



SATBAYEV  
UNIVERSITY



**МСН5022 Механика материалов**



**Лектор: к.т.н., доцент Исаметова Мадина Есдаулетовна**



**Лекция 8 Теории напряженного и деформированного состояний, теории прочности**

## **Лекция 8**

### **Теории напряженного и деформированного состояний, теории прочности**

**Теории прочности**

**Основные гипотезы**

**предельных состояний**

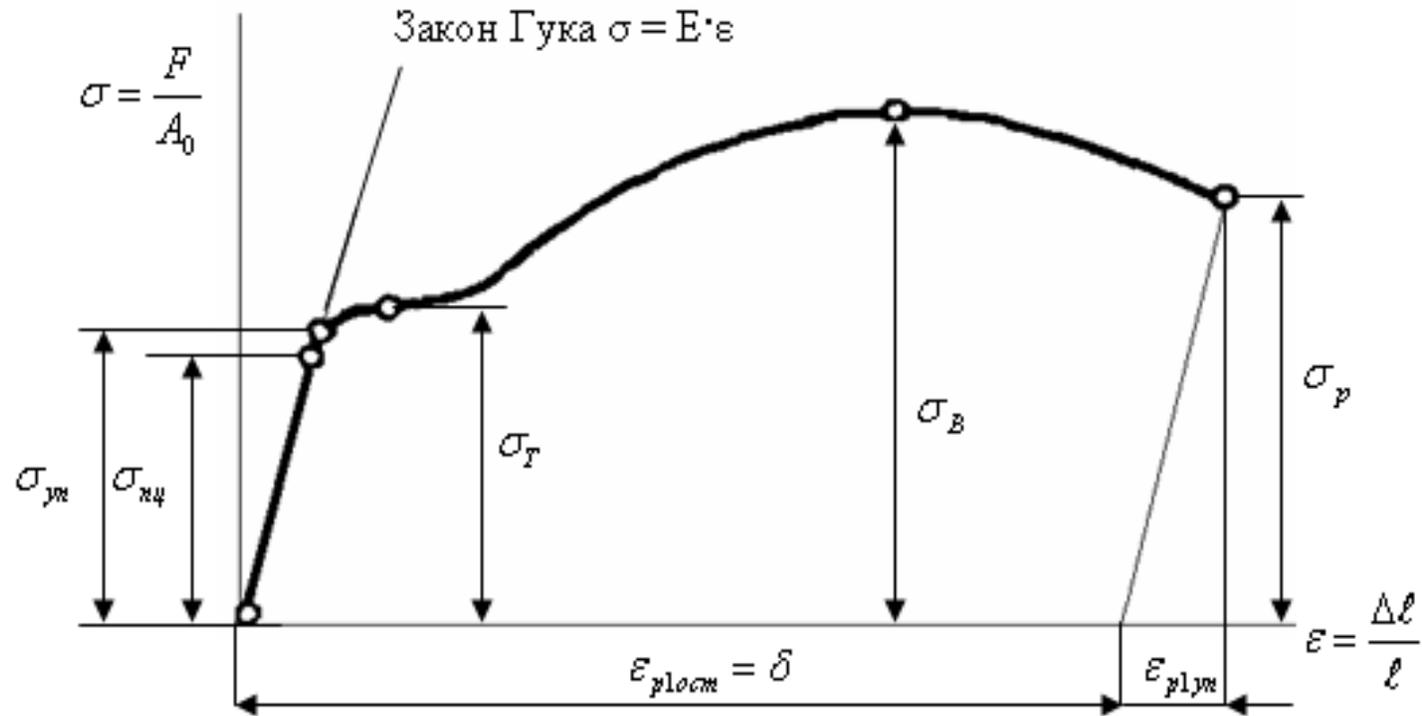
**Гипотеза наибольшего нормального напряжения**

**Гипотеза энергии формоизменения**

**Теория прочности Мора**

# Теории прочности

- ▶ Теории прочности - гипотезы об основной причине перехода материала в опасное напряженное состояние текучести или хрупкого разрушения.



# Составление условия прочности для линейного напряженного состояния

$$\sigma_1 \neq 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad - \text{условие прочности при растяжении (сжатии)}$$

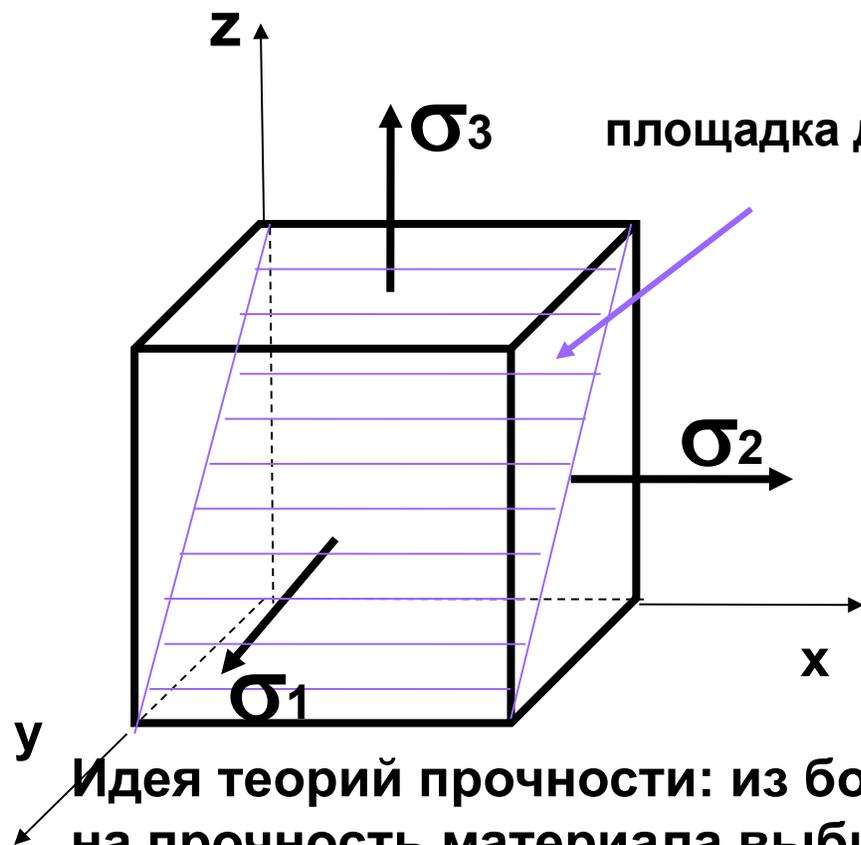
$$[\sigma] = \frac{\sigma}{n} \quad - \text{допускаемое напряжение}$$

$\sigma_B$  - предельное напряжение для хрупких материалов

$\sigma_T$  - предельное напряжение для пластичных материалов

$\sigma_B$  и  $\sigma_T$  -устанавливают опытным путем

# Условие прочности для сложного напряженного состояния



Определить при каких значениях напряжений наступит предельное состояние материала (разрушение или возникновение пластических деформаций) весьма сложно.

Идея теорий прочности: из большого числа факторов, влияющих на прочность материала выбирают один (критерий прочности), не учитывая остальные. Надежность теорий прочности проверяют опытным путем

# Эквивалентное напряжение

$\sigma_{ЭКВ}$

- напряжение, при котором образец материала в условиях одноосного напряженного состояния оказывается в равноопасном состоянии (одинаковые коэффициенты запаса прочности) с рассматриваемым сложноподпряженным состоянием, называется эквивалентным напряжением.

**Опасная точка** – точка бруса, в которой достигается максимальное значение эквивалентного напряжения. Эта точка принадлежит **опасному сечению бруса**.

## Первая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений)

- ▶ Предельное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее по модулю нормальное напряжение достигает опасного значения (критерий прочности - наибольшее нормальное напряжение).

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 \leq [\sigma]$$

Теория удовлетворительно справедлива для хрупких материалов; частично подтверждается опытным путем; в практических расчетах не применяется.

## Вторая теория прочности (теория относительных удлинений)

- ▶ Опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее относительное удлинение достигает опасного значения (критерий прочности - наибольшая линейная деформация).

$$\varepsilon_1 \leq [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

**Экспериментально теория не подтверждается**

## Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений)

- ▶ Опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает опасного значения (критерий прочности - наибольшее касательное напряжение).
- ▶ **Предпосылка создания теории:** пластическая деформация в металлах возникает в результате необратимых сдвигов в кристаллической решетке. Наибольшие касательные напряжения имеют место в сечениях, расположенных под углом  $45^\circ$  к направлению главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

## Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений)

▶ В наклонном сечении при растяжении (сжатии) в двух направлениях:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

При линейном напряженном состоянии:

$$[\tau] = \frac{1}{2} [\sigma]$$

Тогда по 3 теории прочности, условие прочности при которой:  $\tau_{\max} \leq [\tau]$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

# Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений)

Формула для определения главных нормальных напряжений (1):

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{M}{W_x} \quad (2) \quad \tau = \frac{M_k}{2W_x} \quad (3) \quad \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (4)$$

Подставим (1); (2) и (3) в (4):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$W_x = \frac{\sqrt{M^2 + M_k^2}}{[\sigma]}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Теория подтверждается экспериментально для пластичных материалов.

## Четвертая теория прочности (энергетическая)

▶ Прочность материала при сложном напряженном состоянии обеспечивается в том случае, если удельная потенциальная энергия деформации не превосходит допускаемой удельной потенциальной энергии, установленной для линейного напряженного состояния.

$$u \leq [u]$$

Потенциальная энергия деформации это величина равная работе внутренних сил, но с противоположным знаком. Потенциальную энергию, отнесенную к единице объема, называют удельной потенциальной энергией.

## Четвертая теория прочности (энергетическая)

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma]$$

Теория подтверждается экспериментально для пластичных материалов, так как не учитывает различия между растяжением и сжатием. Пользуясь этой теорией придется принимать:

$$[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$$

# *Основные гипотезы пределных состояний*

**Пределное НС – НС, при котором происходит качественное изменение свойств материала – переход от одного механического состояния в другое:**

- ❑ **пластический материал – возникновение заметных остаточных деформаций;**
- ❑ **хрупкий материал – начало разрушения материала.**

**Пределное НС может рассматриваться как характеристика свойств материала.**

**Трудность создания теории пределных состояний – недостаточность наших представлений о внутренних процессах, происходящих в материале.**

**Задача решается в основном путем анализа и обобщения экспериментальных данных.**

**2 направления в ТПС**

- ❑ **на основе гипотез;**
- ❑ **феноменологический подход (применяется при описании явлений, детальный механизм которых недостаточно ясен: физика – закон всемирного тяготения; геология – при описании закономерностей расположения залежей полезных ископаемых).**

# Коэффициент запаса прочности

Под коэффициентом запаса понимается число, показывающее, во сколько раз следует увеличить все компоненты НС, чтобы оно стало предельным.

Если в двух НС коэффициенты запаса равны, то такие НС называются равноопасными.

$$k = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{эке}} ;$$

При растяжении  $\sigma_{пред} = \sigma_T ; \quad \sigma_{пред} = \sigma_B ;$

При сжатии  $\sigma_{пред} = \sigma_{кр}$

# *1. Гипотеза наибольшего нормального напряжения*

**В качестве критерия прочности берется  
величина наибольшего нормального  
напряжения  $\sigma_1$ .**

**Два других главных не учитываются.**

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1$$

## *2. Гипотеза наибольших линейных деформаций*

**Отрыв материала по плоскости можно рассматривать как результат нарушений межмолекулярных сил сцепления вследствие увеличения расстояния между молекулами.**

**Была выдвинута гипотеза использовать в качестве ПС наибольшую линейную деформацию.**

**Эта гипотеза получила довольно широкое распространение, однако детальная проверка обнаружила в ней ряд существенных недостатков.**

### 3. Гипотеза максимальных касательных напряжений

Образование остаточных деформаций в металлах происходит сдвигом частиц друг относительно друга.

Поэтому критерием перехода от упругого состояния в пластическое являются наибольшие касательные напряжения в точке.

Это означает, что пластические деформации начинают образовываться тогда, когда максимальные касательные напряжения достигают некоторого предельного значения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\text{ЭКВ}}}{2}; \quad \sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

**Пластичные материалы – удовлетворительные результаты.**

**Недостатки – для материалов, имеющих различные механические характеристики на растяжение и сжатие.**

## 4. Гипотеза энергии формоизменения

**Внутренняя потенциальная энергия = энергия изменения объема + энергия формоизменения.**

**В основе перехода из упругого состояния в пластическое учитывается только энергия формоизменения.**

$$U_{\phi} = \frac{1 + \mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]$$

$$U_{\phi} = \frac{1 + \mu}{6E} 2\sigma^2$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

## *4. Гипотеза энергии формоизменения*

**Гипотеза применима к оценке ПС пластичных материалов и дает результаты менее удовлетворительные для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.**

**Гипотезы 3 и 4 являются основными гипотезами ПС и сохраняют свое значение до настоящего времени.**

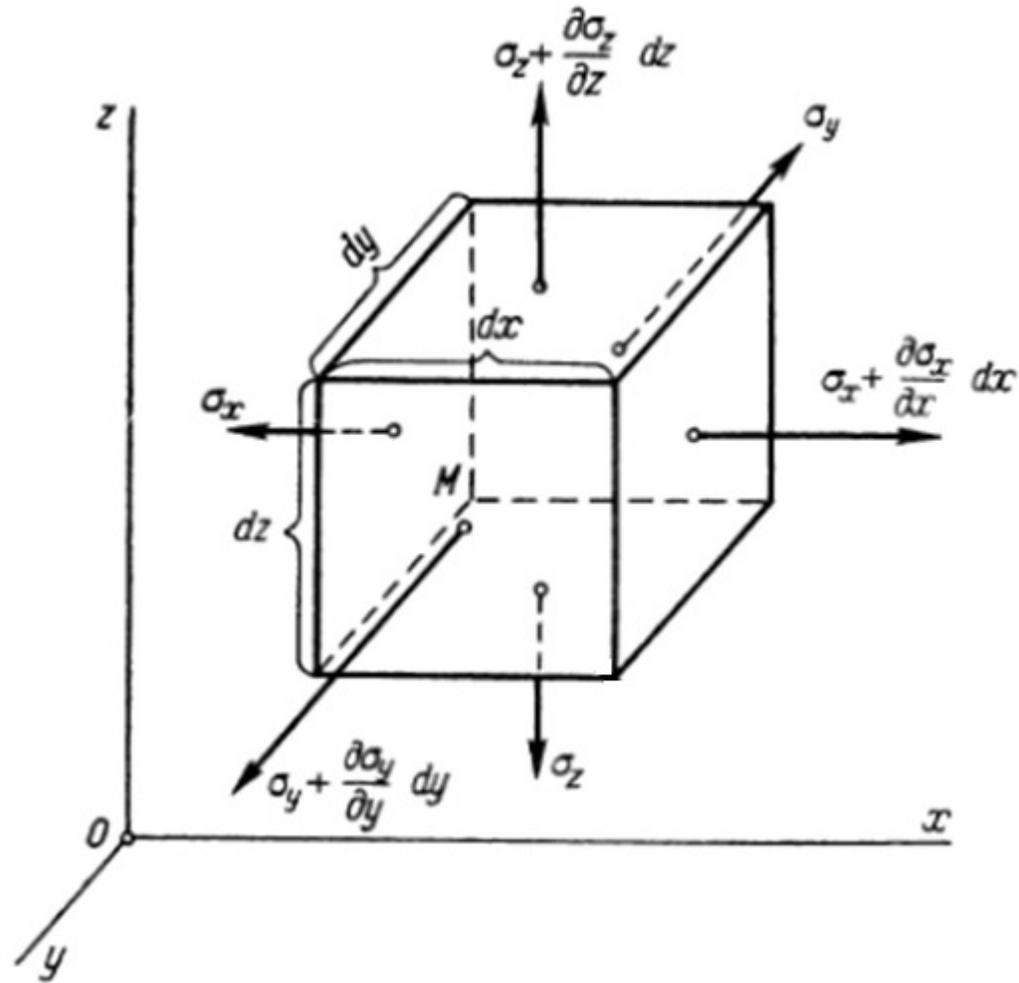
# Теория прочности Мора

**Общепризнанной в настоящее время является теория прочности Мора**

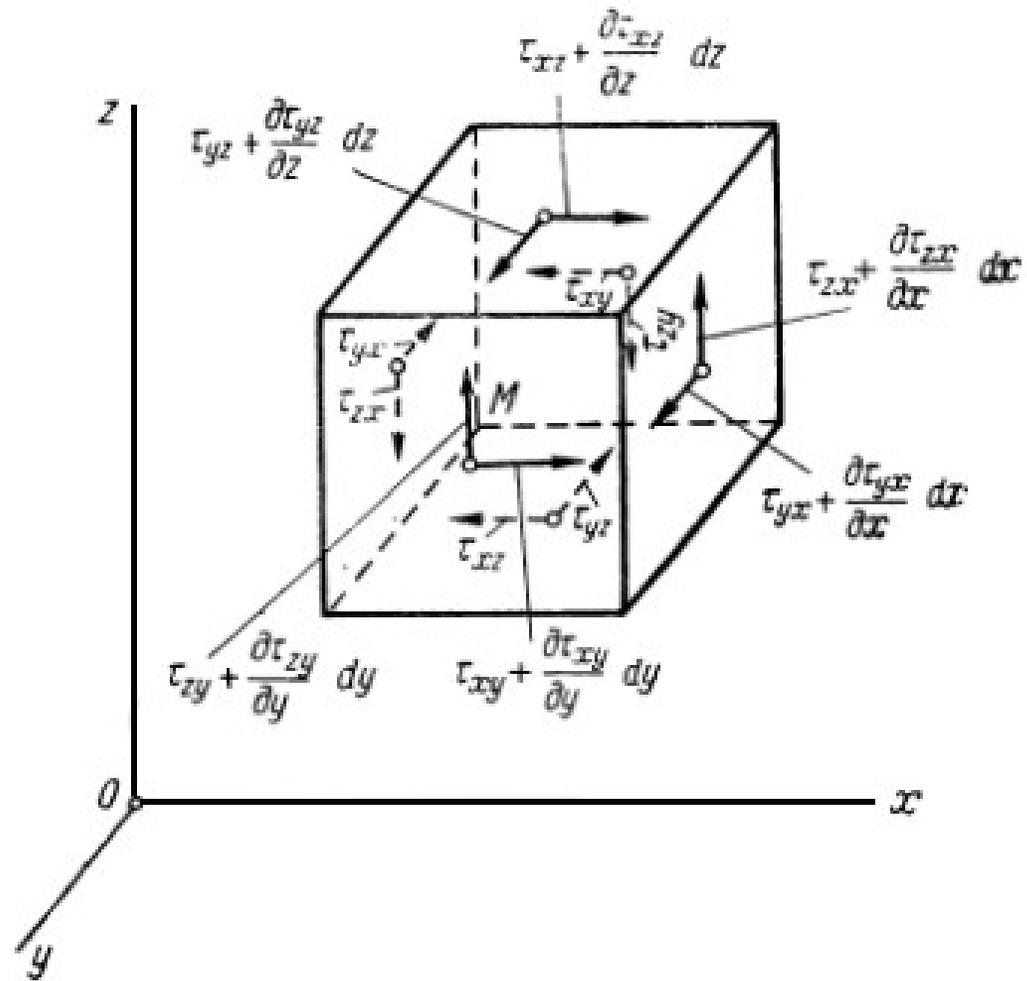
$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 - k\sigma_3$$

$$k = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{TC}} ; \quad k = \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_{BC}}$$

# Дифференциальные уравнения равновесия в декартовой системе координат



# Дифференциальные уравнения равновесия в декартовой системе координат



## Дифференциальные уравнения равновесия в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right] dydz - \sigma_x dydz + \\ & + \left[ \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right] dxdz - \tau_{xy} dxdz + \\ & + \left[ \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right] dxdy - \tau_{xz} dxdy + \\ & + X \rho dxdydz = \rho dxdydz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

**X – проекция на ось x  
объемной силы, отнесенной  
к единице массы**

## Рекомендуемая литература

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1989.-622 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: изд. МГТУ, 1999. -591с.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов - М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997.-320 с.
5. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И Руководство к решению задач по сопротивлению материалов - М.: Высшая школа, 1999. -592 с.
6. Миролубов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов -М: Высшая школа, 1985. -399 с.
7. Бондаренко А.Н. Электронный учебник по сопротивлению материалов. Москва. 2007 г.
8. Панков А.Д. Руководство по курсовому проектированию по сопротивлению материалов Расчет валов. г. Саров. 2008 г.
9. Панков А.Д. Вопросы для электронного тестирования по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2009 г.
10. Панков А.Д. Лабораторный практикум по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2010 г.
1. Шелофаст В.В. Основы проектирования машин. Изд –во АПМ., 2007 г.