2 = 5M - 4M = M. \quad \varphi_1 = \frac{M_z^{I-I} z_1}{GI_{p1}} \Big|_{z_1=0} = \frac{Ml}{GI_{p1}}$

2. Сечение II-II ($0 < z_2 < l$): $M_z^{II-II} = \sum M_{zi}^{\text{справа}} = -M_2 = -4M. \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_z^{II-II} z_2}{GI_{p2}} \Big|_{z_1=l} = \frac{Ml}{GI_{p1}} + \frac{(-4M)l}{2GI_{p1}} = -\frac{Ml}{GI_{p1}}$

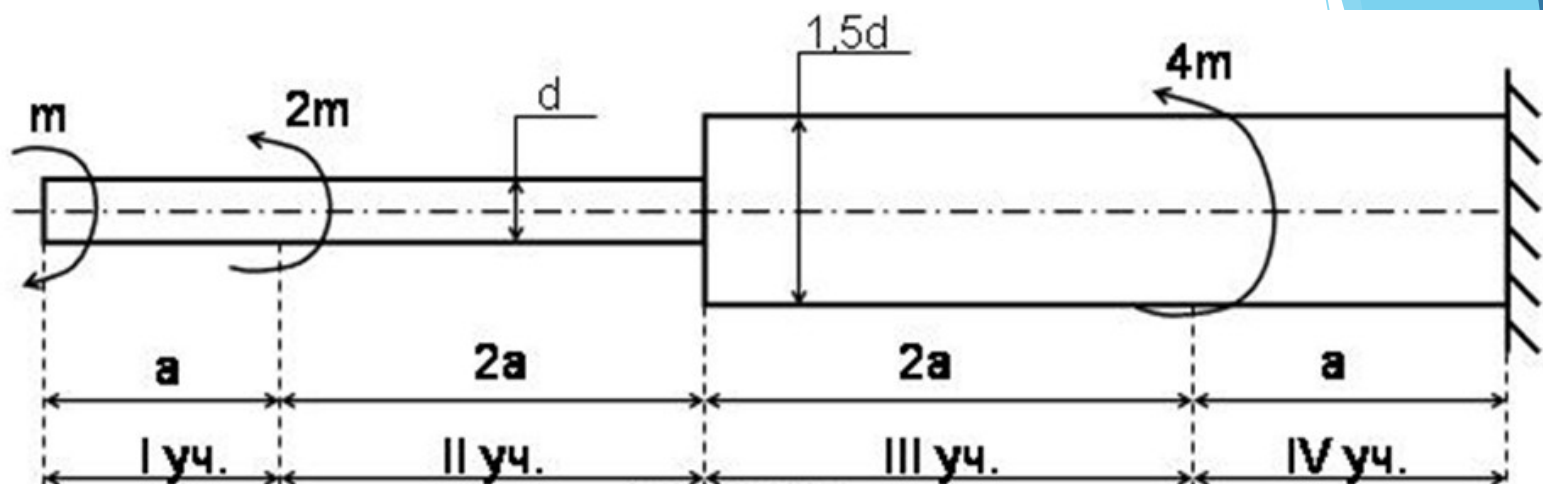


Расчеты на жесткость – Валы машин испытывают переменные (динамические) нагрузки. При малой жесткости валов могут возникать нежелательные крутильные колебания. Поэтому, помимо условий прочности должны выполняться условия жесткости, ограничивающие величину максимального угла закручивания, отнесенного к длине (погонного угла закручивания):

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GI_p} \leq \theta_{\text{расч}}$$

ЗАДАЧА 1.

Построить эпюры M_k и τ_{\max} , из условия прочности вычислить d .



$$\text{I участок: } M_k^I = m,$$

$$\text{II участок: } M_k^{II} = m - 2m = -m,$$

$$\text{III участок: } M_k^{III} = M_k^{II} = -m,$$

$$\text{IV участок: } M_k^{IV} = m - 2m - 4m = -5m.$$

Вычислим по участкам τ_{\max} :

I участок:

$$\tau_{\max}^I = \frac{M_k^I}{W_p^I} = \frac{m}{\pi \cdot d^3 / 16} = 5,09 \frac{m}{d^3}$$

II участок:

$$\tau_{\max}^{II} = \frac{M_k^{II}}{W_p^{II}} = -\frac{m}{\pi \cdot d^3 / 16} = -5,09 \frac{m}{d^3}$$

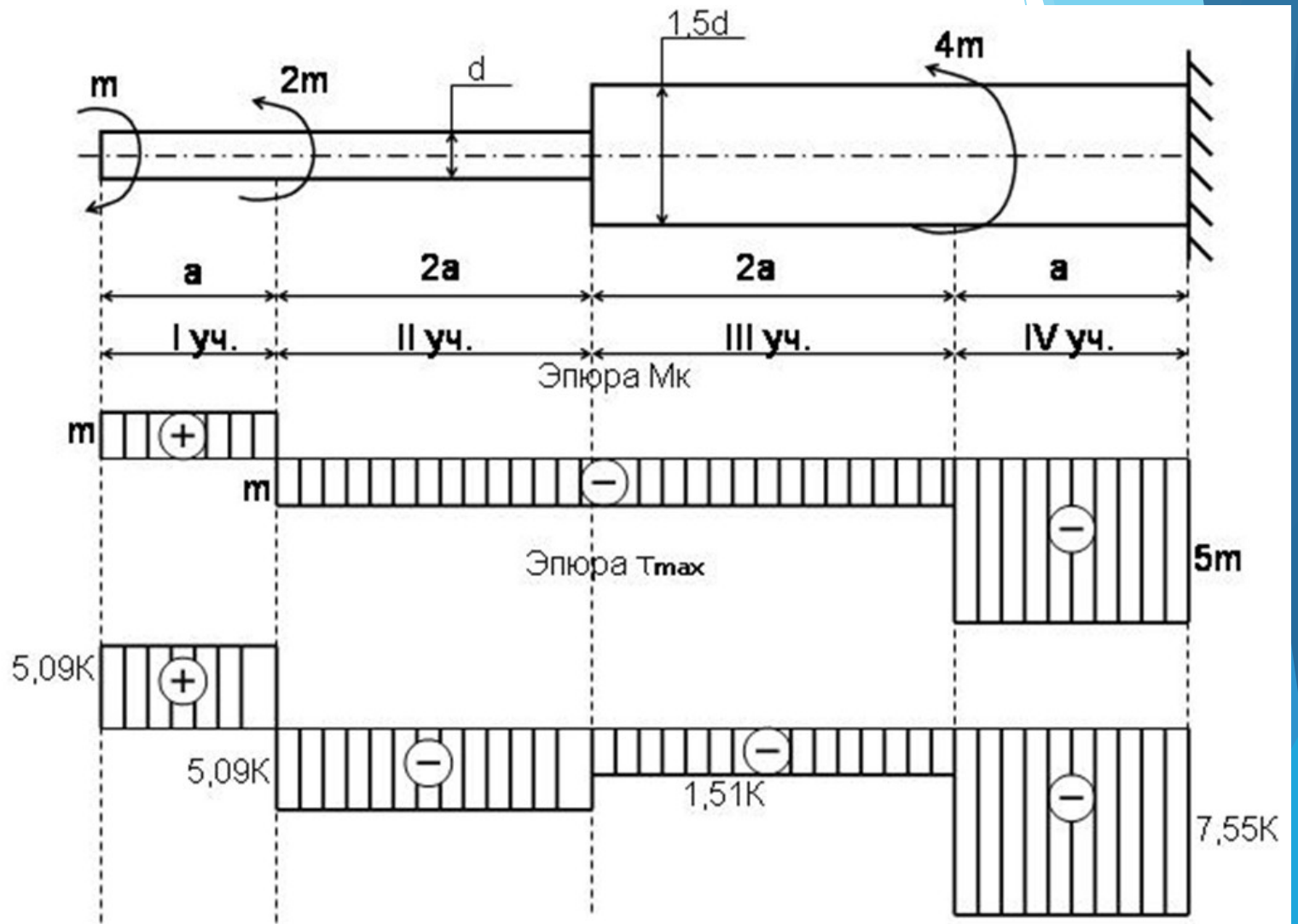
III участок:

$$\tau_{\max}^{III} = \frac{M_k^{III}}{W_p^{III}} = -\frac{m}{\pi \cdot (1,5 \cdot d)^3 / 16} = -1,51 \frac{m}{d^3}$$

IV участок:

$$\tau_{\max}^{IV} = \frac{M_k^{IV}}{W_p^{IV}} = -\frac{5m}{\pi \cdot (1,5 \cdot d)^3 / 16} = -7,55 \frac{m}{d^3}$$

Обозначим $\frac{m}{d^3} = K$ и построим эпюру.



Диаметр стержня вычислим из условия прочности:

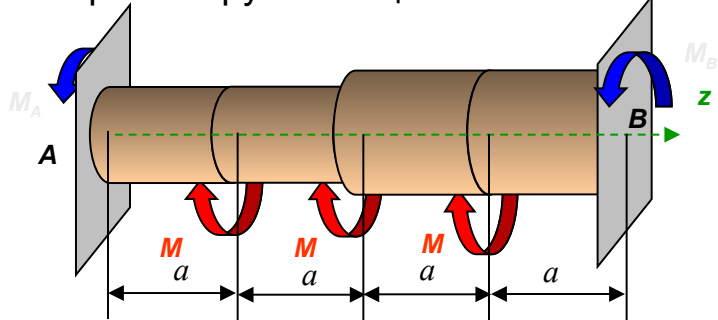
$$\tau_{\max} = \frac{|M_k^{\max}|}{W_p} \leq [\tau_k]$$

Для круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{|M_k^{\max}|}{0,2 \cdot [\tau_k]}} = 1,71 \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{[\tau_k]}}$$

- **Статически неопределимые задачи при кручении** – решаются так же, как и при других видах деформации, т.е. последовательно раскрываются три стороны задачи (статика, геометрия и физика). Специфика лишь состоит в том, что составляются другие уравнения равновесия, сопоставляются угловые перемещения (углы закручивания) и используются физические соотношения упругости, связывающие деформации и усилия при кручении.

- **Пример.** Вал круглого сечения имеет ступенчатое изменение диаметра ($d = 0.707D$) и нагружен тремя скручивающими моментами M .



Построим эпюру крутящих моментов:



Построим эпюру углов закручивания:

Эту задачу можно решить иначе, используя в качестве основной системы *статически определимую систему*, для которой можно найти углы закручивания с использованием принципа независимости сил от заданных моментов и неизвестного опорного момента:

1. **Статика** – Отбрасываем жесткие заделки, заменяем их реактивными моментами:

Составляем **моментное уравнение равновесия** относительно оси вала:

$$\sum M_{zi} = 0; \quad M_A - M - M - M + M_B = 0. \quad \text{Или:} \quad \boxed{M_A - 3M + M_B = 0.}$$

Это уравнение единственное, которое связывает нагрузку и реактивные моменты. Все другие (сумма проекций на координатные оси и суммы моментов относительно осей x, y) обращаются в тождества. Следовательно, задача является статически неопределимой с одним “лишним” неизвестным.

2. **Геометрия** – При наличии на обоих концах вала неподвижных заделок сумма углов закручивания на каждом из участков при любом нагружении должна быть равной нулю - **уравнение совместности деформаций**):

$$\boxed{\sum \varphi_i = 0; \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0.}$$

3. **Физика** – На каждом из участков угол закручивания связан с крутящим моментом в сечении

$$\varphi_1 = \frac{M_z^I l_1}{GI_{p1}} = \frac{M_A a}{G \pi (0,707D)^4} = \frac{32 \cdot 4 M_A a}{G \pi D^4};$$

(соотношения упругости):

$$\varphi_2 = \frac{M_z^{II} l_2}{GI_{p2}} = \frac{(M_A - M)a}{G \pi (0,707D)^4} = \frac{32 \cdot 4 (M_A - M)a}{G \pi D^4};$$

Полученные 6 уравнений образуют полную систему уравнений с 6-ю неизвестными (2 реактивных момента и 4 угла закручивания).

$$\varphi_3 = \frac{M_z^{III} l_2}{GI_{p3}} = \frac{(-M_B + M)a}{G \pi D^4} = \frac{32(-M_B + M)a}{G \pi D^4};$$

Подставим соотношения упругости в уравнение совместности. Одинаковые множители вынесем за скобки и сократим:

$$4M_A + 4(M_A - M) + (-M_B + M) - M_B = 0.$$

$$8M_A - 3M - 2M_B = 0.$$

$$\varphi_4 = \frac{M_z^{IV} l_4}{GI_{p4}} = \frac{(-M_B)a}{G \pi D^4} = \frac{32(-M_B)a}{G \pi D^4}.$$

Выразим, например, M_A из уравнения равновесия через M_B и подставим в полученное уравнение:

$$8(3M - M_B) - 3M - 2M_B = 0. \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_B = 2.1M.}$$

$$\boxed{M_A = 0.9M.}$$

Уравнение совместности принимает вид: $\sum \varphi_i = 0; \quad \varphi_{M_1} + \varphi_{M_2} + \varphi_{M_3} + \varphi_{M_B} = 0.$

Здесь первые три слагаемые есть углы закручивания, вычисленные для сечения B , от действия трех заданных моментов по отдельности. Последнее слагаемое – угол закручивания от действия неизвестного опорного момента M_B .

Соотношения упругости:

Подстановка этих соотношений после некоторых сокращений дает:

$$4M + 8M + 9M - 10M_B = 0,$$

откуда получаем: $M_B = 2.1M.$

Далее находится из уравнения равновесия левый опорный момент и строится эпюра крутящих моментов обычным образом или ее можно построить без нахождения левого опорного момента, двигаясь *справа*.

Для построения эпюры углов закручивания придется вычислить для каждого из участков относительные углы, как это было показано при предыдущем подходе к решению.

$$\varphi_{M_1} = \frac{Ma}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} = \frac{32 \cdot 4Ma}{G\pi D^4};$$

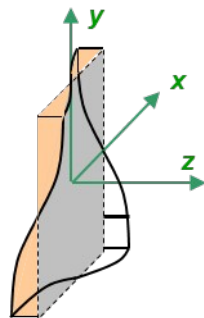
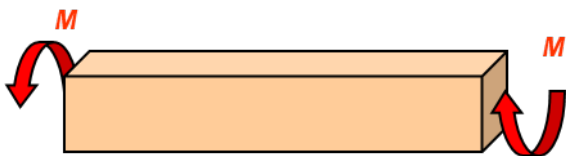
$$\varphi_{M_2} = \frac{M2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} = \frac{32 \cdot 8Ma}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_{M_3} = \frac{M2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} + \frac{32}{G \frac{\pi D^4}{32}} = \frac{32 \cdot 9Ma}{G\pi D^4};$$

$$\left(\frac{M_B 2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} + \frac{M_B 2a}{G \frac{\pi D^4}{32}} \right) = - \frac{32 \cdot 10M_B a}{G\pi D^4}.$$

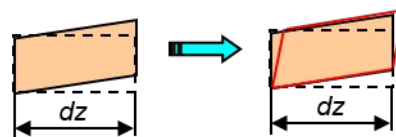
■ **Основные результаты теории кручения стержней прямоугольного сечения** – При рассмотрении деформации кручения стержней круглого сечения использовалась *гипотеза плоских сечений*. При кручении стержней прямоугольного сечения возникает **депланация сечения** – точки плоского до деформации поперечного сечения дополнительно перемещаются из этой плоскости по некоторому нелинейному закону:

■ **Основные результаты теории кручения стержней прямоугольного сечения** – При рассмотрении деформации кручения стержней круглого сечения использовалась *гипотеза плоских сечений*. При кручении стержней прямоугольного сечения возникает **депланация сечения** – точки плоского до деформации поперечного сечения дополнительно перемещаются из этой плоскости по некоторому нелинейному закону: $w = w(x, y).$



$$w = w(x, y)$$

Из рисунка [1] видно, что угол сдвига элемента, выделенного на поверхности бруса, происходит не только за счет наклона образующих, но и за счет наклона сторон, лежащих в поперечных сечениях:



При вычислении касательных напряжений в угловых точках по формуле, выведенной при использовании гипотезы плоских сечений (круглые сечения), в углах прямоугольного сечения должны получаться максимальные касательные напряжения ($\rho = \rho_{\max}$), а на самом деле в этих точках прямой угол остается прямым и касательные напряжения равны нулю.

Таким образом гипотеза плоских сечений не применима и задача кручения прямоугольного стержня не может быть решена в рамках допущений, принимаемых в сопротивлении материалов. Строгое решение такой задачи рассматривается в курсе теории упругости (кто не сдаст сопромат, тому не грозит изучение теории упругости - и ему хорошо, и преподавателю тоже).

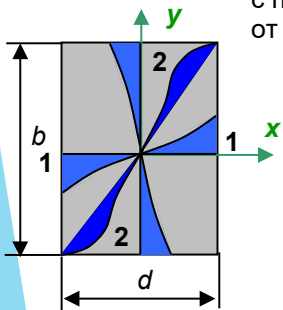
Приведем *некоторые основные результаты* решения методами теории упругости задачи кручения стержней прямоугольной формы:

1. **Наибольшие максимальные напряжения** – возникают в средних точках (1) длинных сторон прямоугольного контура. Они могут быть представлены в виде, подобном ранее полученной формуле:

Здесь момент сопротивления при кручении вычисляется с помощью табличного коэффициента, зависящего от соотношения длин сторон (b/d):

2. В средних точках (2) коротких сторон прямоугольного контура возникают несколько меньшие касательные напряжения. Они определяются через максимальные выражением:

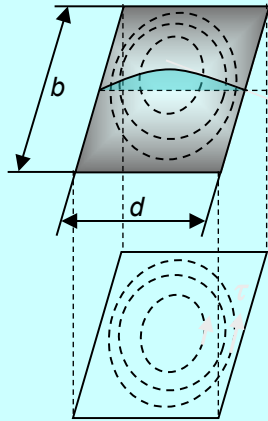
3. **Угол закручивания** определяется выражением:



4. В углах сечения касательные напряжения равны нулю.

b/d	1	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	∞
k_1	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	1/3
k_2	1	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,749
k_3	0,141	0,156	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	1/3

Мембранная аналогия – позволяет установить качественную картину распределения касательных напряжений. В теории упругости доказывается, что полное касательное напряжение пропорционально тангенсу угла наклона касательной к поверхности идеальной гибкой мембраны, натянутой на контур сечения, равномерно растягиваемой во всех направлениях и нагруженной постоянно распределенной поперечной нагрузкой. Некоторое представление от такой мембране дает мыльная пленка, выдуваемая на проволочный контур.



С помощью мембранной аналогии можно качественно предсказать положение точек, в которых возникают максимальные касательные напряжения (сжатие горизонталей) и минимальные (нулевые). На рисунке изображены (по техническим причинам) эллипсы, на самом деле при приближении к контуру должны быть некоторые овалы. Тем не менее можно увидеть, что в углах прямоугольного контура касательные напряжения должны обращаться в ноль.

Поперечная нагрузка, например, давление воздуха (дутье), вызывает прогибы поверхности. Сечения поверхности горизонтальными плоскостями дают линии равных прогибов (горизонтали), расстояния между которыми обратно пропорциональны тангенсу угла наклона касательной и, значит, величине касательных напряжений. Направление вектора касательных напряжений совпадает с касательными к горизонталям.

Рекомендуемая литература

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1989.-622 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: изд. МГТУ, 1999. -591с.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов - М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997.-320 с.
5. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И Руководство к решению задач по сопротивлению материалов - М.: Высшая школа, 1999. -592 с.
6. Миролубов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов -М: Высшая школа, 1985. -399 с.
7. Бондаренко А.Н. Электронный учебник по сопротивлению материалов. Москва. 2007 г.
8. Панков А.Д. Руководство по курсовому проектированию по сопротивлению материалов Расчет валов. г. Саров. 2008 г.
9. Панков А.Д. Вопросы для электронного тестирования по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2009 г.
10. Панков А.Д. Лабораторный практикум по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2010 г.
1. Шелюфаст В.В. Основы проектирования машин. Изд –во АПМ., 2007 г.



SATBAYEV
UNIVERSITY

The background of the right side of the image is a grayscale technical drawing on graph paper. It shows various mechanical sketches, including a spring, a bolt, and a cross-section of a part. A pencil is positioned diagonally across the drawing, and a ruler is visible at the bottom left. Handwritten annotations like 'Pup', '3', and 'st' are scattered throughout the drawing.

Спасибо за
внимание!