



# SATBAYEV UNIVERSITY



**МСН5022 Материалдар механикасы**



**Дәріскер: т. ғ. к., доцент Исаметова Мадина Есдәулетқызы**



**Дәріс 6. Түзу цилиндрлік сырықтарды бұралуы.**

## **Дәріс 6 Бұралу.**

**Дөңгелек көлденең қиманың сырықтарды бұрау**

**Момент диаграммаларын құру**

**Бұралу кезіндегі жанама кернеулер**

**Бұралу кезіндегі деформациялар**

**Беріктік пен қаттылық үшін білікті есептеу**

**Бұралу кезіндегі кернеу күйін талдау**

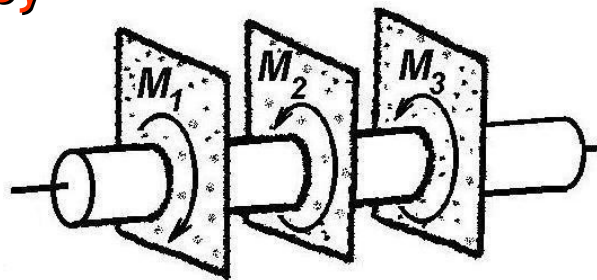
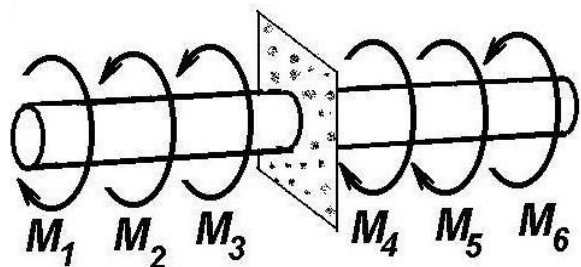
**Бұралу кезінде статикалық**

**Анықталмайтын тапсырмалар**

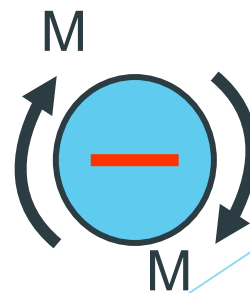
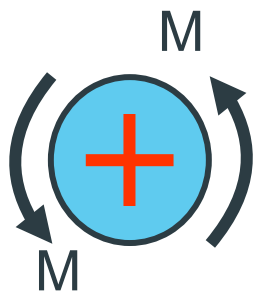
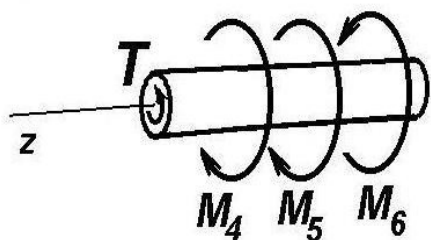
- **Дөңгелек көлденең қиманың сырықтарды бұралуы** - бұралу көлденең қималарда  $M_z$  моментіне әкелетін жанама кернеулердің пайда болуымен сипатталады.

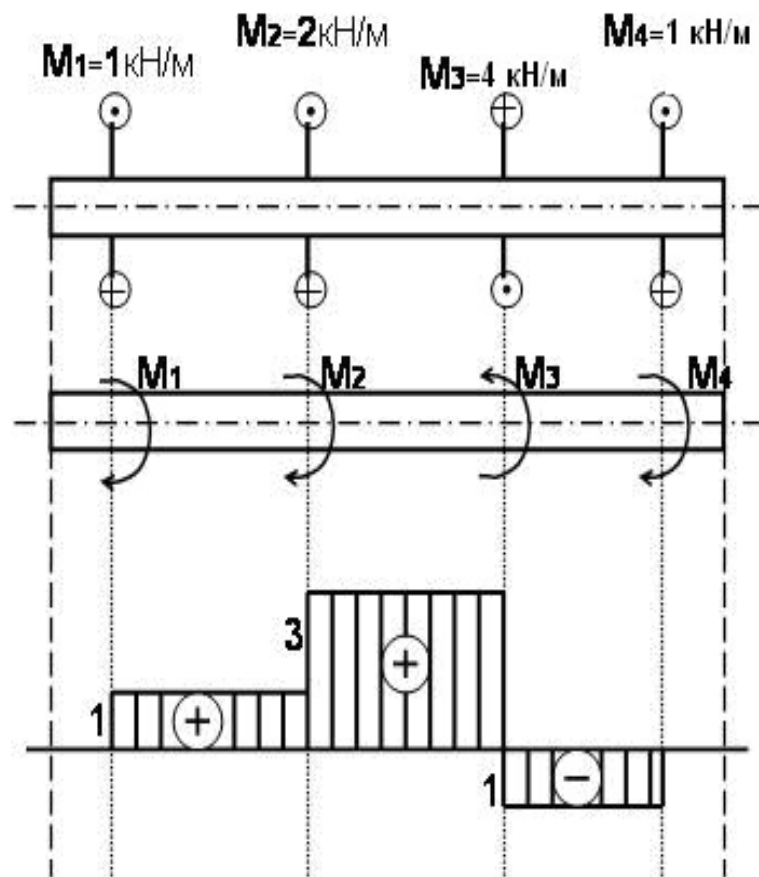
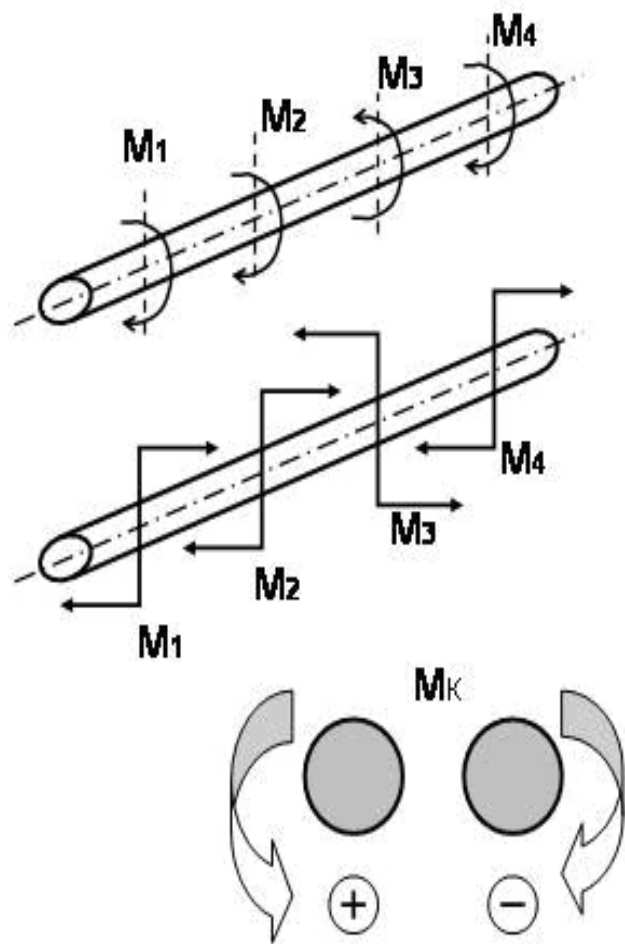
Бұралу кезінде штанганың деформациясы көлденең қималармен көрінеді өзек осіне айналады  $z$  кейбір бұрыштар үшін  $\varphi = \varphi(z)$ , бұралу бұрыштары деп аталады.

### Айналдыру моментінің эпюрін құру



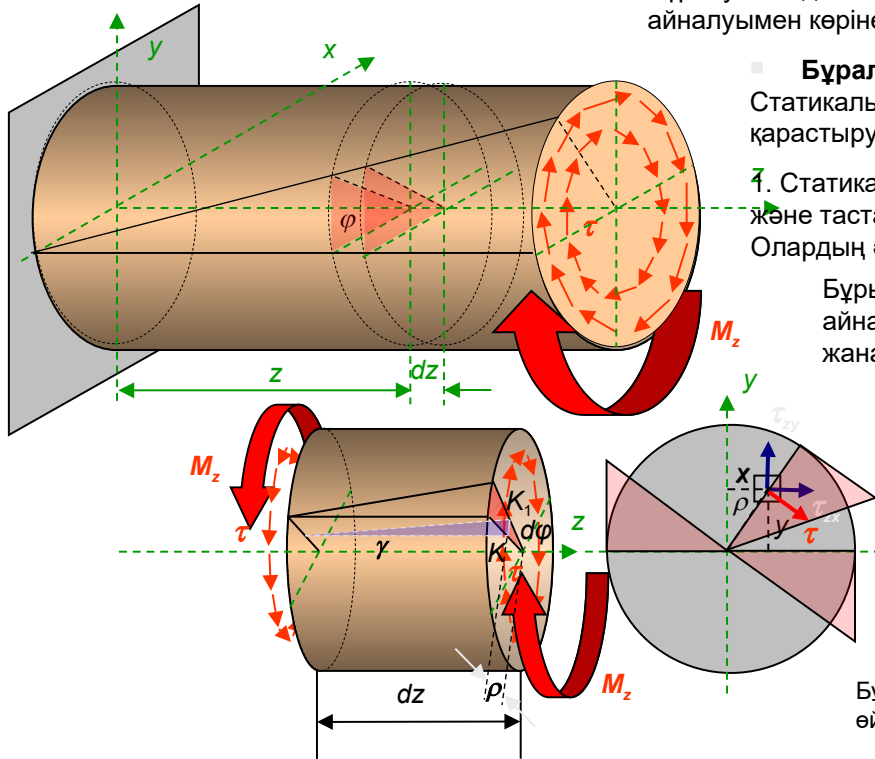
Момент белгілерінің ережесі:





- **Дөңгелек көлденең қиманың сырықтарды бұралуы** - бұралу көлденең қималарда  $M_z$  моментіне әкелетін жанама кернеулердің пайда болуымен сипатталады.

Бұралу кезінде штанганың деформациясы көлденең қималардың штанганың осіне айналуымен көрінеді кейбір бұрыштар үшін  $\varphi = \varphi(z)$ , бұралу  $z$  бұрыштары деп аталады.



- **Бұралу кезіндегі жанама кернеулер** - бұрын айтылғандай, міндеткернеуді анықтау Статикалық түрде анықталмайды, оны шешу үшін тапсырманың үш жағын дәйекті түрде қарастыру қажет:

1. Статика: Шағын элементті білік осіне қалыпты екі қимамен бөліп алайық және тасталған бөліктердің әрекетін жанама кернеулермен алмастырамыз. Олардың әрекетінде элемент тепе-теңдікте болады.

Бұрын бөлінген күштерді орталыққа және орталық осьтерге айналу сәтін байланыстыратын интегралды арақатынас алынды жанама кернеулермен:

$$M_z = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

Әрбір нүктеде еркін бағыттағы жанама кернеу көлденең қиманың жазықтығын екі басқа бағыттарға, атап айтқанда нүктені ортамен қосатын радиус бойынша осы радиусқа перпендикуляр бойынша. Сәті  $z$  орталық осіне қатысты тек екінші құрауышты ғана жасайтын болады,  $\tau$  бір символмен белгіленеді. Сонда:

$$M_z = \int_A \tau \rho dA$$

Бұл қатынастан белгілі айналу сәті бойынша кернеуді табу әзірге мүмкін емес, өйткені қима радиусы бойынша кернеудің өзгеру заңы белгісіз.

2. Геометрия: Жалпақ қималар гипотезасына сәйкес өздерінің бұрылыстары кезінде қималар жазық болып қалады (дөңгелек қималар үшін ғана әділ). Көлденең жол беру қиманың барлық радиустары түзу болып қалады және бір бұрышқа бұрылады (бұрылу бұрышы).

3. Физика: Гук заңы бойынша:

$$\tau = G\gamma \implies \tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$$

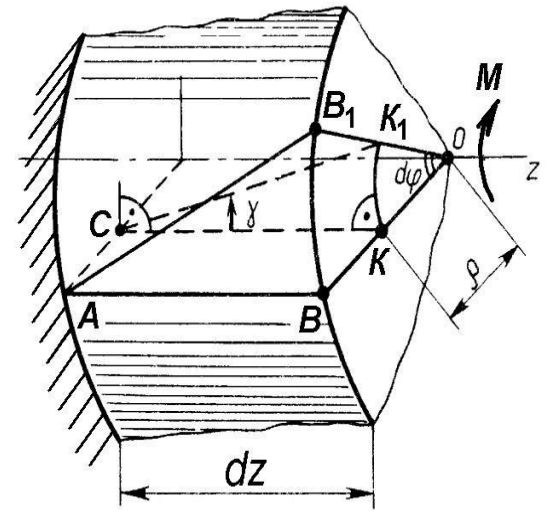
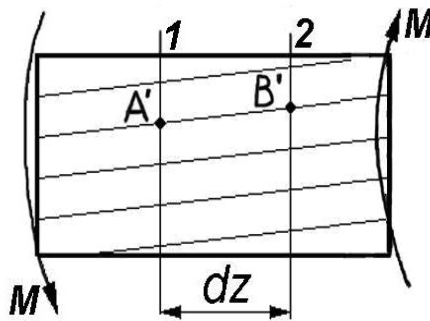
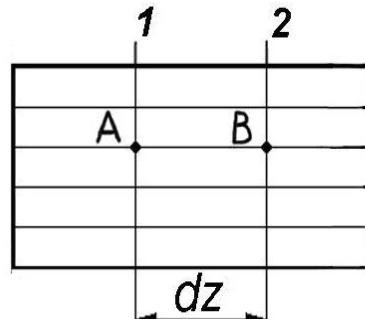
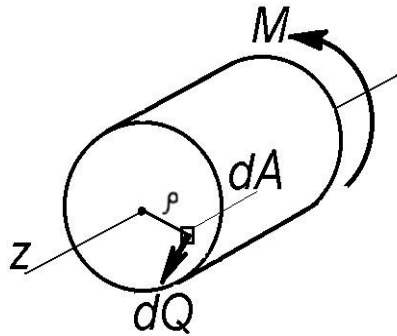
Интегралға ауыстыру:

$$M_z = \int_A G \frac{d\varphi}{dz} \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} I_p \implies d\varphi = \frac{M_z}{GI_p} dz$$

Кернеулер үшін өрнекке ауыстырыңыз:

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho$$

## Бұралу кезіндегі кернеулер



$$dQ = \tau dA$$

$$dQ \cdot \rho = \tau \cdot \rho dA$$

$$T = \int_A \tau \rho dA$$

**Бұралу кезіндегі кернеулер**

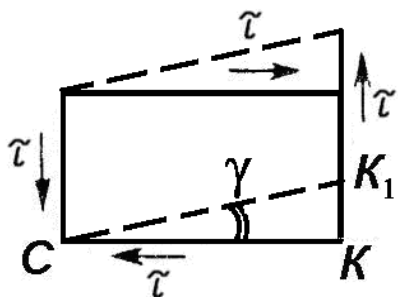
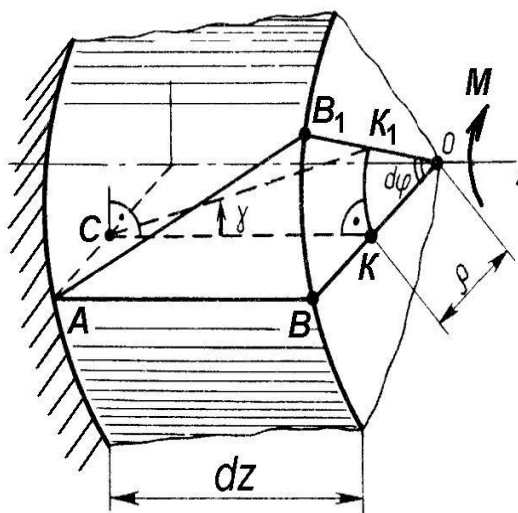
$$KK' = \gamma \cdot dz = \rho \cdot d\varphi \quad \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$$

Гук заңы бойынша:  $\tau = G \cdot \gamma = G \rho \frac{d\varphi}{dz}$

$\theta = \frac{d\varphi}{dz}$  - салыстырмалы бұралу бұрышы,  $\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GI_\rho}$

$$T = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} I_\rho$$

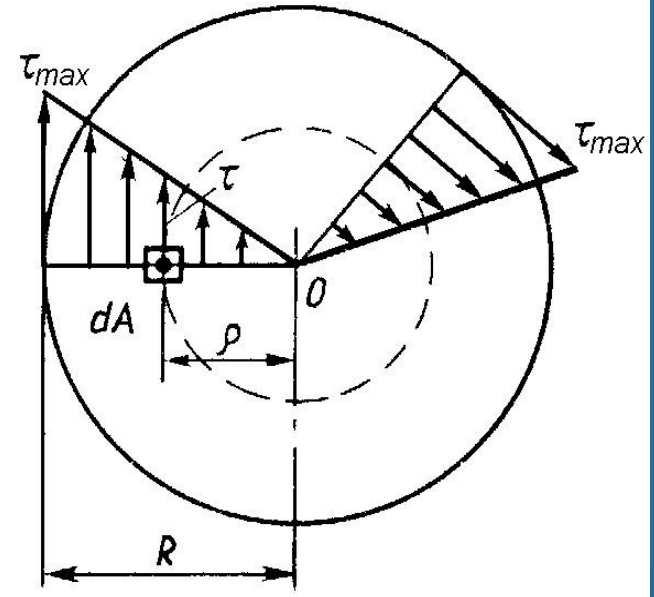
$$\tau = \frac{T}{I_\rho} \rho$$



# Бұралу кезіндегі кернеулер

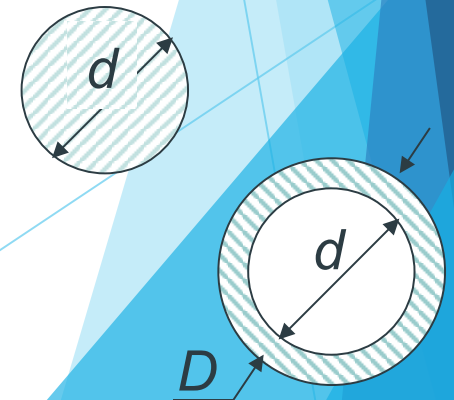
$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_{\rho}} \rho_{\max} = \frac{T}{W_{\rho}}$$

$$W_{\rho} = I_{\rho} / \rho_{\max} = I_{\rho} / R = 2I_{\rho} / d$$



Дөңгелек қима үшін  $W_{\rho} = \pi d^3 / 16 \approx 0,2 d^3$

Сақина тәрізді қима үшін  $W_{\rho} = 0,2 D^3 (1 - c^4)$



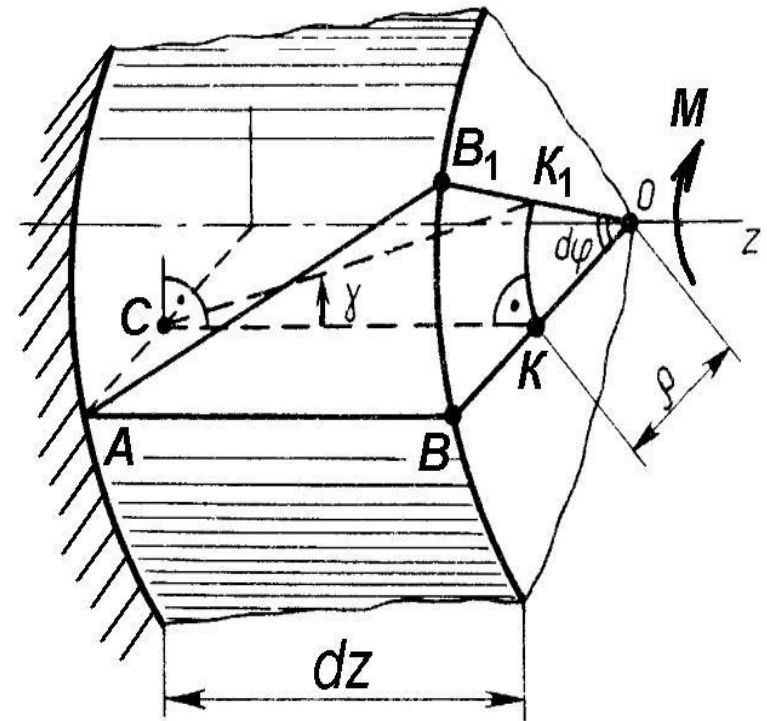


## Бұралу кезіндегі деформациялар

$$d\varphi = \frac{T}{GI_{\rho}} dz \quad \varphi = \int_l \frac{T}{GI_{\rho}} dz$$

$$\varphi = \sum \int_l \frac{T}{GI_{\rho}} dz$$

$$\varphi = \frac{T}{GI_{\rho}} l$$



$GI_{\rho}$  - бұралу кезінде біліктің қимасының қаттылығы

## Беріктік пен қаттылық үшін білікті есептеу

*Біліктің беріктік шарты*

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{\max}}{0,2[\tau]}}$$

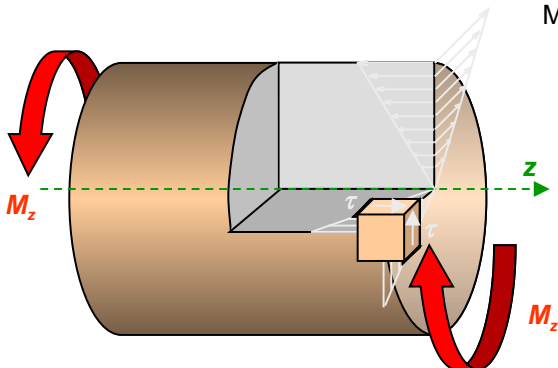
$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

$$[T] \leq [\tau]W_{\rho}$$

*Біліктің қаттылық шарты*

$$\theta_{\max} = \frac{T}{GI_{\rho}} \leq [\theta]$$

**Айналу кезіндегі кернеу күйін талдау** - Көлденең қимада туындайтын жанама кернеулер үшін алынған формула жанама кернеулерді бойлық диаметрлік қимаға перпендикулярлы жазықтықта бір мезгілде анықтайды:



Материалдың әрбір тік бұрышты элементі таза жылжудың кернеулі күйін сезінеді.

**Бұрау бұрыштарын анықтау** - Жанама кернеу формуласын шығару кезінде айналдыру кезінде сараланған тәуелділік алынды:

$$d\varphi = \frac{M_z}{GI_p} dz$$

мұнда  $\varphi_0$  – бұрылу

**Бұрау бұрышы осымен анықталады ықпалдастырудың сараланған арақатынасы сол және оң жақ бөліктері:**

$$\varphi = \int_{z_0}^z \frac{M_z}{GI_p} dz + \varphi_0,$$

бұрышы  $z = 0$ .

Жеке жағдайда  $M_z$  тұрақты сәті,  $GI_p$  тұрақты қаттылығы және координаттардың басында қозғалмайтын қимасы кезінде ( $\varphi_0 = 0$ ) мыналарды аламыз:

$$\varphi = \frac{M_z z}{GI_p} \Big|_0^l = \frac{M_z l}{GI_p}.$$

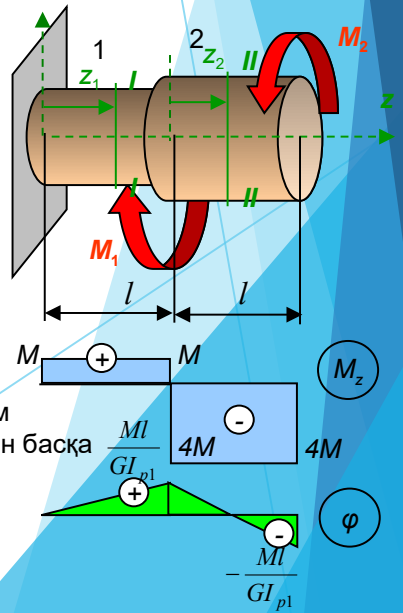
Осы формуланы тұрақты білікке арналған бұрышты немесе шоғырланған сәттермен жүктелген сатылы тұрақты қима.

Бұл ретте айналу сәті, қаттылығы тұрақты учаскелердің әрқайсысында бұрылу бұрышы сызықтық заң бойынша өзгереді. Бұрау бұрышын айқындаудың жалпы формуласынан келіп шығатыны, бұрау бұрыштарының эпюрасын құру кезінде эпюра ординаттары алдыңғы бұрыш деңгейінен кейінге қалдырылады, яғни алдыңғы учаскенің бұрау бұрышын ескере отырып, өсу қорытындысымен құрылады.

Мысал: Шоғырланған сәттермен жүктелген өзек үшін бұрау бұрыштарының эпюрасын құру:  $M_1=5M, M_2=4M$ , мұндағы  $M$  - жүктеме параметрі,  $I_{p2}/I_{p1} = 2$ .

1. Қима I-I ( $0 < z_1 < l$ ):  $M_z^{I-I} = \sum M_{zi}^{справа} = M_1 - M_2 = 5M - 4M = M. \quad \varphi_1 = \frac{M_z^{I-I} z_1}{GI_{p1}} \Big|_{z_1=0} = \frac{Ml}{GI_{p1}}.$

2. Қима II-II ( $0 < z_2 < l$ ):  $M_z^{II-II} = \sum M_{zi}^{справа} = -M_2 = -4M. \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_z^{II-II} z_2}{GI_{p2}} \Big|_{z_1=l} = \frac{Ml}{GI_{p1}} + \frac{(-4M)l}{2GI_{p1}} = -\frac{Ml}{GI_{p1}}.$

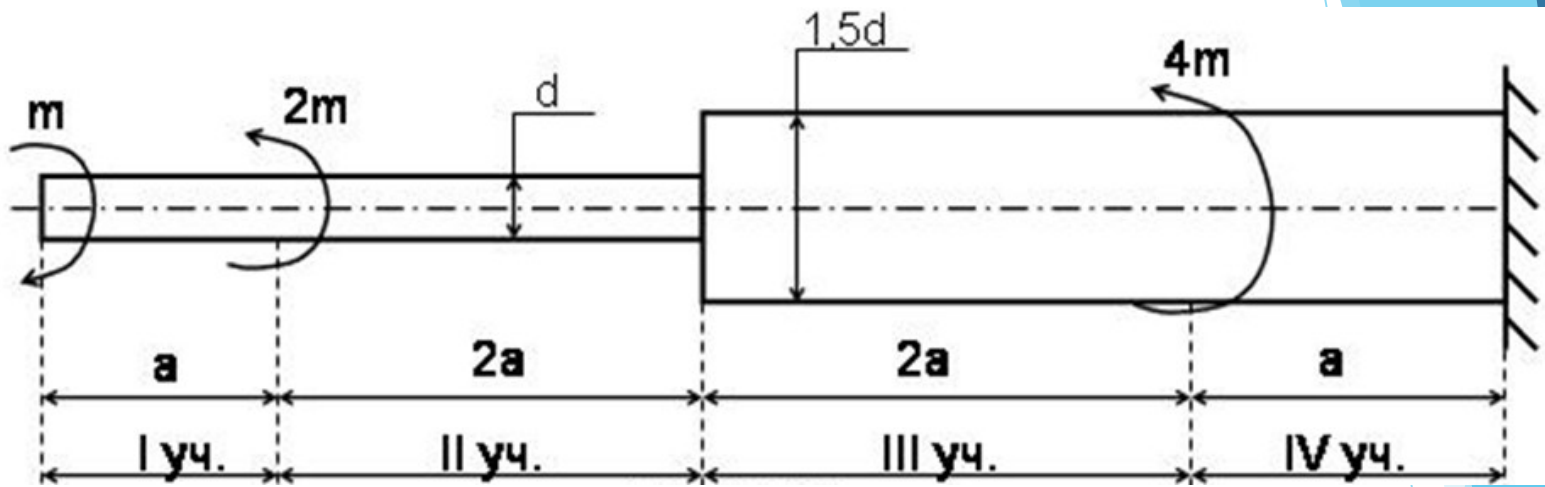


**Қаттылыққа есептеулер** - Машиналардың біліктері ауыспалы (динамикалық) жүктемелерді сынайды. Кішігірім біліктердің қаттылығы қалаусыз айналдыру тербелістері пайда болуы мүмкін. Сондықтан, беріктік шарттарынан басқа бұраудың ең жоғары бұрышының шамасын шектейтін қаттылық шарттары орындалуы тиіс, ұзындыққа жатқызылған (бұраудың қима бұрышы):

$$\theta_{\max} = \frac{M_z}{GI_p} \leq \theta_{\text{расч.}}$$

## 1-Мысал.

$M_k$  және  $\tau_{\max}$  эпюрін құру және беріктік жағдайынан  $d$  есептеу.



I участок:  $M_k^I = m,$

II участок:  $M_k^{II} = m - 2m = -m,$

III участок:  $M_k^{III} = M_k^{II} = -m,$

IV участок:  $M_k^{IV} = m - 2m - 4m = -5m.$

$\tau_{\max}$  учаскелер бойынша есептейміз:

I учаске:

$$\tau_{\max}^I = \frac{M_k^I}{W_p^I} = \frac{m}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = 5,09 \frac{m}{d^3}$$

II учаске:

$$\tau_{\max}^{II} = \frac{M_k^{II}}{W_p^{II}} = -\frac{m}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = -5,09 \frac{m}{d^3}$$

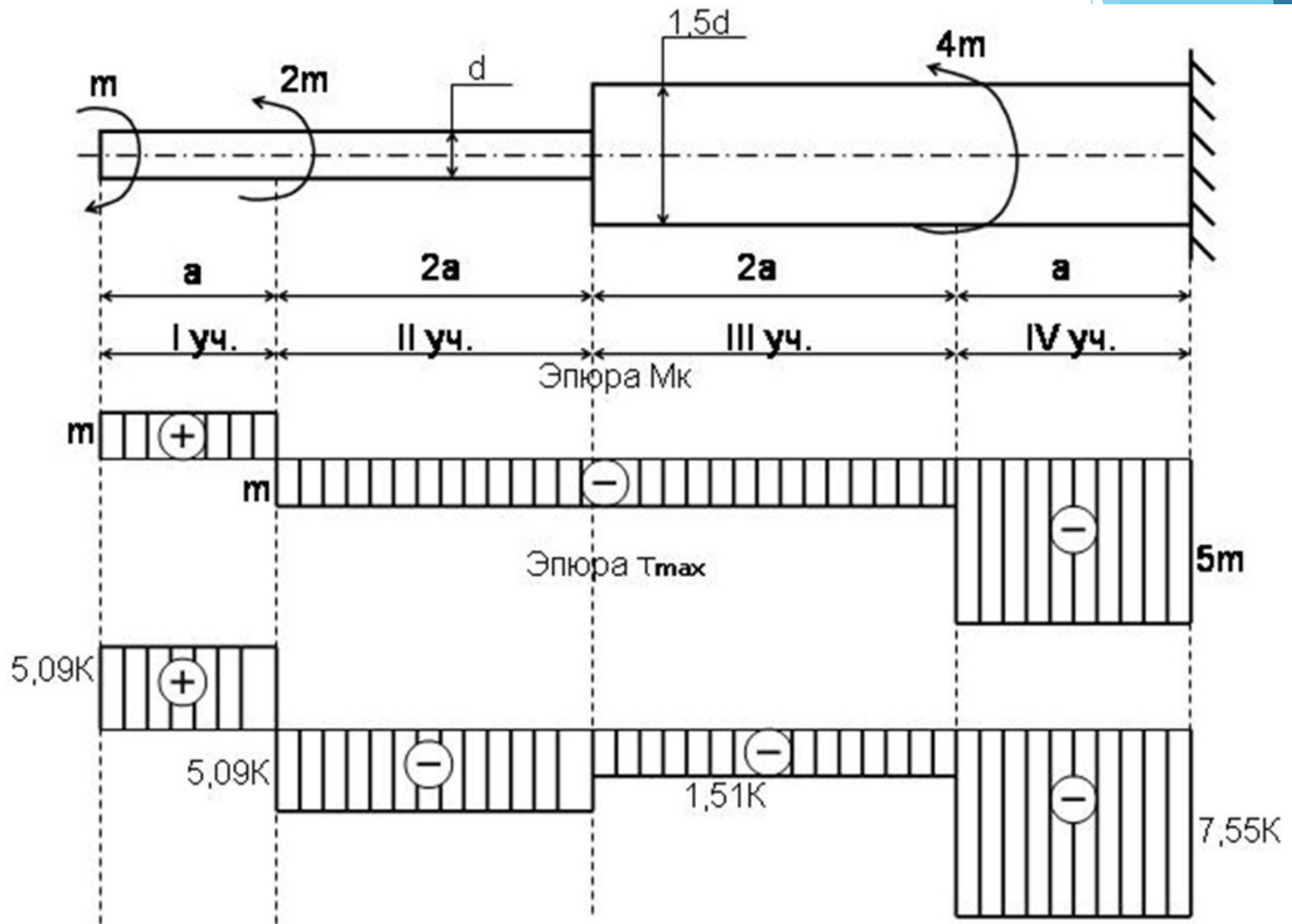
III учаске:

$$\tau_{\max}^{III} = \frac{M_k^{III}}{W_p^{III}} = -\frac{m}{\frac{\pi \cdot (1,5 \cdot d)^3}{16}} = -1,51 \frac{m}{d^3}$$

IV учаске:

$$\tau_{\max}^{IV} = \frac{M_k^{IV}}{W_p^{IV}} = -\frac{5m}{\frac{\pi \cdot (1,5 \cdot d)^3}{16}} = -7,55 \frac{m}{d^3}$$

Эпюраны белгілеп  $\frac{m}{d^3} = K$  салайық.



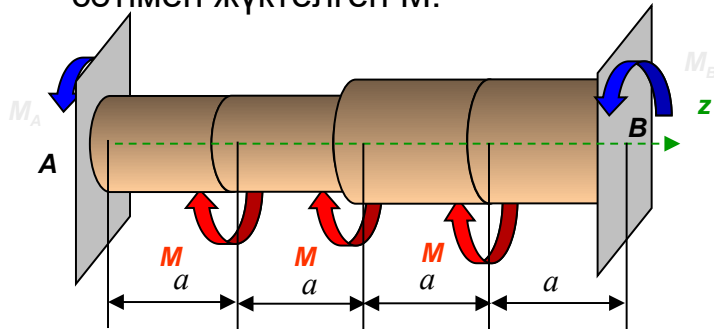
Өзектің диаметрін беріктік жағдайынан есептеп шығарамыз:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_k^{\max}|}{W_p} \leq [\tau_k]$$

Дөңгелек қима үшін:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{|M_k^{\max}|}{0,2 \cdot [\tau_k]}} = 1,71 \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{[\tau_k]}}$$

- **Бұралу кезінде статикалық белгісіз есептер** - деформацияның басқа түрлеріндегідей шешіледі, яғни міндеттің үш жағы (статика, геометрия және физика) дәйекті түрде ашылады. Ерекшелік тепе-теңдіктің басқа теңдеулері жасалатындығында, бұрыштық орын ауыстырулар (бұрау бұрыштары) салыстырылатындығында және бұрау кезіндегі деформациялар мен күштерді байланыстыратын серпімділіктің физикалық арақатынасы пайдаланылатындығында ғана.
- **Мысал.** Дөңгелек қималы біліктің диаметрінің сатылы өзгеруі ( $d = 0.707D$ ) және үш айналдыру сәтімен жүктелген  $M$ .



Айналмалы сәттердің эпюрасын жасайық:

$M_z$

Бұру бұрыштарының эпюрасын жасайық :

Бұл тапсырманы басқаша шешуге болады. статикалық айқындалатын жүйе, бұрау бұрыштарын табуға болатын күштердің тәуелсіздігі қағидатын пайдалана отырып берілген сәттерден және белгісіз тірек сәттен:

1. *Статика* - Қатты бітеулерді тастаймыз, оларды реактивті сәттермен алмастырамыз:

Білік осіне қатысты тепе-теңдіктің сәттік теңдеуін жасаймыз:

$$\sum M_{zi} = 0; \quad M_A - M - M - M + M_B = 0. \quad \text{немесе: } M_A - 3M + M_B = 0.$$

Бұл жүктеме мен реактивті сәттерді байланыстыратын жалғыз теңдеу. Барлық басқалар (координаттық осьтерге проекциялардың жиынтығы және x, y) осьтері ұқсастыққа айналады. Демек, міндет статикалық бір «артық» белгісіз.

2. *Геометрия* - Біліктің екі ұшында қозғалмайтын бітеулер болған кезде бұрыштар сол кез келген жүктеу кезінде әрбір учаскеде бұрау нөлге тең болуы тиіс – деформациялар үйлесімділігінің теңдеуі):

$$\sum \varphi_i = 0; \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0.$$

3. *Физика* - Әрбір учаскеде бұрыш бұрау айналдырумен байланысты қимадағы сәт (серпімділік қатынасы):

$$\varphi_1 = \frac{M_z^I l_1}{GI_{p1}} = \frac{M_A a}{G \pi (0,707D)^4} = \frac{32 \cdot 4 M_A a}{G \pi D^4};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_z^{II} l_2}{GI_{p2}} = \frac{(M_A - M)a}{G \pi (0,707D)^4} = \frac{32 \cdot 4 (M_A - M)a}{G \pi D^4};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_z^{III} l_2}{GI_{p3}} = \frac{(-M_B + M)a}{G \pi D^4} = \frac{32(-M_B + M)a}{G \pi D^4};$$

күмән бөлгіштерді жақшадан шығарып, қысқартамыз:

$$4M_A + 4(M_A - M) + (-M_B + M) - M_B = 0.$$

$$8M_A - 3M - 2M_B = 0.$$

$$\varphi_4 = \frac{M_z^{IV} l_4}{GI_{p4}} = \frac{(-M_B)a}{G \pi D^4} = \frac{32(-M_B)a}{G \pi D^4}.$$

Мысалы,  $M_B$  арқылы тепе-теңдік теңдеуінен  $M_A$  білдірейік және алынған теңдеуді:

$$8(3M - M_B) - 3M - 2M_B = 0. \quad \Rightarrow \quad M_B = 2.1M.$$

$$M_A = 0.9M.$$



**Үйлесімділік теңдеуі:**

$$\sum \varphi_i = 0; \quad \varphi_{M_1} + \varphi_{M_2} + \varphi_{M_3} + \varphi_{M_B} = 0.$$

Мұнда алғашқы үш қосылғыш В қимасы үшін есептелген бұрау бұрыштары, жеке-жеке берілген үш сәттің әрекетінен. Соңғы қосылым - бұрыш белгісіз тірек сәтінің әрекетінен бұрау  $M_B$ .

**Серпімділік қатынасы:**

Осы арақатынастарды кейбір қысқартуларды береді:

$$4M + 8M + 9M - 10M_B = 0,$$

бұдан аламыз:

$$M_B = 2.1M.$$

Бұдан әрі тепе-теңдік теңдігінен тұрады сол жақ тірек сәті және эпюра құрылады айналмалы сәттерді әдеттегі түрде немесе оны сол жақтан таппай салуға болады оң жақтан қозғалып, тірек сәті.

Бұру бұрыштарының эпюрін құру үшін әрбір учаске үшін есептеу керек болады көрсетілгендей салыстырмалы бұрыштар шешімге алдыңғы тәсіл кезінде.

$$\varphi_{M_1} = \frac{Ma}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} = \frac{32 \cdot 4Ma}{G\pi D^4};$$

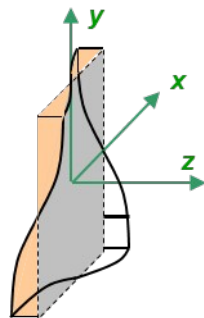
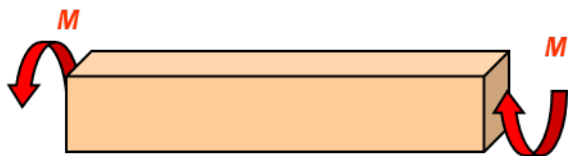
$$\varphi_{M_2} = \frac{M2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} = \frac{32 \cdot 8Ma}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_{M_3} = \frac{M2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} + \frac{Ma}{G \frac{\pi D^4}{32}} = \frac{32 \cdot 9Ma}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_{M_B} = - \left( \frac{M_B 2a}{G \frac{\pi(0,707D)^4}{32}} + \frac{M_B 2a}{G \frac{\pi D^4}{32}} \right) = - \frac{32 \cdot 10M_B a}{G\pi D^4}.$$

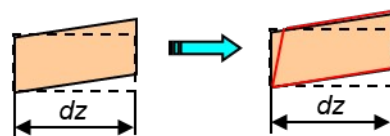
■ **Тік бұрышты қималы өзектерді айналдыру теориясының негізгі нәтижелері** - Дөңгелек қималы өзектерді айналдыру деформациясын қарау кезінде жалпақ қималар гипотезасы пайдаланылды. Тік бұрышты қиманың өзектерін айналдыру кезінде қиманың депланациясы пайда болады - **көлденең қиманың деформациясына дейін жазық нүктелер** осы жазықтықтан кейбір сызықтық емес заң бойынша қосымша қозғалады:

■ **Тік бұрышты қималы өзектерді айналдыру теориясының негізгі нәтижелері** - Дөңгелек қималы өзектерді айналдыру деформациясын қарау кезінде жалпақ қималар гипотезасы пайдаланылды. Тік бұрышты қиманың өзектерін айналдыру кезінде **қиманың депланациясы** пайда болады - **көлденең қиманың деформациясына дейін жазық нүктелер** осы жазықтықтан кейбір сызықтық емес заң бойынша қосымша қозғалады:  $w = w(x, y)$ .



$$w = w(x, y)$$

[1] суретінен таңдалған элементті жылжыту бұрышы біліктің үстіңгі беті тек құрауыштардың көлбеуі есебінен ғана бірақ көлденең қималарда жатқан жақтардың еңкіштігі есебінен:



Бұрыштық нүктелердегі тангенс кернеулерін есептеу кезінде алынған формула бойыншатік бұрышты қиманың бұрыштарында жазық қималар (дөңгелек қималар) гипотезасын қолдану максималды тангенс кернеулері алынуы керек ( $\rho = \rho_{\max}$ ), ал шын мәнінде бұл нүктелерде тік бұрыш түзу болып қалады және тангенс кернеулері нөлге тең болады.

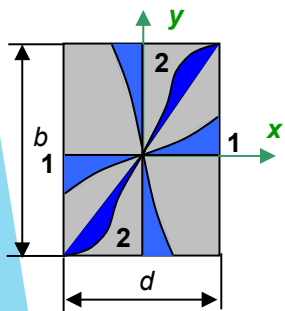
Осылайша, тегіс қималар гипотезасы қолданылмайды және тікбұрышты өзектің бұралу міндеті материалдардың кедергісінде қабылданған болжамдар шеңберінде шешілмейді. Мұндай мәселенің қатаң шешімі серпімділік теориясы курсына қарастырылады (кімде-кім сопроматтан бас тартпаса, оған серпімділік теориясын зерттеу қаупі төнбейді - ол да, мұғалім де жақсы). Біз шешімнің кейбір негізгі нәтижелерін серпімділік теориясының әдістерімен береміз тікбұрышты пішінді шыбықтардың бұралу есептері:

1. **Ең үлкен максималды кернеулер** тікбұрышты контурдың ұзын жақтарының ортаңғы нүктелерінде (1) пайда болады. Олар бұрын алынған формулаға ұқсас түрде ұсынылуы мүмкін:

Мұнда бұралу кезіндегі қарсылық моменті есептеледі тәуелді кестелік коэффициенттің көмегімен қабырғалардың ұзындығының арақатынасынан ( $b/d$ ):

2. Тікбұрышты контурдың қысқа жақтарының ортаңғы нүктелерінде (2) сәл кішірек пайда болады тангенс кернеулері. Олар максималды өрнек арқылы анықталады:

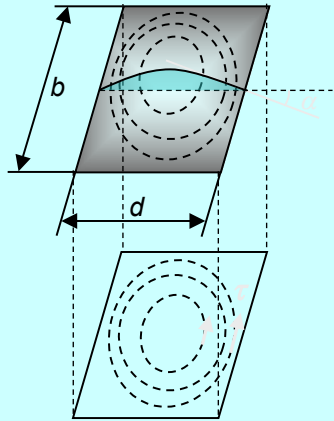
3. **Бұралу бұрышы өрнекпен анықталады:**



4. Көлденең қиманың бұрыштарында тангенс кернеулер нөлге тең.

b/d	1	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	$\infty$
$k_1$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	1/3
$k_2$	1	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,749
$k_3$	0,141	0,156	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	1/3

**Мембраналық ұқсастық** - сапалы суретті орнатуға мүмкіндік береді тангенс кернеулерінің таралуы. Серпімділік теориясында толық тангенс кернеуі көлденең қиманың контурына созылған, барлық бағытта біркелкі созылған және тұрақты бөлінген көлденең жүктемемен жүктелген идеалды икемді мембрананың бетіне жанама бұрыштың тангенсіне пропорционалды екендігі дәлелденді. Мұндай мембранадан кейбір идеяны сым контурына үрленген сабын пленкасы береді.



Көлденең жүктеме, мысалы, ауа қысымы (үрлеу) ауытқуды тудырадыбеттер. Көлденең жазықтықтармен беттің қималары сызықтар бередітең ауытқулар (көлденең), олардың арасындағы қашықтық керітангенс бұрышының тангенсіне және, демек, шамасына пропорционалтангенс кернеулері. Жанама кернеулер векторының бағытыкөлденең тангенстермен сәйкес келеді.

Мембраналық ұқсастықтың көмегімен позицияны сапалы болжауға боладымаксималды тангенс кернеулері пайда болатын нүктелер (қоюланужәне минималды (нөлдік). Суретте (техникалық себептерге байланысты) эллипстер бейнеленген, шын мәнінде контурға жақындаған кезде кейбір сопақшалар болуы керек. Дегенмен, тікбұрышты контурдың бұрыштарында жанама кернеулер нөлге айналуы керек екенін көруге болады.

## Ұсынылатын әдебиет

1. Арапов Б.Р., Сейтказенова К.К., Материалдар кедергісі . Учебное пособие. – Караганда: ТОО «Медет Групп», 2020. – 82 с.
2. Қ. Алдияров, Материалдар кедергісі. Оқу құралы, Фолиант 2018-156 с
4. Степин П.А. Сопротивление материалов - М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997.-320 с.
5. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И Руководство к решению задач по сопротивлению материалов - М.: Высшая школа, 1999. -592 с.
6. Миролубов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов -М: Высшая школа, 1985. -399 с.
7. Бондаренко А.Н. Электронный учебник по сопротивлению материалов. Москва. 2007 г.
8. Панков А.Д. Руководство по курсовому проектированию по сопротивлению материалов Расчет валов. г. Саров. 2008 г.
9. Панков А.Д. Вопросы для электронного тестирования по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2009 г.
10. Панков А.Д. Лабораторный практикум по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2010 г.
1. Шелюфаст В.В. Основы проектирования машин. Изд –во АПМ., 2007 г.



SATBAYEV  
UNIVERSITY

Назар аударғаныңыз үшін рахмет!

