



SATBAYEV
UNIVERSITY



МСН5022 Механика материалов



Лектор: к.т.н., доцент Исаметова Мадина Есдаулетовна



Лекция 7 Изгиб прямых стержней.

Лекция 7

Изгиб

Определение деформации изгиб

Внутренние силовые факторы

Дифференциальные зависимости при изгибе

Внутренние силовые факторы в сечениях рам

Чистый изгиб

Напряжения при чистом изгибе

Перемещения при изгибе

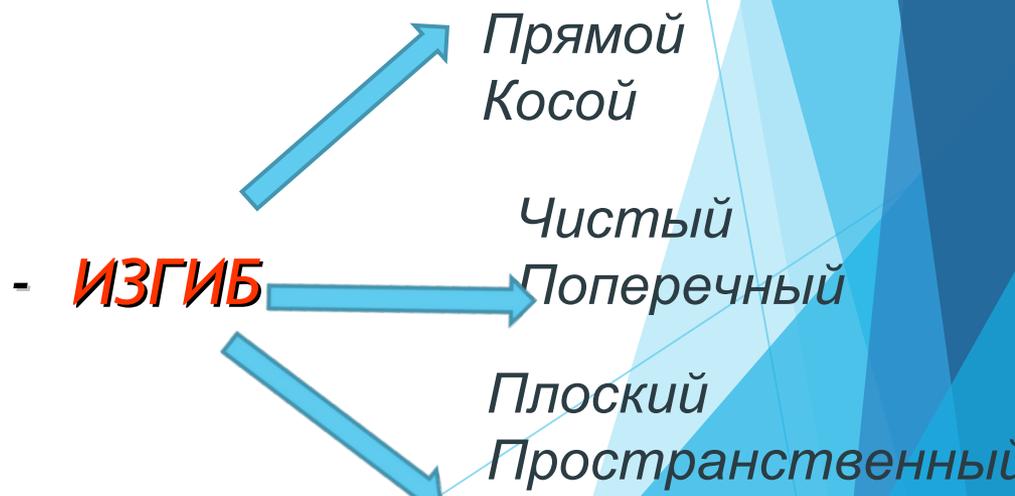
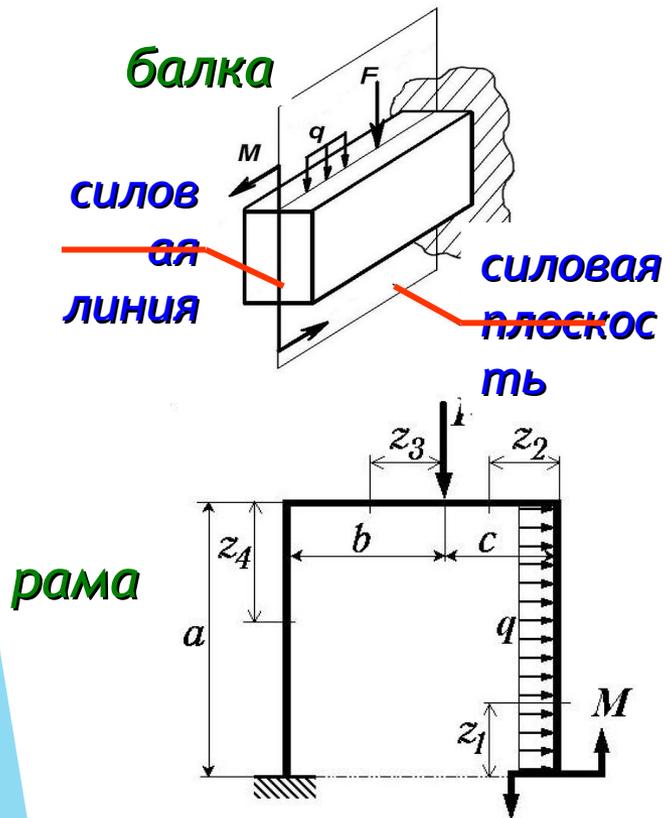
Вид деформации, при котором продольная ось бруса искривляется

Основные допущения:

1 Продольные волокна стержня (параллельные его оси) испытывают лишь деформации **растяжения-сжатия** и не оказывают давления друг на друга (гипотеза об отсутствии сдавливания продольных волокон).

2 В общем случае балка может испытывать изгиб под действием изгибающих моментов относительно осей x и y .

Если один из них равен нулю, а другой лежит в *главной* плоскости сечения (плоскости, проходящей через ось стержня и одну из главных центральных осей инерции), то такой изгиб называется **плоским изгибом**. Если при этом изгибающий момент *постоянный*, и это означает *отсутствие поперечной силы*, то такой изгиб называется **чистым изгибом**.



Внутренние силовые факторы

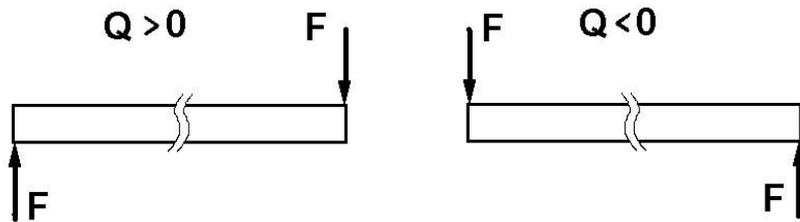
В общем случае балка может испытывать изгиб под действием изгибающих моментов относительно осей x и y .

Если один из них равен нулю, а другой лежит в *главной* плоскости сечения (плоскости, проходящей через ось стержня и одну из главных центральных осей инерции), то такой изгиб называется **ПЛОСКИМ ИЗГИБОМ**. Если при этом изгибающий момент *постоянный*, и это означает *отсутствие поперечной силы*, то такой изгиб называется **ЧИСТЫМ ИЗГИБОМ**.

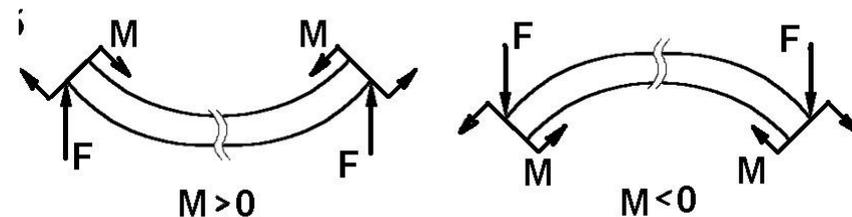
Для определения ВСФ при изгибе применяют метод сечений.

1. В поперечном сечении Q – численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.
2. M – численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

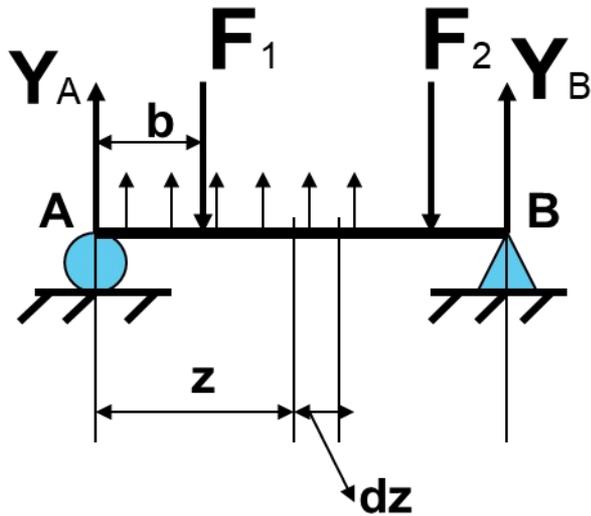
Правило знаков для поперечных сил Q :



Правило знаков для изгибающих моментов M :



Дифференциальные зависимости при изгибе



1. Q в сечении на расстоянии z от A:

$$Q = Y_A - F_1 + qz \quad (1)$$

2. Q в сечении на расстоянии $z+dz$ от A:

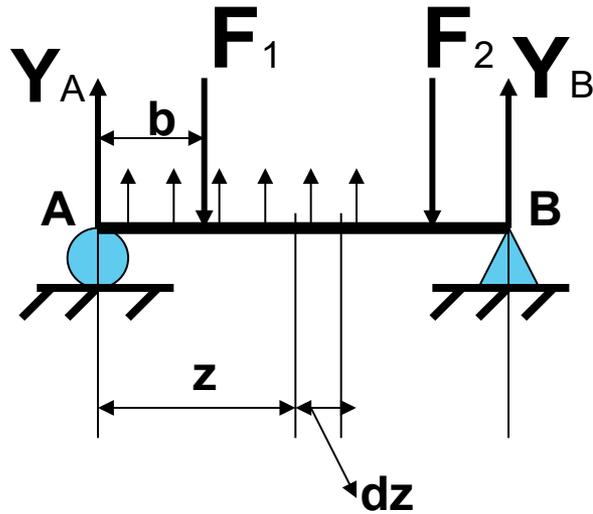
$$Q + dQ = Y_A - F_1 + q(z+dz) \quad (2)$$

3. Вычтем (1) из (2):

$$dQ = qdz \rightarrow \mathbf{q = dQ / dz}$$

Полная производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Дифференциальные зависимости при изгибе



1. М в сечении на расстоянии z от А:

$$M = Y_A z - F_1(z - b) + qz(z/2) \quad (3)$$

2. М в сечении на расстоянии $z+dz$ от А:

$$M+dM = Y_A(z+dz) - F_1(z+dz-b) + q(z+dz)(z+dz)/2 \quad (4)$$

3. Вычтем (3) из (4):

$$dM = Y_A dz - F_1 dz + qz dz + q dz dz / 2$$

$$dM = dz(Y_A - F_1 + qz) \rightarrow \mathbf{Q = dM/dz}$$

Полная производная от изгибающего момента по абсциссе сечения балки равна поперечной силе.

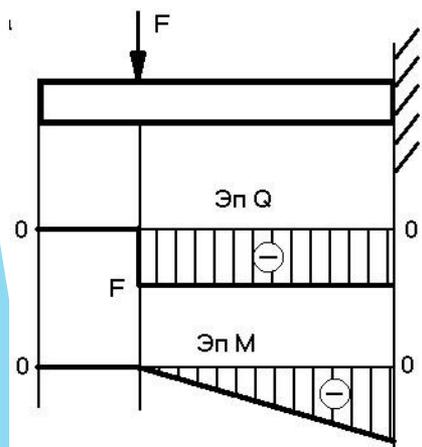
Дифференциальные зависимости Журавского

$$Q = \frac{dM}{dz}$$

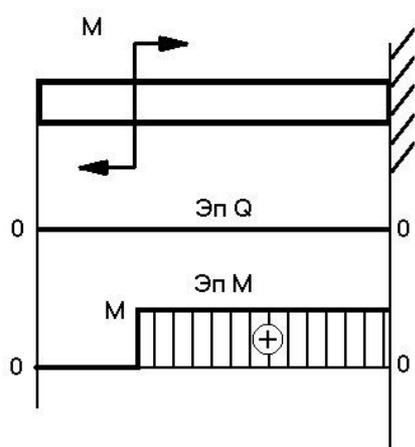
$$q = \frac{dQ}{dz}$$

$$q = \frac{d^2 M}{dz^2}$$

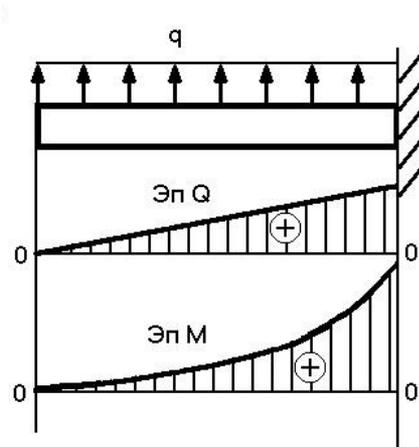
Общие закономерности эпюр Q и M



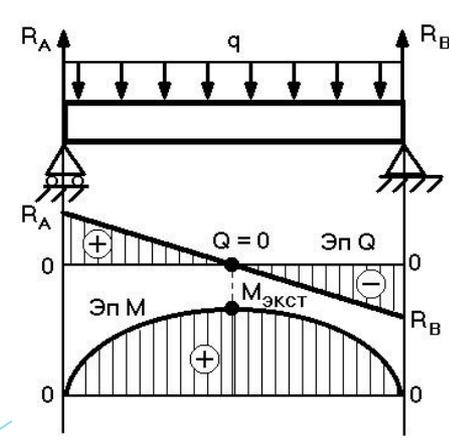
a



б

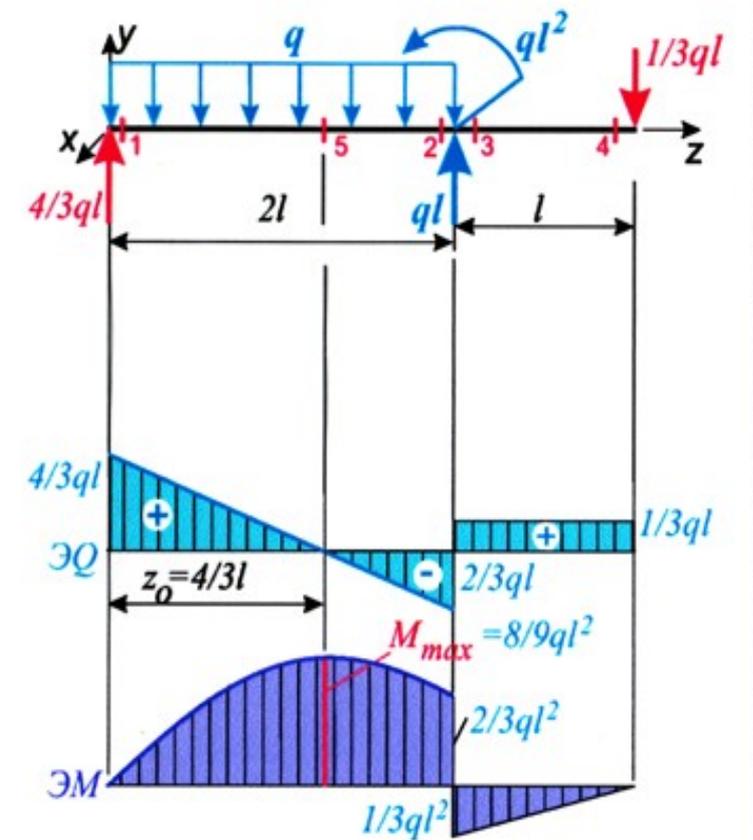


в



г

05. Изгиб прямого стержня



$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{d^2M}{dz^2};$$

1) $q=0$;

$$Q(z) = \text{const}; \quad M(z) = az+b;$$

2) $q = \text{const}$;

$$Q(z) = az+b; \quad M(z) = ax^2 + bz + c$$

3) $q = az + b$;

$$Q(z) = az^2+bz + c; \quad M(z) = az^3 + bz^2 + cz + d;$$

Участок 1-2: $q(z) = q$;

$$Q_{y1} = 4/3ql; \quad Q_{y2} = 4/3ql - q \cdot 2l - 2/3ql;$$

$$M_{x1} = 0; \quad M_{x2} = -ql \cdot 2l - q2l l = 1/3ql^2;$$

Участок 3-4: $q(z) = 0$; $Q_{x3} = Q_{x4} = 1/3ql$;

$$M_{x1} = 0; \quad M_{x3} = 1/3ql \cdot l = 1/3 ql^2.$$

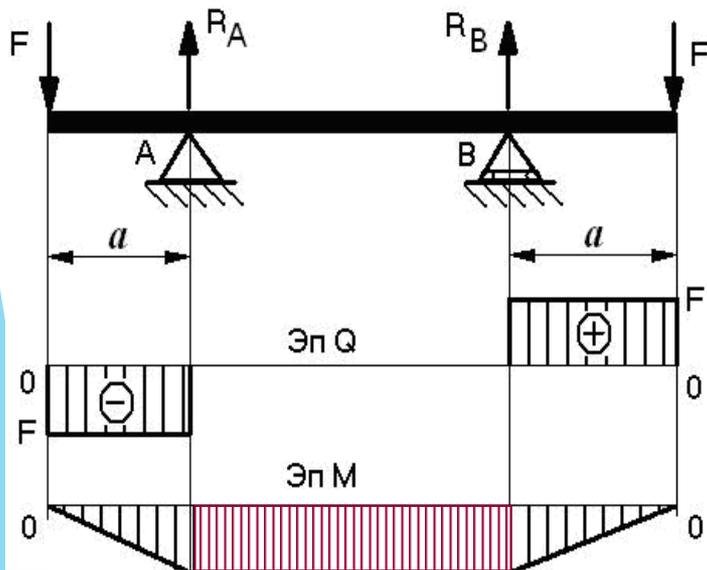
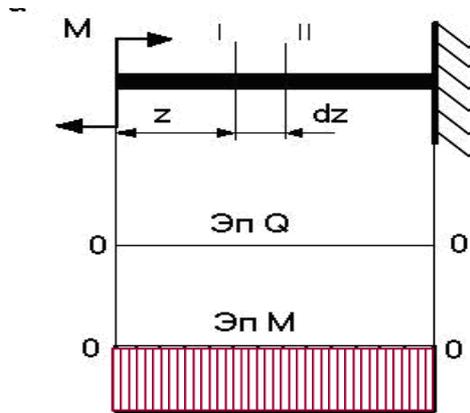
Сжаты нижние волокна.

$$M_{x5} = M_{max} = 4/3 ql \cdot 4/3l - q \cdot 4/3l \cdot 1/2 \cdot 4/3l = 8/9 ql^2.$$

ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В СЕЧЕНИЯХ РАМ

- *В сечениях стержней рамы кроме изгибающих моментов M и поперечных сил Q , обычно действуют еще и продольные силы N .*
- *Границами характерных участков для рамы являются также места изменения направления оси рамы.*
- *При определении знаков внутренних силовых факторов наблюдателю удобно располагать взгляд как бы изнутри контура рамы.*
- *При построении этих эпюр положительные ординаты M , Q и N откладывают с внешней стороны, а отрицательные – внутрь контура рамы.*

Чистый изгиб

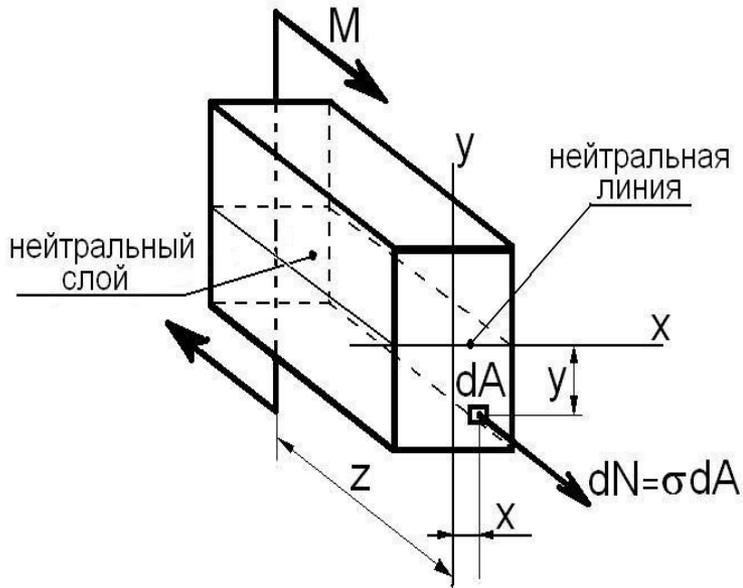
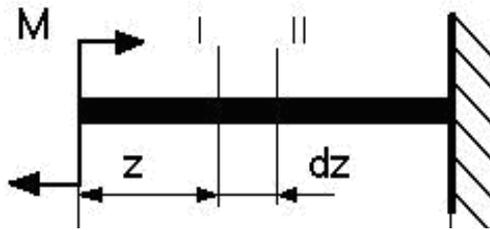


Нейтральный слой - продольный слой волокон, который, искривляясь, не испытывает ни растяжения, ни сжатия

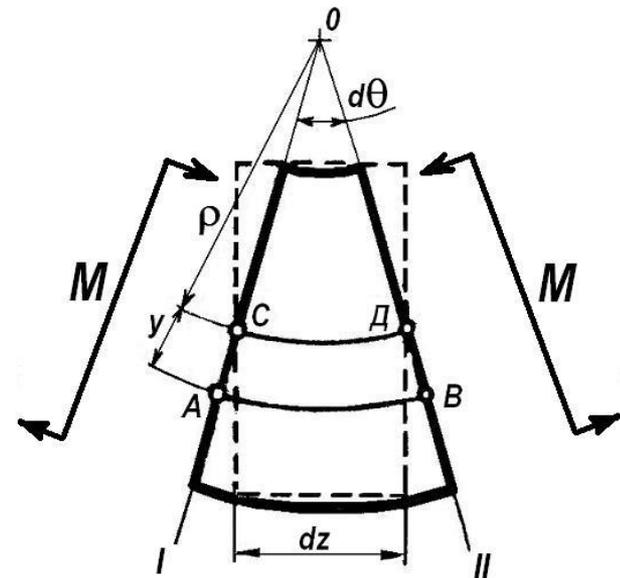
Упругая линия - деформированная ось балки, которая, будучи частью нейтрального слоя, длину не меняет.

Нейтральная линия (нейтральная ось) - линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения

Напряжения при чистом изгибе



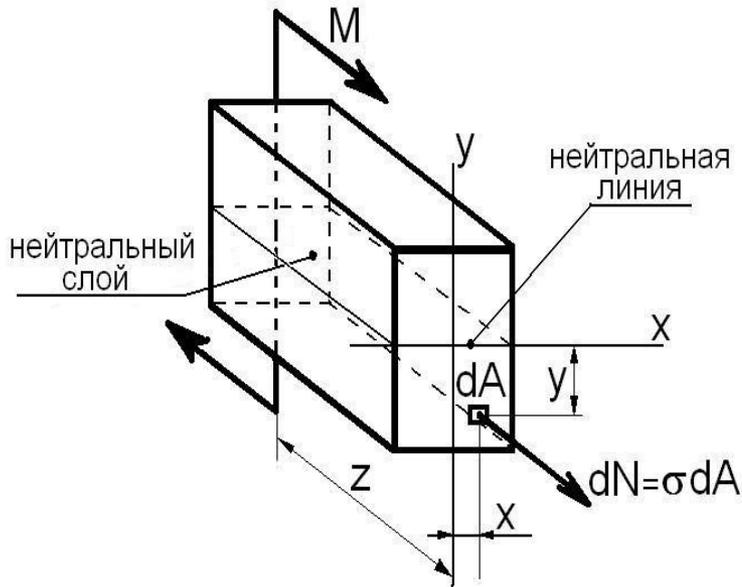
$$M_x = \int_A \sigma y dA$$



$$dz = \rho d\theta.$$

$$\sigma = E y / \rho.$$

Напряжения при чистом изгибе



Уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = \sigma \cdot dA = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y - M = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot x = 0.$$

Из первого уравнения равновесия: $\int_A \sigma \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0,$

а так как $\frac{E}{\rho} \neq 0,$

$$\int_A y \cdot dA = S_y = 0$$

Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения

Напряжения при чистом изгибе

Уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = \sigma \cdot dA = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y - M = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot x = 0.$$

Третье из уравнений равновесия

$$\int_A \sigma \cdot dA \cdot x = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot x \cdot dA = 0.$$

Так как $\frac{E}{\rho} \neq 0$, то

$$\int_A y \cdot x \cdot dA = I_{xy} = 0.$$

Нейтральная линия совпадает с главной центральной осью поперечного сечения балки.

Напряжения при чистом изгибе

Второе из уравнений
равновесия:

$$\int_A \sigma \cdot dA \cdot y = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = M.$$

Так как $\int_A y^2 \cdot dA = I_x$ „ тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}$$

- уравнение упругой линии

$(E \cdot I_x)$ - жесткость сечения

балки так как $\sigma = E \cdot y / \rho,$

Напряжения в любой точке сечения:

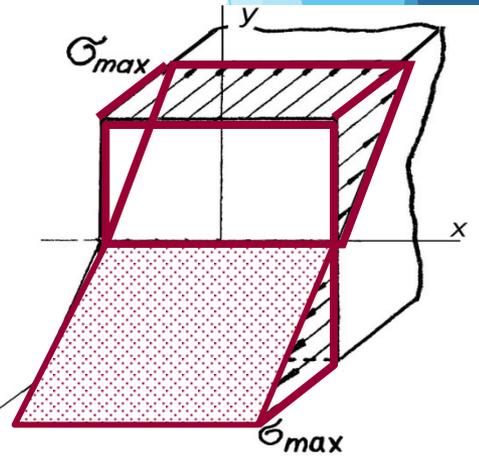
$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}$$

Уравнения равновесия:

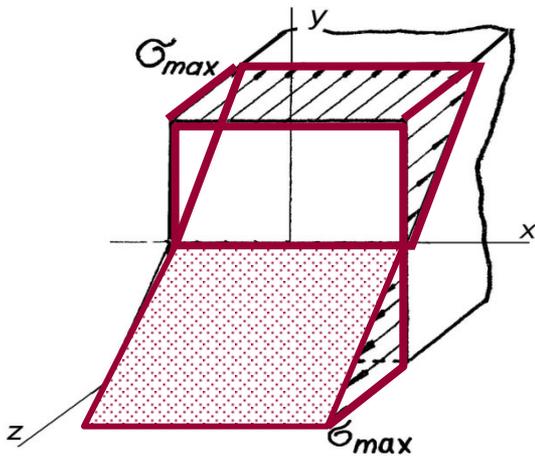
$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = \sigma \cdot dA = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y - M = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(F_k) = \int_A \sigma \cdot dA \cdot x = 0.$$



Напряжения при чистом изгибе



$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}$$

Максимальные напряжения возникают в верхних и нижних волокнах балки:

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y_{max}}{I_x}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}$$

где:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$$

- **осевой момент сопротивления сечения**
при изгибе

Напряжения при плоском поперечном изгибе

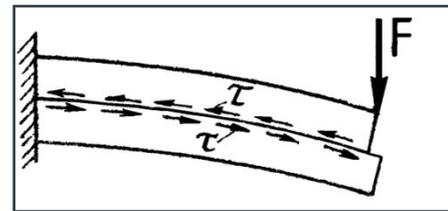
Нормальные напряжения

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}$$

Формулы
нормальных напряжений
для чистого изгиба
применимы и для
поперечного изгиба
из-за малости сдвиговых
деформаций:

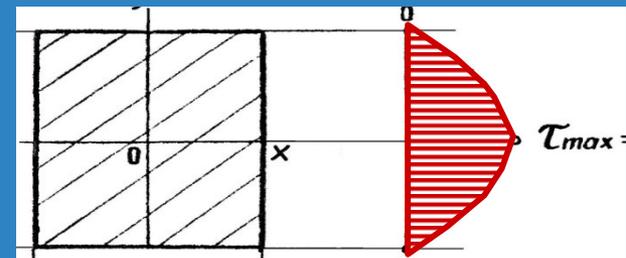
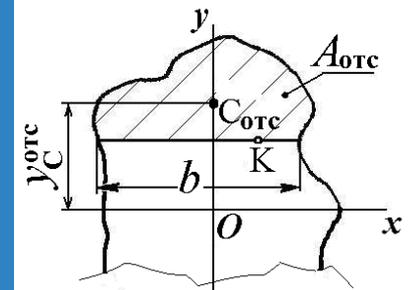
Касательные напряжения



Возникновение
касательных
напряжений τ
сопровождается

появлением сдвиговых деформаций γ

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$

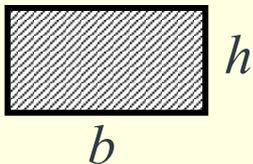


УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

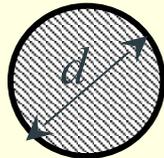
$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &\leq [\sigma] \\ \tau_{\max} &\leq [\tau] \end{aligned} \quad \sigma \gg \tau.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

Момент сопротивления сечения



$$W_x = bh^2/6$$



$$\begin{aligned} W_x &= \pi d^3/32 \\ &\approx 0,1d^3 \end{aligned}$$

Проверочный расчет: значение

σ_{\max} , сравнивают с $[\sigma]$ и делают вывод о прочности балки.

Проектный расчет:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

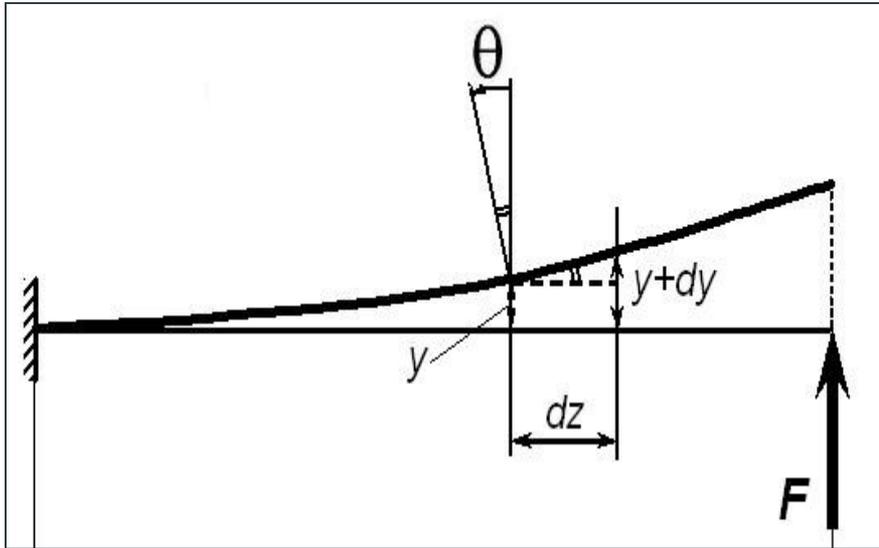
при известных значениях M и допускаемого напряжения $[\sigma]$:

Расчет допускаемой нагрузки:

$$[M] \leq [\sigma] \cdot W_x$$

при известных $[\sigma]$ и W_x

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ



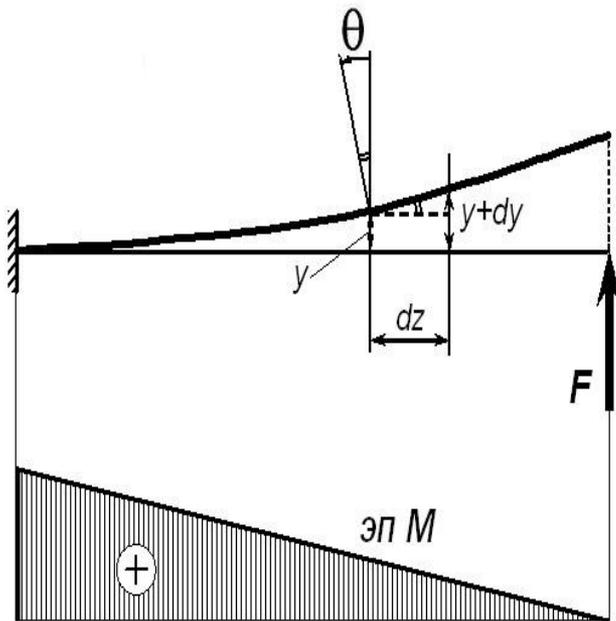
Прогиб балки y - перемещение центра тяжести поперечного сечения балки в направлении, перпендикулярном к ее оси.

$y > 0$ если перемещение происходит вверх.

Угол поворота сечения θ - угол, на который поворачивается сечение по отношению к своему первоначальному положению.

$\theta > 0$ при повороте против хода часовой стрелки.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ



Прогибы y и углы поворота θ

связаны между собой: $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dz} = y' \approx \theta$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}$$

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI_x}$$

**дифференциальное
уравнение упругой
линии**

Так как $(y')^2 \ll 1$ то

$$y'' = \frac{M}{EI_x}$$

**приближенное
дифференциальное
уравнение упругой линии**

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии:

$$EI_x y'' = M$$

Интегрируя его получим
для углов поворота:

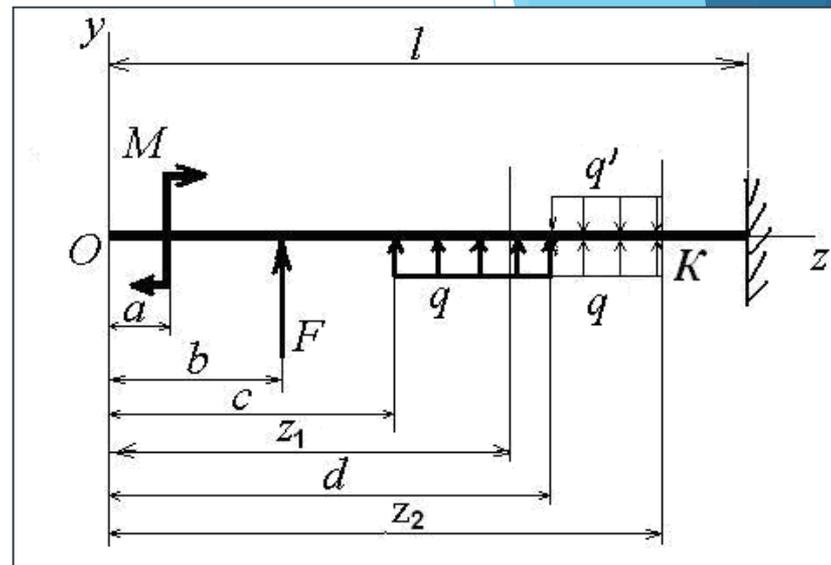
$$EI_x y'_1 = C + M(z_1 - a) + F \frac{(z_1 - b)^2}{2!} + q \frac{(z_1 - c)^3}{3!}$$

$$C = EI_x \theta_0$$

для прогибов:

$$EI_x y_1 = D + EI_x \theta_0 z_1 + M \frac{(z_1 - a)^2}{2!} + F \frac{(z_1 - b)^3}{3!} + q \frac{(z_1 - c)^4}{4!}$$

$$D = EI_x y_0$$



ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

В общем виде **УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

для прогибов:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + \sum M \frac{(z - l_M)^2}{2!} + \sum F \frac{(z - l_F)^3}{3!} + \sum q \frac{(z - l_q)^4}{4!}$$

для углов поворота :

$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 + \sum M \frac{(z - l_M)}{1!} + \sum F \frac{(z - l_F)^2}{2!} + \sum q \frac{(z - l_q)^3}{3!}$$

Начальные параметры находят из условий закрепления балки.

- для консольной балки в заделке : $y_0 = 0, \theta_0 = 0,$
- для балки на шарнирных опорах в опорных точках: $y_A = 0, y_B = 0.$

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Метод Мора:

В точке с искомым перемещением конструкцию нагружают единичной силой, которая совершает работу на возможном (искомом) перемещении.

Порядок определения перемещений :

1. Строят «вспомогательную систему» и нагружают ее единичной нагрузкой в точке с искомым перемещением .
2. Для каждого участка системы записывают выражения изгибающих моментов от приложенной нагрузки M_f и от единичной нагрузки - M_1 .
3. По всем участкам системы вычисляют и суммируют интегралы Мора, получая в результате искомое перемещение :

$$\Delta = \sum \int \frac{M_f M_1}{EI_x} dz$$

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Правило Верещагина (графоаналитический способ)

A_f – площадь эпюры изгибающего момента M_f от заданной нагрузки;

$$\Delta = \sum \frac{A_f y_c}{EI_x}$$

y_c – ордината эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести

эпюры M_f ;

EI_x – жесткость сечения участка балки.

- ❖ Вычисления производятся по участкам, на каждом из которых прямолинейная эпюра должна быть без переломов.
- ❖ Сложная эпюра M_f разбивается на простые фигуры.
- ❖ Площадь каждой фигуры умножается на ординату под ее центром тяжести

Рекомендуемая литература

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1989.-622 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: изд. МГТУ, 1999. -591с.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов - М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997.-320 с.
5. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И Руководство к решению задач по сопротивлению материалов - М.: Высшая школа, 1999. -592 с.
6. Миролубов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов -М: Высшая школа, 1985. -399 с.
7. Бондаренко А.Н. Электронный учебник по сопротивлению материалов. Москва. 2007 г.
8. Панков А.Д. Руководство по курсовому проектированию по сопротивлению материалов Расчет валов. г. Саров. 2008 г.
9. Панков А.Д. Вопросы для электронного тестирования по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2009 г.
10. Панков А.Д. Лабораторный практикум по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2010 г.
1. Шелофаст В.В. Основы проектирования машин. Изд –во АПМ., 2007 г.