SATBAYEV UNIVERSITY

MCH5022 Материалдар механикасы

Лектор: т.ғ.к., доцент Исаметова Мадина Есдаулетовна

10 Дәріс Деформацияланған жүйелер тепе-теңдігінің тұрақтылығы.

10 Дәріс
Деформацияланған жүйелер тепе-теңдігінің тұрақтылығы.

Дене тепе-теңдігінің нысандары

Орнықтылықты анықтау және орнықтылықты жоғалту

Қаупты күш

Бойлық майысу

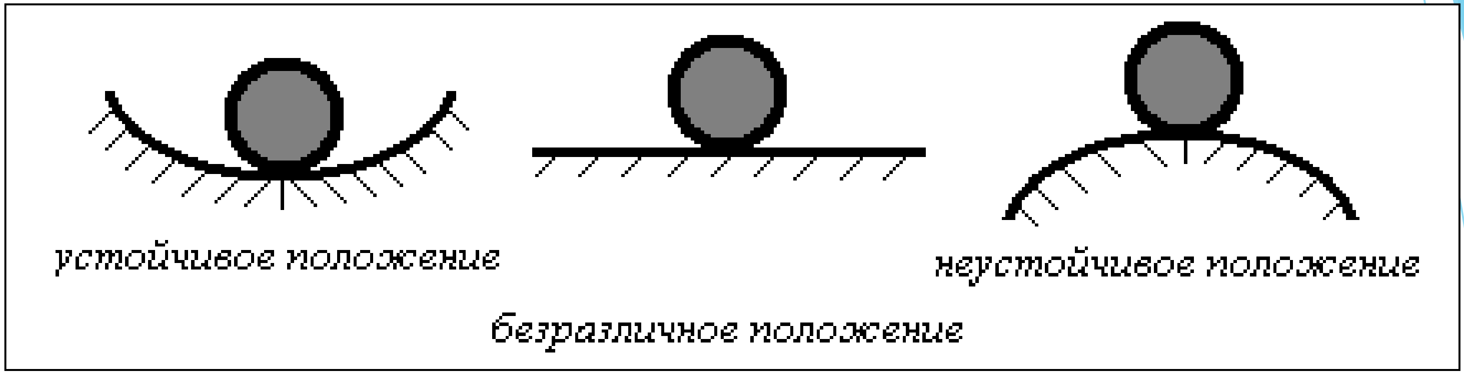
Келтіру коэффициенттері

Сыни кернеу. Өзектің икемділігі

Эйлер формуласының қолданылу шегі

Дене тепе-теңдігінің нысандары

Тепе-теңдік нысандарын жер бетіндегі шар мысалында қарастырамыз. Үстіңгі бетінің нысанына байланысты шар тұрақты, немқұрайлы және тұрақсыз жағдайда болуы мүмкін.



Шариктің орнықты жағдайы оның тепе-теңдік жағдайынан кез келген ауытқуы кезінде ол осы жағдайға қайта оралуымен сипатталады.
Бей-жай қалу – шариктің жазықтықтағы кез келген жағдайы тұрақты болып табылады.
Тұрақсыз жай-күй: шар шығыңқы бетте орналасқан кезде шариктің үстіңгі жағындағы кез келген аз ауытқу оның үлкен қозғалысына әкеледі және ол бастапқы қалпына орала алмайды.

Орнықтылық және орнықтылықты жоғалту

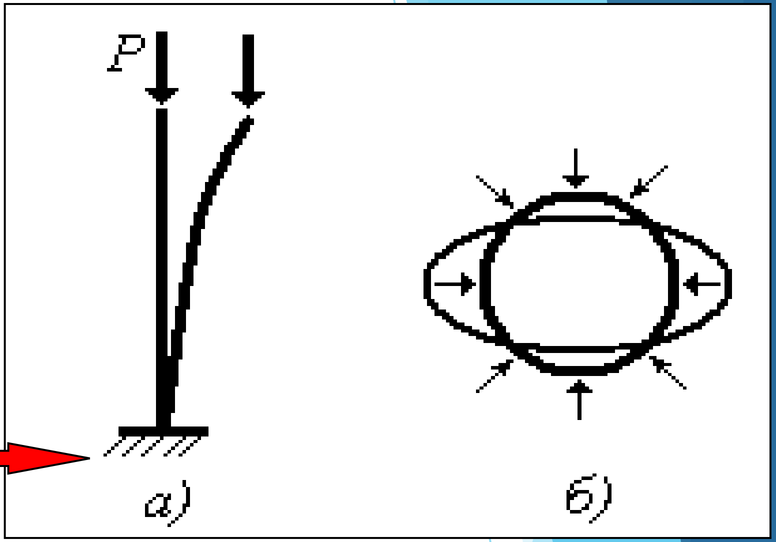
Материалдардың механикасы өзектерді беріктікке, қаттылыққа және орнықтылыққа есептеудің инженерлік әдістері зерделенеді.
Алғашқы екі міндет бұрын қаралды
(созу-қысу, ию, айналдыру кезінде, жүктеудің күрделі түрлері кезінде беріктікке есептеулер).

Орнықтылық - сыртқы әсерлер кезінде серпінді жүйенің өзінің жай-күйін (мысалы, серпімді тепе-теңдіктің бастапқы нысаны) сақтау қасиеті.

Тұрақсыз жүйенің жаңа жай-күйге өтуі - орнықтылықтың жоғалуы.

Тұрақтылықты жоғалту нәтижесінде әртүрлі салдарлар болуы мүмкін:

а) жүйенің тепе-теңдіктің кейбір жаңа жағдайына көшуі, бұл үлкен орын ауыстыруларымен, пластикалық деформациялардың пайда болуымен және бұзылумен қатар жүреді. Мысалдар: орталықтан қысылатын өзек (а-сурет), жан-жақты қысылатын жұқа қабырғалы құбыр (б-сурет);

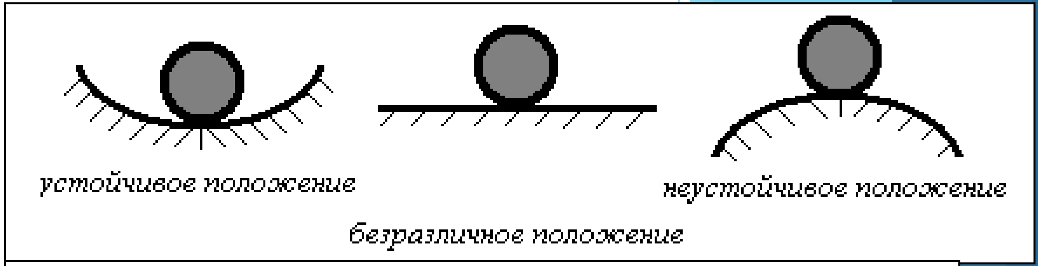


б) конструкция орнықтылығын жоғалтқаннан кейін өзінің негізгі функцияларын орындауды жалғастырады, мысалы ұшақты қаптау немесе орнықтылығын ферманың өзектерінің бірімен жоғалту;

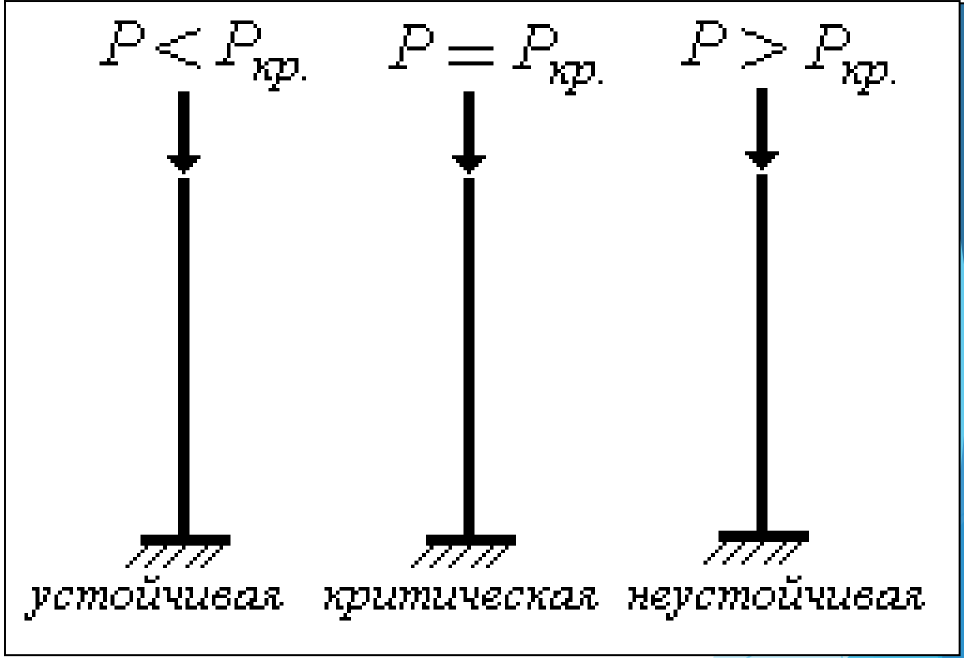
в) жүйе тұрақты тепе-теңдікке ие емес және сөнбейтін тербеліс режиміне өтеді.

Орнықтылықтың жоғалуы көбінесе жеңіл, жұқа қабырғалы конструкцияларда байқалады. Мұндай конструкциялардың орнықтылық қорын арттыру үшін оның элементтерінің көлденең қималарының қаттылығын ұлғайту қажет.

Орнықтылық факторы маңызды болып табылатын конструкция элементінің қарапайым мысалы **орталықтан қысылатын өзек** болып табылады.



Үстіңгі бетіндегі шарға ұқсас, қысу күшінің әсерінен стержень серпімді тепе-теңдік жағдайынан ауытқуы мүмкін.

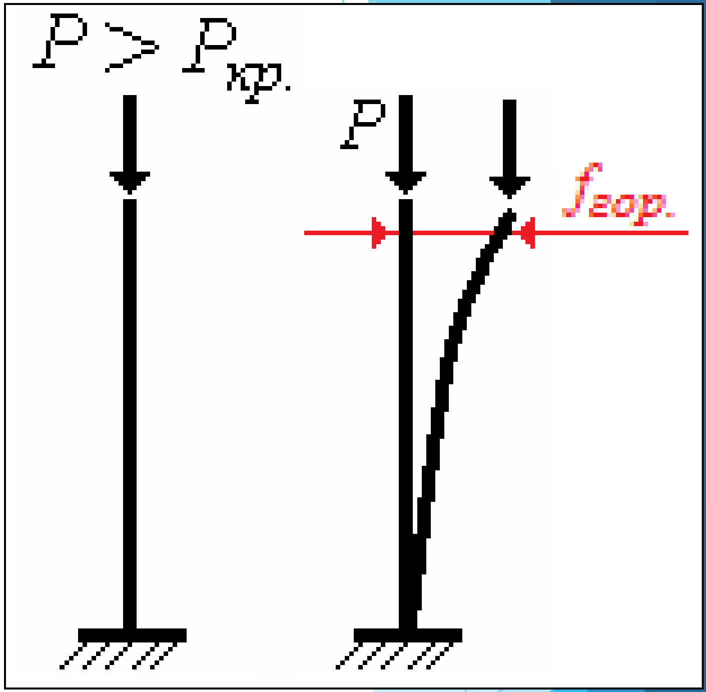


Бұл ретте өзек үш жағдайдың бірінде болуы мүмкін - тұрақты, немқұрайлы (сыни деп аталатын) және тұрақсыз, бұл қысу күшінің шамасына байланысты.

Сыни күш

Серпімді жүйенің, атап айтқанда өзектердің орнықтылығын талдау кезінде тепе-теңдіктің орнықты жағдайы тұрақсыз болатын сыртқы күштердің мәндері анықталады.

Қысу күші белгілі бір (сыни) мәнге жеткен кезде оның шамалы ұлғаюы көлденең қималардың көлденең жылжуының едәуір өсуіне, яғни орнықтылықтың жоғалуына әкеледі.



ОРНЫҚТЫЛЫҚТЫ ЖОҒАЛТУ - сығу күшінің шамалы ұлғаюы кезінде орын ауыстырудың (иілудің) шектеусіз өсуі.

СЫНИ КҮШ - өзек орнықтылығын жоғалтатын ең аз күш.

Бұл ретте өзек міндетті түрде ең аз қаттылық жазықтығында иіледі. Мұны кәдімгі сызғыштың мысалында көрсету оңай: сығу күшіне қатысты оның көлденең қимасын қалай айналдырсақ та, сызғыш әрқашан тікбұрыштың үлкен жағына параллель оське қатысты иіледі.

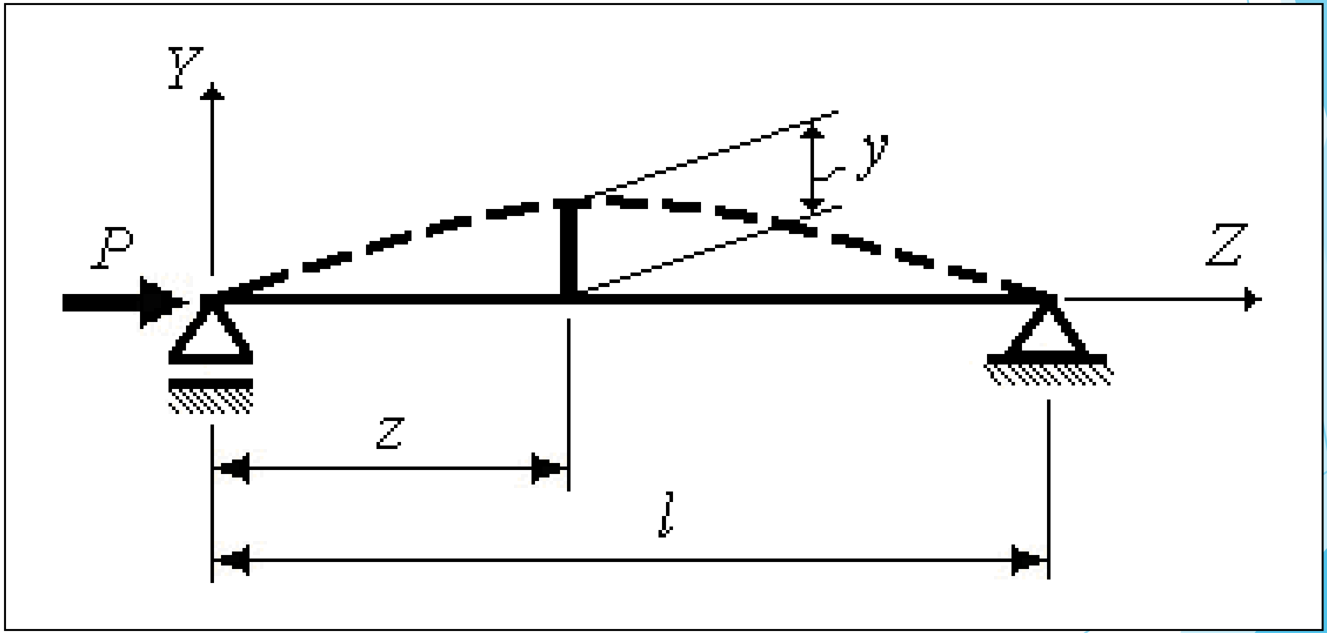
Демек, есептеулерде минимумның осіне қатысты инерцияның остік сәтін анықтаймыз – I_{min}.

Осыдан маңызды қорытынды шығаруға болады: ***өзек қимасының пішіні мен өлшемдерін таңдау кезінде мүмкіндігінше қима инерциясының екі сәті де шамасы бойынша тең болуына ұмтылу қажет.***

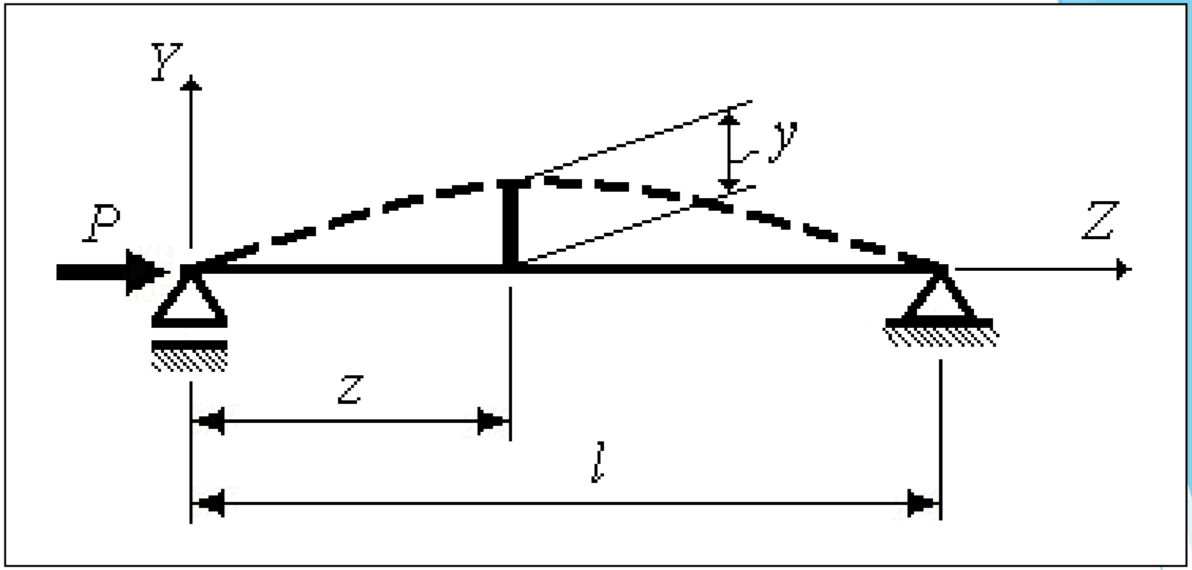
Бойлық майысу

Серпінді сатыдағы сығылған өзектердің тұрақтылығы. Эйлер формуласы

Орталық сығылған өзектің серпімді тепе-теңдігі туралы міндетті алғаш рет Ресей ғылым академиясының академигі Леонард Эйлер шешті. Ол Р орталық күштері қысатын өзектің тепе-теңдігін қарастырды.



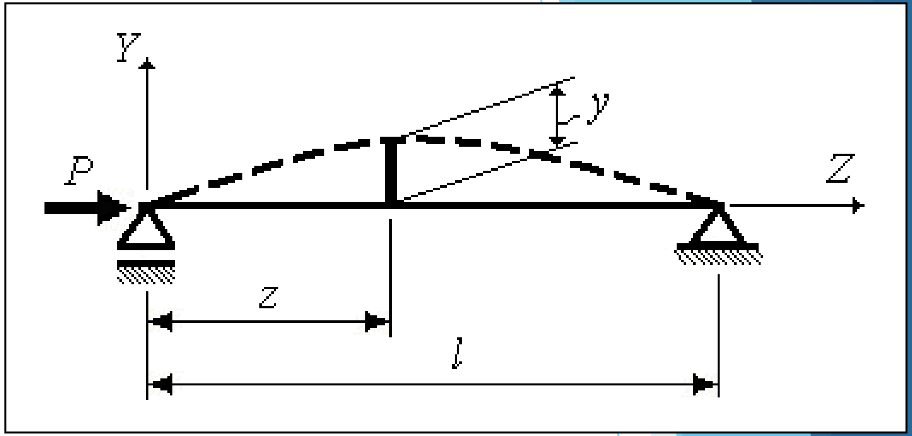
Шағын майысу кезінде иілген білікпен өзектің тепе-теңдігі мүмкін болатын жағдайларды анықтаймыз.



Белгілі бір шаманың қысу күшінің әсерінен өзек майысады және оның көлденең қималарында майысу сәті М = Р у пайда болады.
Егер иілу сәтінің әсерінен өзектің қисығы кішірейсе (өзек түзеледі), онда сәттің белгісі - **плюс**.
Бұл жағдайда өзектің қисықтығы қысу күшінің әсерінен **ұлғаяды**, сондықтан мынаны жазамыз: $M = -P\,y$.

Иілу теориясынан серпінді сызықтың жақындатылған **дифференциалды теңдеуі белгілі**:

$$EIy'' = M = -P\ y$$



Белгілесек

$$\frac{P}{EI_{\min}} = k^2$$

Екінші реттегі дифференциалды теңдеуді аламыз

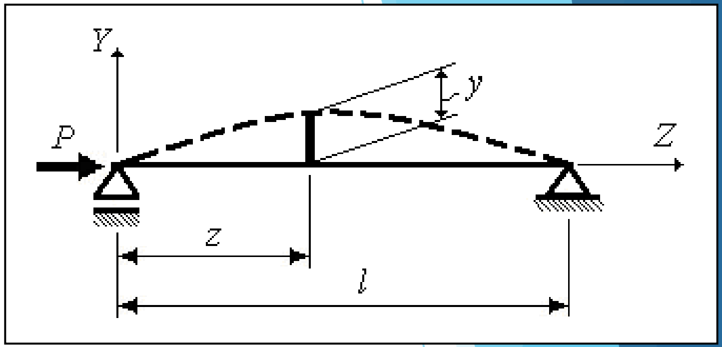
$$y'' + k^2 y = 0.$$

Осы теңдеудің шешімі мынадай түрде болады:

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$$

Шекті жағдайлардан (тіректерде):

$z = 0$: кезінде: сол жақтағы тіректе майысу $y = 0$. Демек, $C_2 = 0$;



$z = \ell$: Оң жақ тіректегі майысу $y = 0$.

Демек $$C_1 \sin k\ell = 0.$$

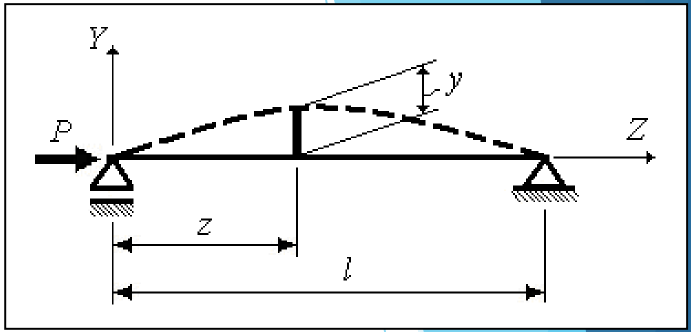
Егер $C_1 = 0$ болса, өзек бүгілмейді. Сондықтан $C_1 \neq 0$ және $\sin k\ell = 0$ қабылдау қалады. Қайдан алынады $k\ell = \pi n$, мұндағы n – қарапайым сандар қатары: $1, 2, 3, \ldots$

Күш мәні ең аз болғанда өзек орнықтылығын жоғалтады, яғни $n=1$ қабылдаймыз.

Яғни $$k = \frac{\pi}{l}$$

Сыни күшін анықтау формуласын аламыз

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2}$$ (14.1)

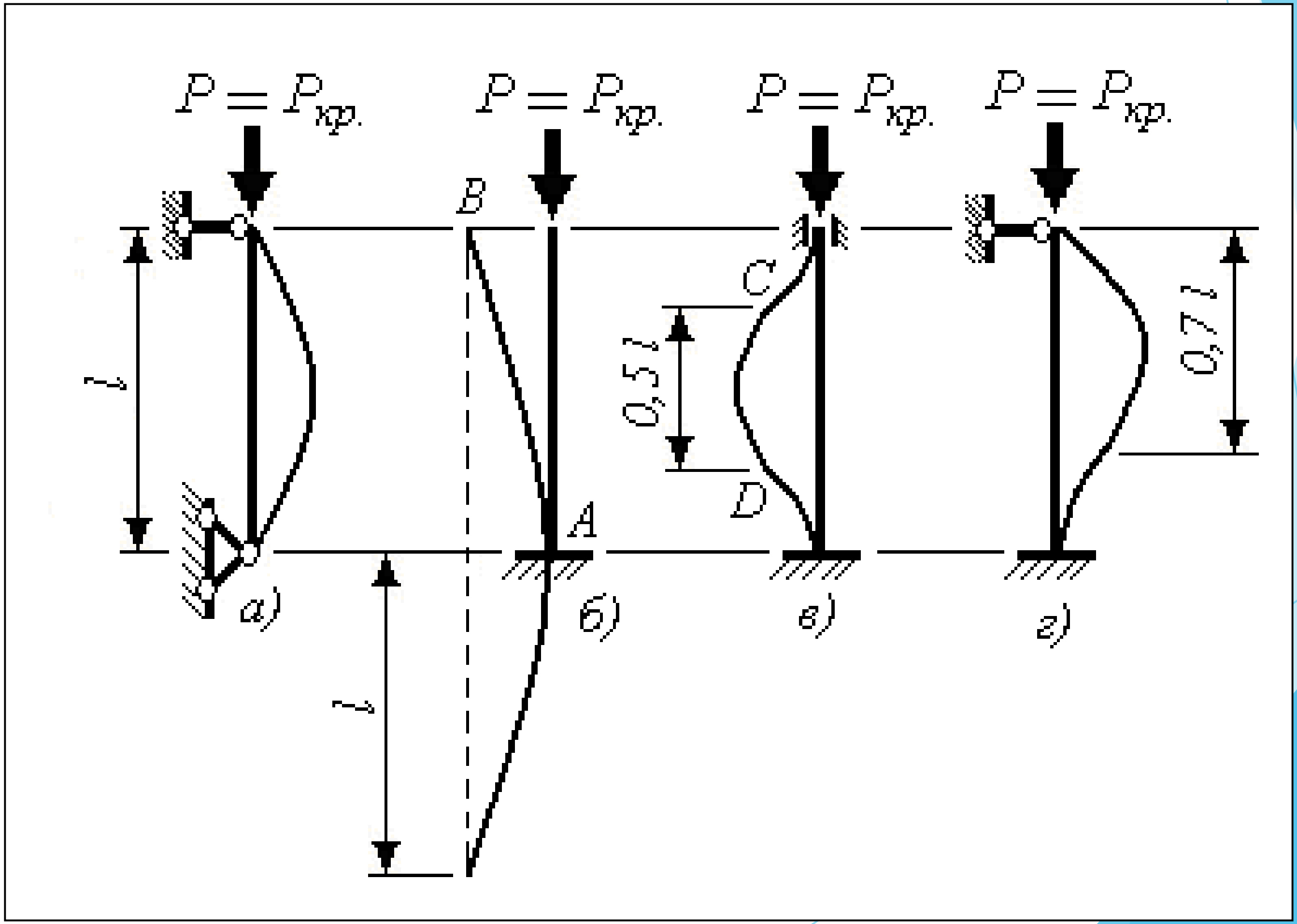


Тірек бекітпелері түрінің сыни күшінің шамасына әсері

Эйлер формуласы (14.1) өзектің ұштарын бекітудің белгілі бір тәсілі кезінде өзектің иілген білігінің (серпімді сызығының) жақындатылған сараланған теңдеуін біріктіру жолымен алынған - өзектің ұштары топсалы тіректерге сүйенген. Өзектің ұштарын бекітудің мұндай жағдайы негізгі деп аталады.

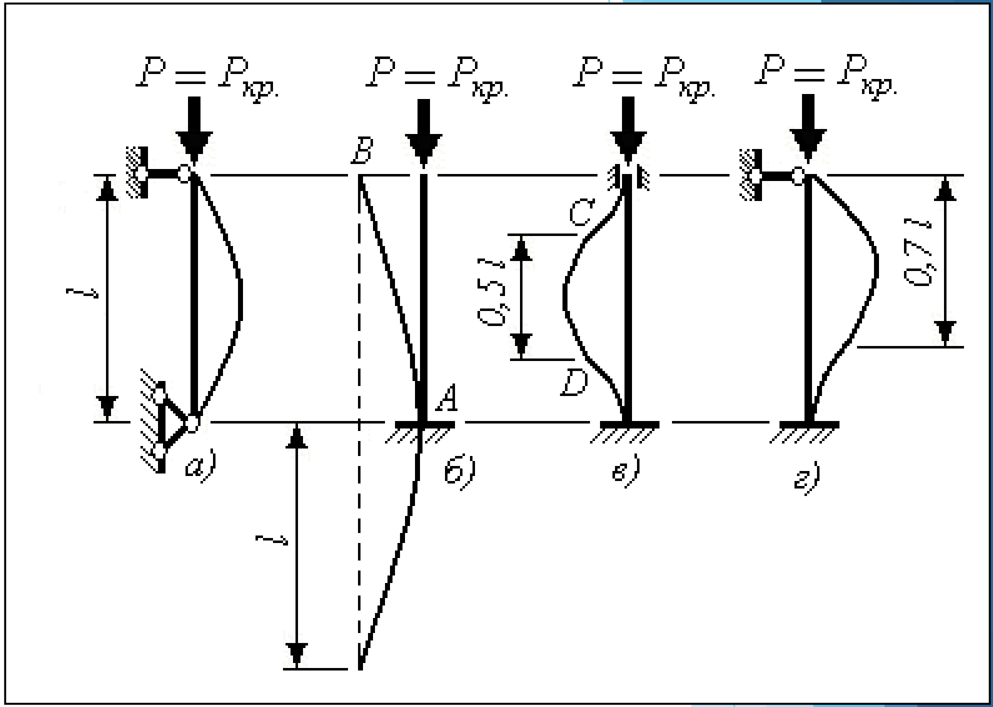
***$P_{кр.}$* үшін табылған өрнек. бекітудің осы жағдайы үшін ғана әділ және өзектің шеттерін бекіту шарттары өзгерген кезде өзгеретін болады.**

Егер бекітудің басқа жағдайлары үшін пікірдің барлық барысын қайталасақ, басқа түрдегі формулаларды алуға болады. Қарапайым пайымдау жолымен негізгі тәсілмен салыстырғанда өзек ұштарын бекітудің ерекшеліктері ескерілетін формулаларды алуға болатынын көрсетейік (а-сурет).



Өзектің бір ұшы қатты бекітілген, ал екіншісі бос (б-сурет).

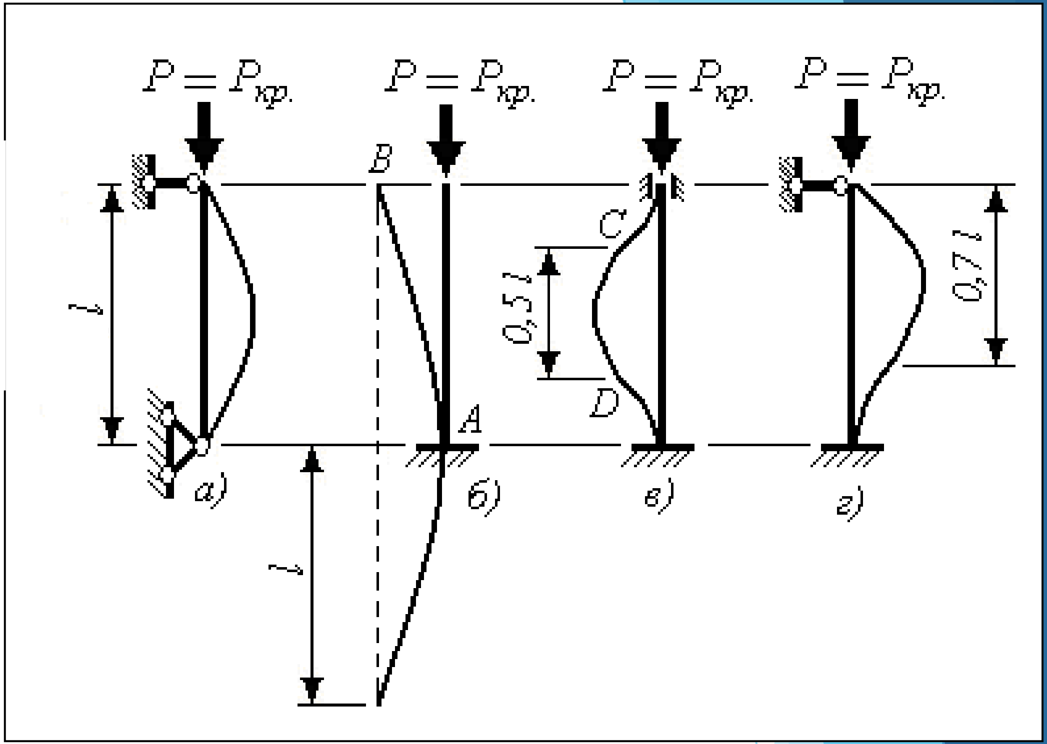
Р күші сыни күштің мәніне жеткен кезде өзек орнықтылығын жоғалтады және АВ доғасы бойынша иіледі. Егер өзекті бекіту үшін ұзындыққа ұзартсақ ℓ, біз екінші жарты толқынды аламыз.



Осылайша, өзектің екі ұзындығында негізгі бекіту жағдайындағыдай синусоиданы аламыз. Бұл жағдай үшін сыни күш негізгі жағдай үшін сыни күшке тең болады 2ℓ.

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(2l)^2}$$

Өзектің екі ұшы да қатты бекітілген жағдайды қарайық (сурет в).

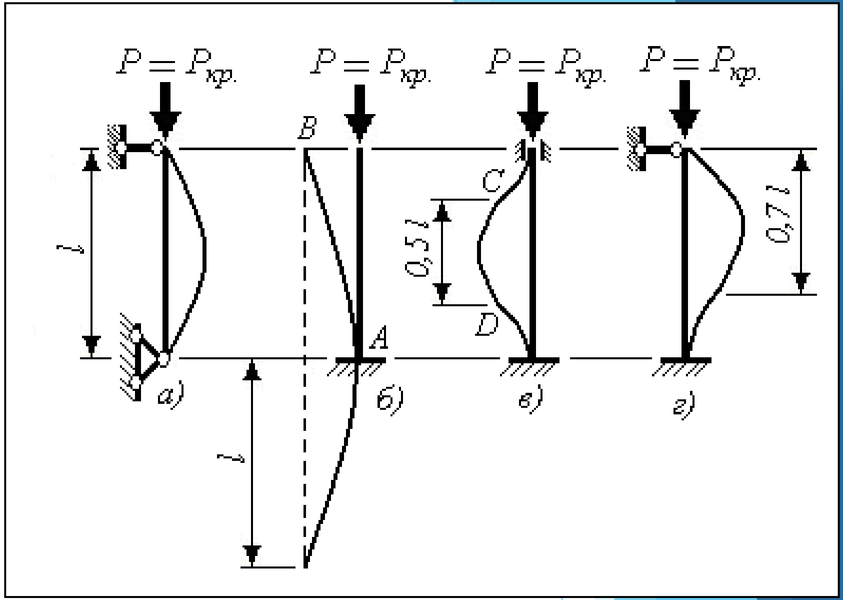


С және D нүктелерінде қисық сызықтың өзгеретінін көреміз, яғни осы нүктелердегі иілу сәті нөлге тең болады (шартты түрде айтқанда осы нүктелерде - топсалар). С және D нүктелерінің арасындағы өзек негізгі жағдай сияқты - синусоид бойынша, яғни өзектің ұзындығы $\ell/2$ болғанда иіледі.

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(0,5\,l)^2}$$

Бір бітеу және бір топсалы жылжымалы тіректі схемаға ұқсас (сурет).

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(0,7l)^2}$$



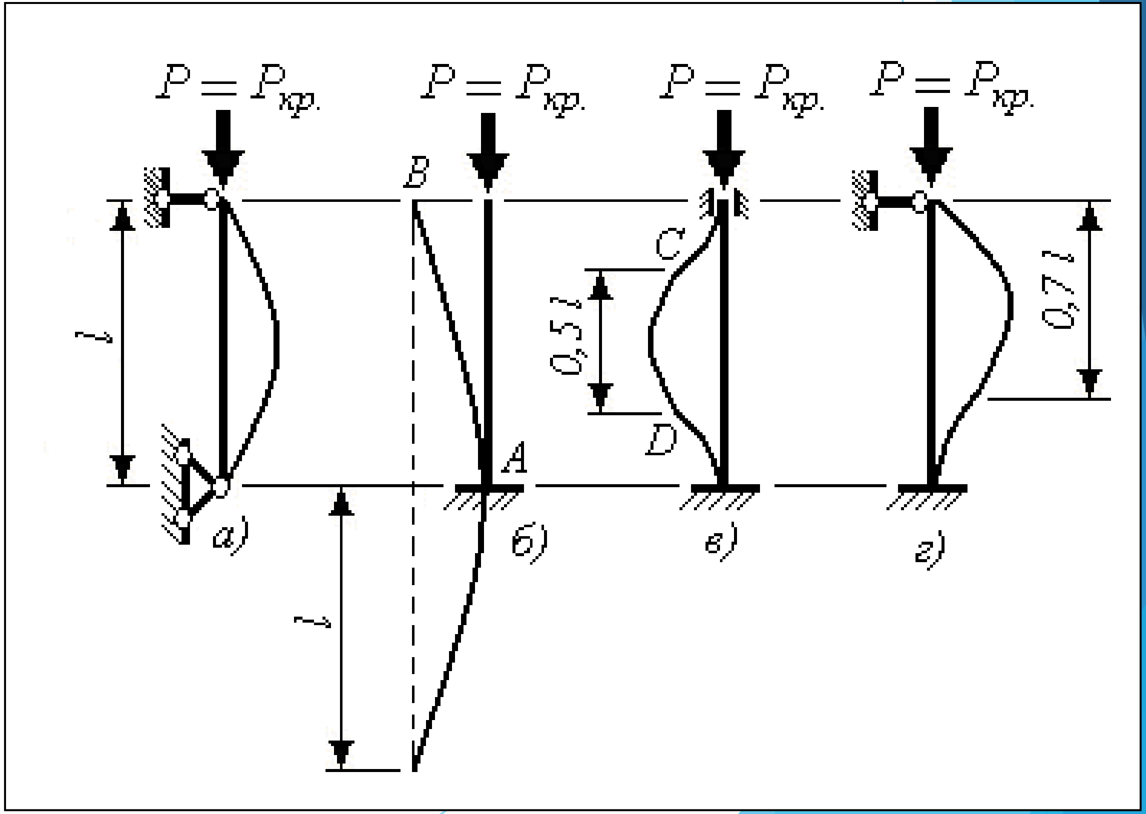
Барлық алынған формулаларды 1 сандарын ауыстырып, біреуіне біріктіруге болады; 2; 0,5; 0,7 және т.б. - ұштарын бекіту түріне сәйкес келетін, μ – **ұзындығын келтіру коэффициенті.**

Алынған формула **ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСЫ** деп аталады

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (14.2)$$

Туындының келтірілген ұзындығы бар $\mu\ell$. Осылайша, егер формулаға бекітудің тиісті схемасына μ коэффициенті енгізілсе, шекті күш үшін Эйлер формуласы ұштарды бекітудің кез келген жағдайы үшін қолданылуы мүмкін.

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}$$



Сыни кернеу. Өзектің икемділігі

Эйлер формуласын орнықтылықты жоғалту сәтіне дейін өзек орталық салынған сығу күшінің әрекетін қабылдайтынын, яғни орталық сығу кезінде жұмыс істейтінін ескере отырып өзгертеміз.

Демек $$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Сыни кернеу $$\sigma_{кр.} = \frac{P_{кр.}}{F}.$$

Сонда $$\sigma_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$ (12.3)

λ – өзектің икемділігі: $$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}};$$ (12.4)

минималды инерция радиусының шаршы: $$i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{F}.$$

Шекті икемділік

Эйлер формуласы арқалықтың серпімді сызығының дифференциалды теңдеуін қарау негізінде шығарылған, яғни жоғарыда келтірілген пайымдаулар өзек материалының пропорционалдық шегінің мәнінен аспайтын кернеуге дейін ғана әділ болады.

Демек, Эйлер формуласы мынадай шарттар сақталған кезде әділ (қолданылады):

$$\sigma_{кр.} \leq \sigma_{пц} \quad (14.5)$$

Сыни кернеулердің мәнін теңсіздікке қоямыз (14.3):

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц} \quad (14.6)$$

Осы теңсіздіктен λ икемділігін білдірейік, оның $\lambda_{пред.}$:

Өзек материалының шекті икемділігі

$$\lambda_{пред.} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц.}}} \quad (14.7)$$

Эйлер формуласының қолданылу шегі

Алдыңғы пайымдауларды ескере отырып, Эйлер формуласы мынадай жағдайларда қолданылады:

$$\lambda \geq \lambda_{пред.} \qquad (14.8)$$

Бұл ЭЙЛЕР ФОРМУЛАСЫНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Кең таралған материалдар үшін шекті икемділік:

Болат Ст.3 ($\sigma_{пц}=200МПа$, $E=2\cdot10^5МПа$, $\pi^2\approx10$):

$$\lambda_{пред.} = \sqrt{\frac{10\times2\times10^5}{200}} = 100.$$

Шойын: $\lambda_{пред}=80$;

ағаш: $\lambda_{пред}=110$;

болат Ст.5: $\lambda_{пред}=85$.

Теңсіздік орындалатын өзектер (14.8) икемділігі жоғары өзектер деп аталады.

Әдетте бұл жіңішке және ұзын өзектер.

(14.6) формуласында өзек материалының пропорционалдық шегін шекті кернеуге ауыстырып, оны теңдік түрінде жазамыз:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}$$

$$\sigma_{кр.} \lambda^2 = \pi^2 E.$$

Икемділік квадратына критикалық кернеудің көбейтіндісі тұрақты шама, ал тәуелділік графигі гипербола түрінде болады.

Ұсынылатын әдебиет

1.Арапов Б.Р., Сейтказенова К.К, Материалдар кедергісі . Учебное пособие. – Караганда: ТОО «Медет Групп», 2020. – 82 с.
2. Қ. Алдияров, Материалдар кедергісі. Оқу құралы, Фолиант 2018- 156 с
4. Степин П.А. Сопротивление материалов - М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997.-320 с.
5. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И Руководство к решению задач по сопротивлению материалов - М.: Высшая школа, 1999. -592 с.
6. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов -М: Высшая школа, 1985. -399 с.
7. Бондаренко А.Н. Электронный учебник по сопротивлению материалов. Москва. 2007 г.
8. Панков А.Д. Руководство по курсовому проектированию по сопротивлению материалов Расчет валов. г. Саров. 2008 г.
9. Панков А.Д. Вопросы для электронного тестирования по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2009 г.
10. Панков А.Д. Лабораторный практикум по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2010 г.
1. Шелофаст В.В. Основы проектирования машин. Изд –во АПМ., 2007 г.