

Курс лекций по дисциплине «Начертательная геометрия»



лектор

Каражанова Дарига Дюсеновна

Кандидат педагогических наук

ассоциированный профессор Satbayev University



Лекция 12

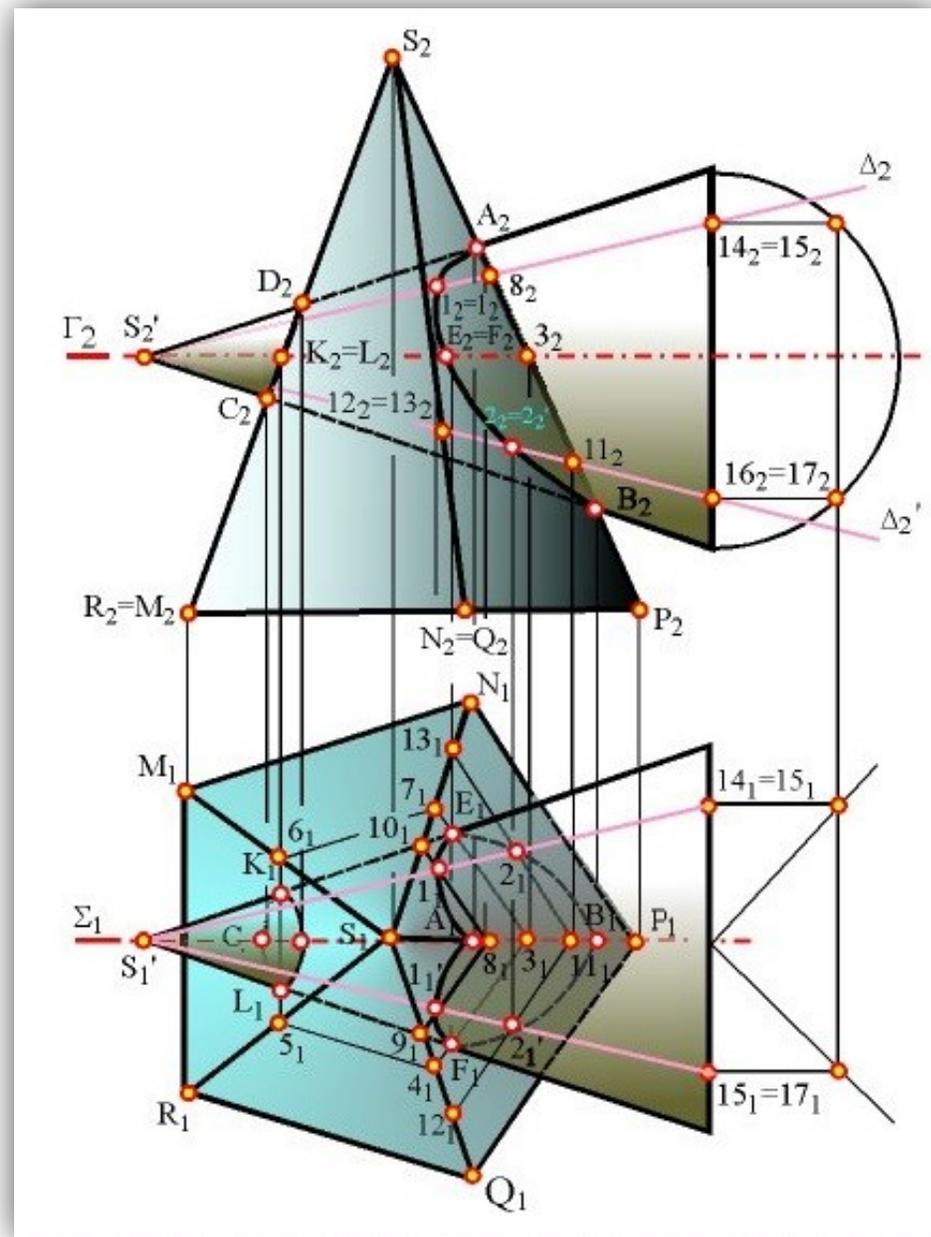
Взаимное пересечение поверхностей

К.п.н., ассоциированный профессор

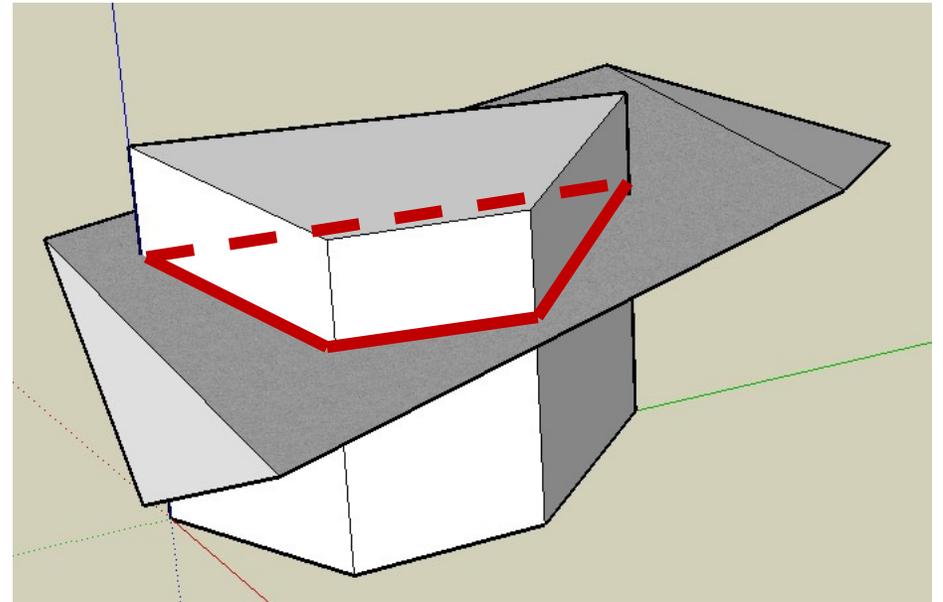
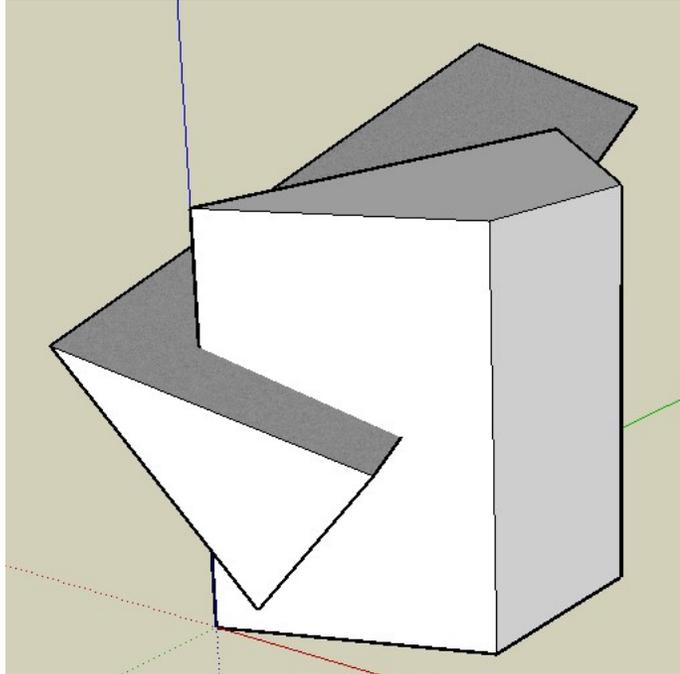
Каражанова Дарига Дюсеновна

Линия пересечения двух поверхностей

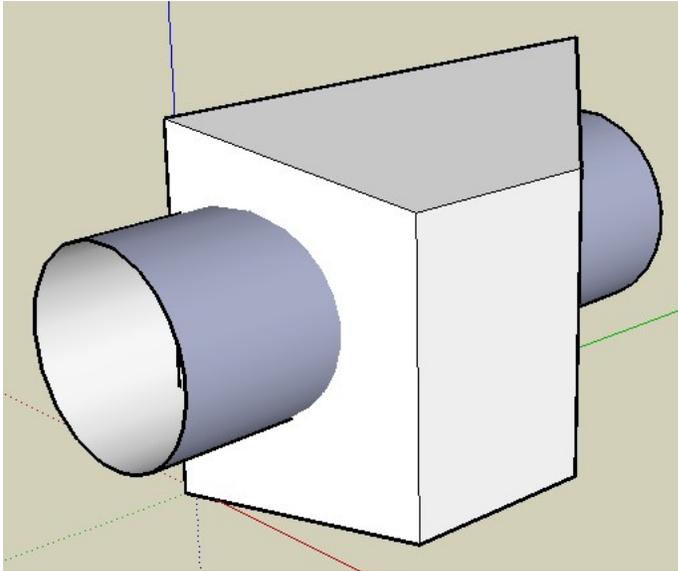
– это геометрическое
место точек,
принадлежащих
одновременно обеим
поверхностям.



Характер линии пересечения зависит от вида поверхностей

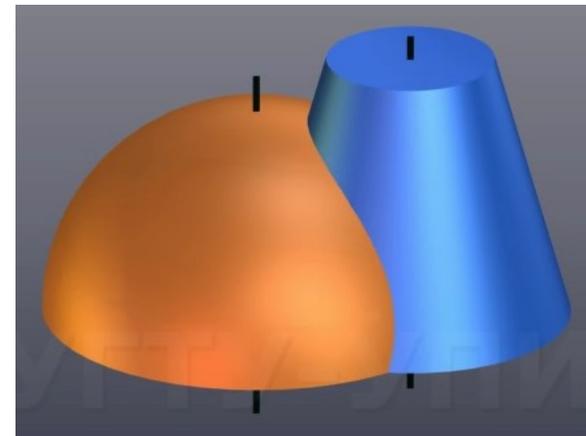


- Линия пересечения многогранников
ломаная линия



Линия пересечения
многогранника и
поверхности вращения -
сочетание плоских кривых
линий (парабола,
гипербола, эллипс и т.д.)

Линия пересечения двух
поверхностей второго
порядка -
пространственная
кривая



Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$, где коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{00}$ – действительные числа, причем $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ не равны нулю одновременно.

В теории поверхностей второго порядка классифицируют и изучают различные виды поверхностей. Методом их изучения является так называемый *метод сечения*: исследуются сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным или самими координатными плоскостями, и по виду сечений делается вывод о форме поверхности.

Существует семнадцать видов поверхностей второго порядка. Идея классификации поверхностей основана на приведении их уравнений к *каноническому* виду в результате преобразования системы координат в каноническую.

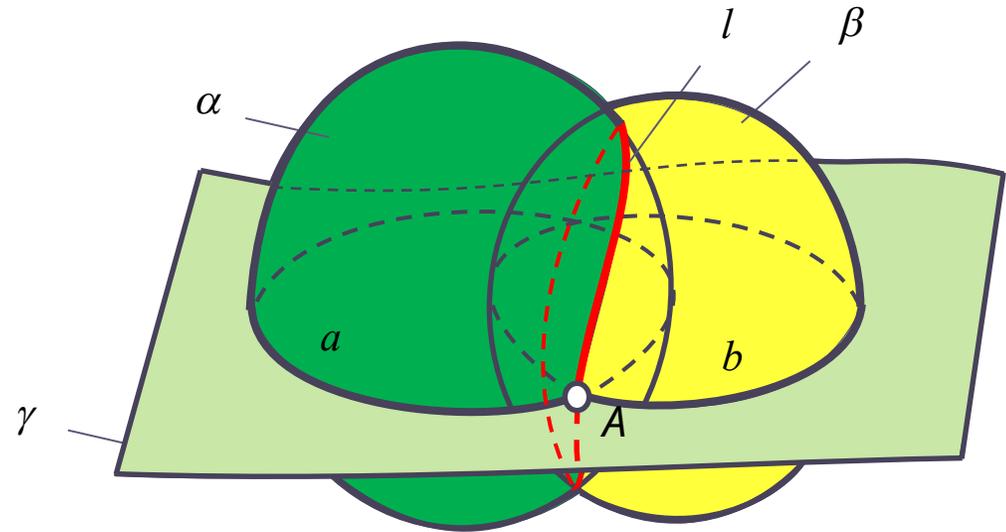
Поверхности второго порядка

№	Вид поверхности второго порядка	Уравнение
1	Эллипсоид	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$
2	Мнимый эллипсоид	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$
3	Однополостный гиперboloид	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$
4	Двуполостный гиперboloид	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$
5	Эллиптический параболоид	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 2Z$
6	Гиперболический параболоид	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2Z$
7	Конус	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$
8	Мнимый конус	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0$
9	Эллиптический цилиндр	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
10	Гиперболический цилиндр	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$
11	Параболический цилиндр	$Y^2 = 2pX$

12	Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$
13	Пара мнимых пересекающихся плоскостей	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$
14	Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$
15	Пара параллельных плоскостей	$X^2 - a^2 = 0$
16	Пара мнимых параллельных плоскостей	$X^2 + a^2 = 0$
17	Пара совпавших плоскостей	$X^2 = 0$

•Для построения линии пересечения чаще всего используется способ вспомогательных поверхностей. Алгоритм решения задачи способом вспомогательных поверхностей может быть описан в общем виде следующим образом. Линией пересечения может быть прямая, плоская и пространственная кривая или любое сочетание из этих линий.

•Построим одну из точек линии пересечения поверхностей α и β . Для этого проведем поверхность γ , которая пересекается с поверхностью α по кривой a , а с β - по кривой b . Точка A пересечения кривых a и b принадлежит обеим заданным поверхностям, следовательно, и линии их пересечения l . Аналогично, может быть найдено любое число точек линии пересечения.



Чтобы построить линию пересечения двух поверхностей, следует рассечь их рядом вспомогательных поверхностей, построив линии пересечения поверхностей данных и вспомогательных, нужно отметить общие для них точки, эти точки должны быть последовательно соединены между собой.

Точки линии пересечения двух поверхностей делятся на *опорные* и *промежуточные*.

К опорным точкам относятся:

1. самая близкая и самая удаленная точка линии пересечения относительно той или иной плоскости проекций;
2. точки видимости, имеющие проекции на линии очертания;
3. точки наибольшей ширины линии пересечения и т.д.

Построение линии пересечения поверхностей следует начинать с определения ее опорных точек.

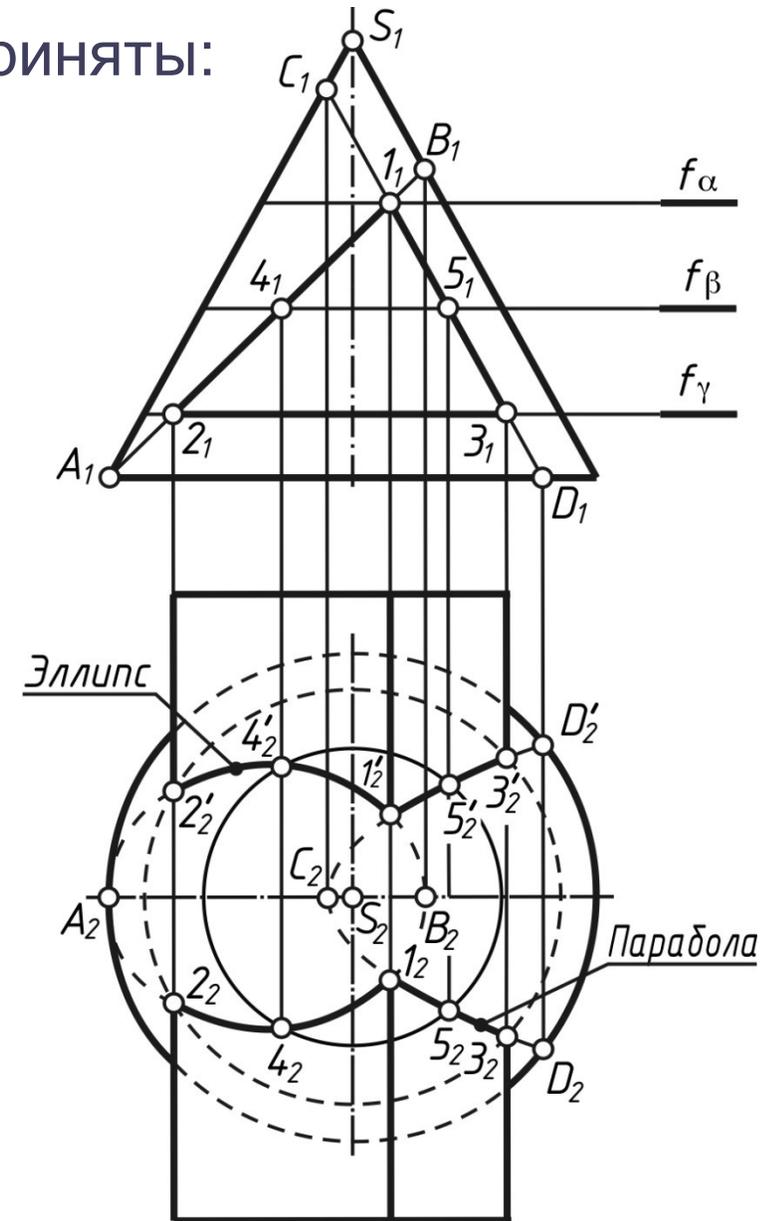
В качестве вспомогательных поверхностей чаще всего следует брать плоскости, либо сферы. Поэтому, из общего способа выделяют два, которые называются *способом вспомогательных плоскостей* и *способом сфер*.

Способ вспомогательных плоскостей.

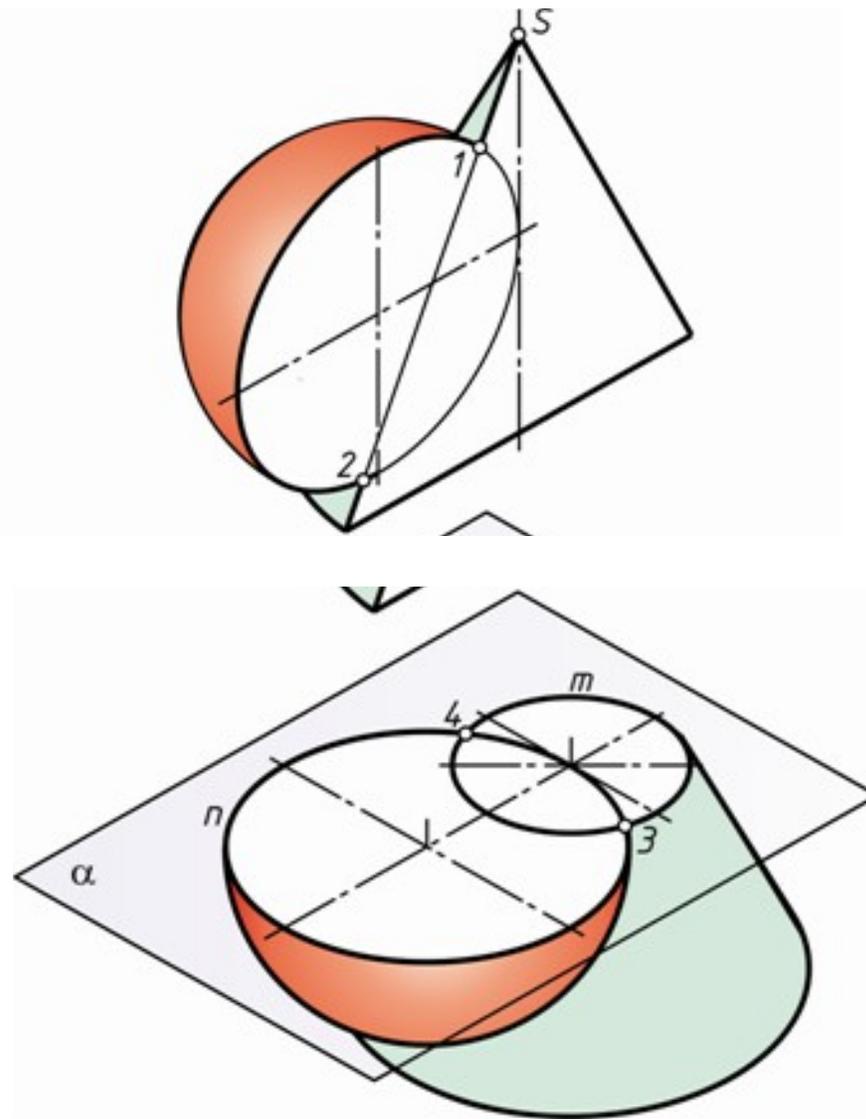
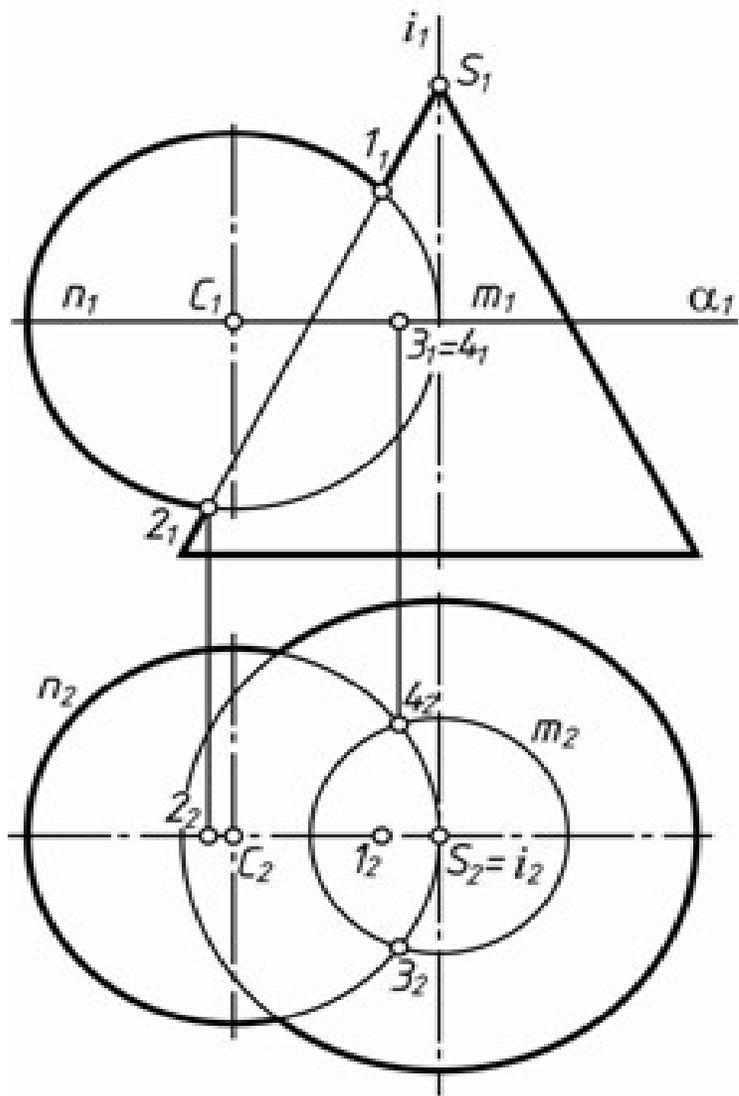
В качестве вспомогательных плоскостей могут быть приняты:

- плоскости уровня;
- проецирующие плоскости;
- плоскости общего положения.

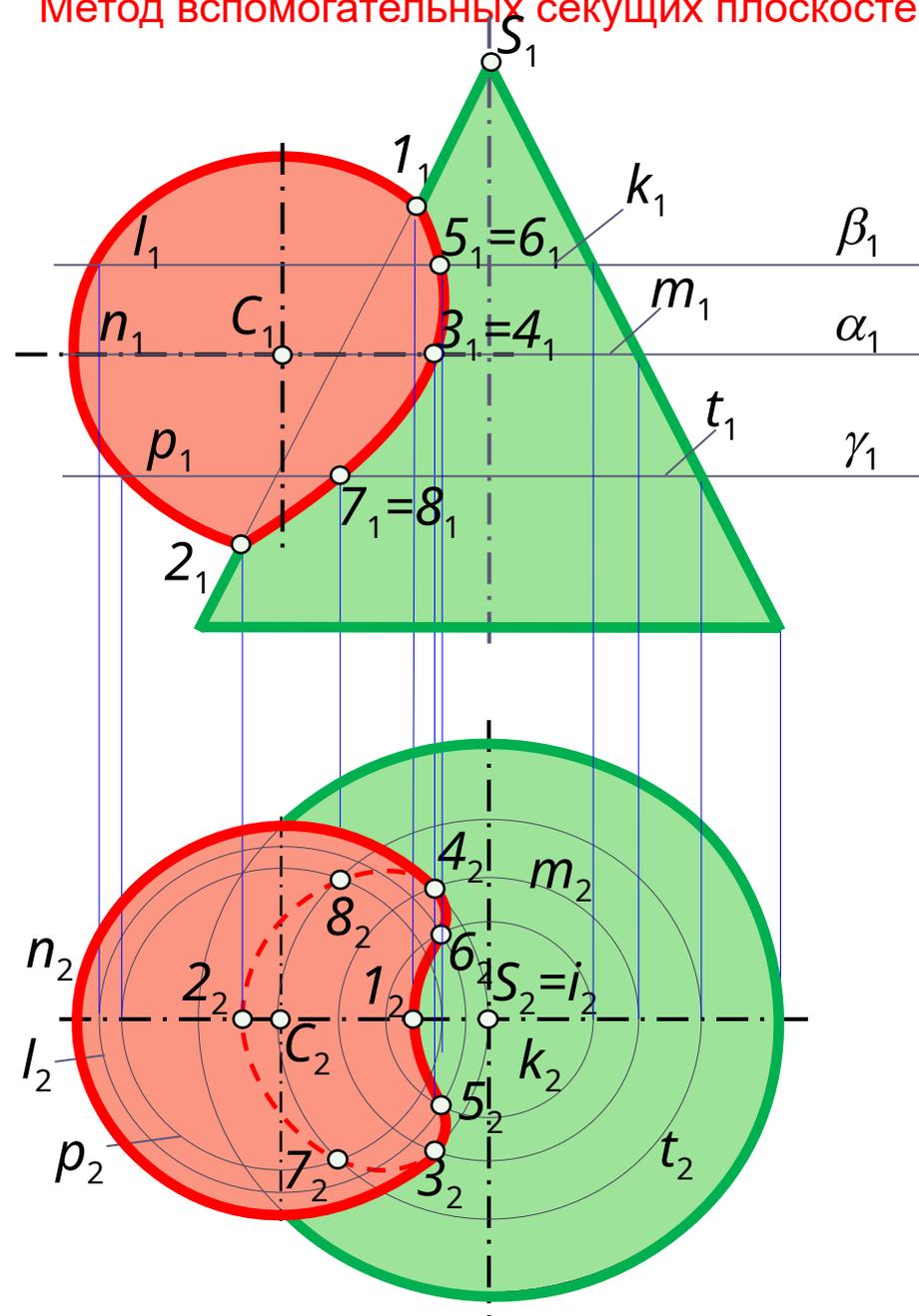
Пример. Построить пересечение трехгранной призмы с конусом вращения. Три боковые грани призмы являются фронтально проецирующими плоскостями. Линия пересечения данных поверхностей представляет собой ломаную линию, состоящую из трех плоских кривых. Грани призмы пересекают поверхность конуса по окружности, неполному эллипсу и неполной параболе.

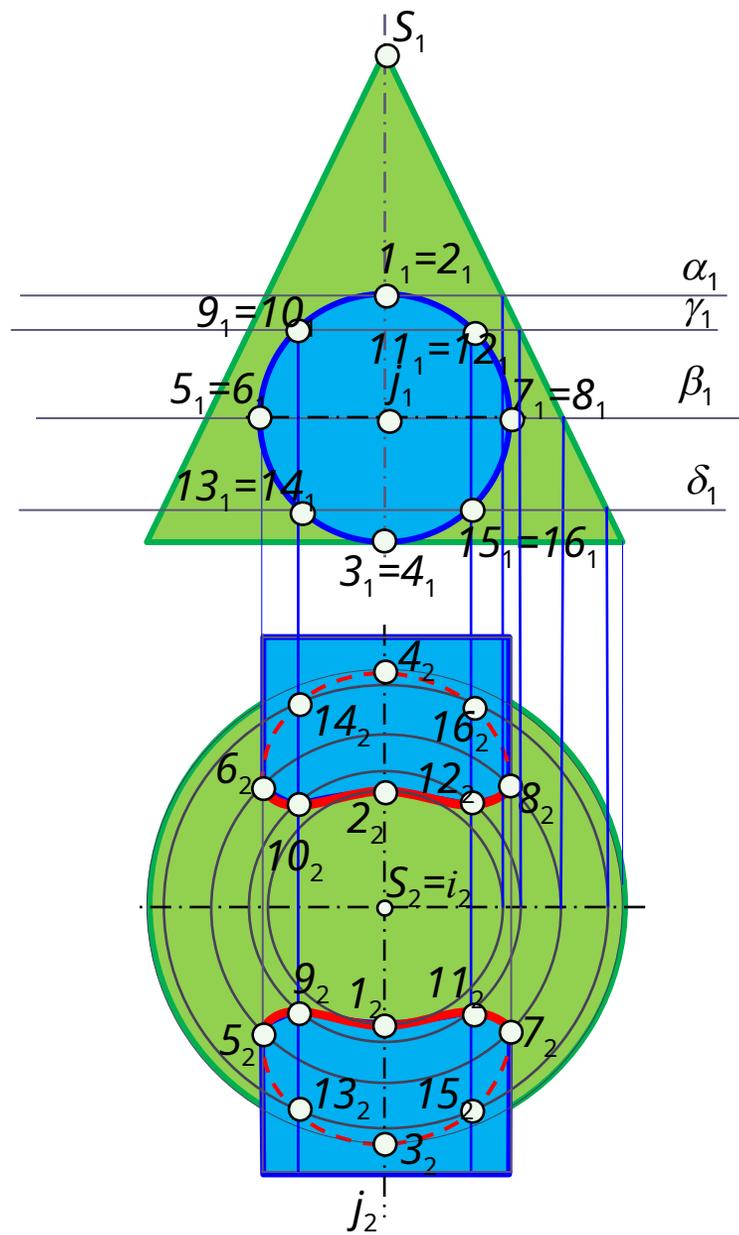


Метод вспомогательных секущих плоскостей



Метод вспомогательных секущих плоскостей



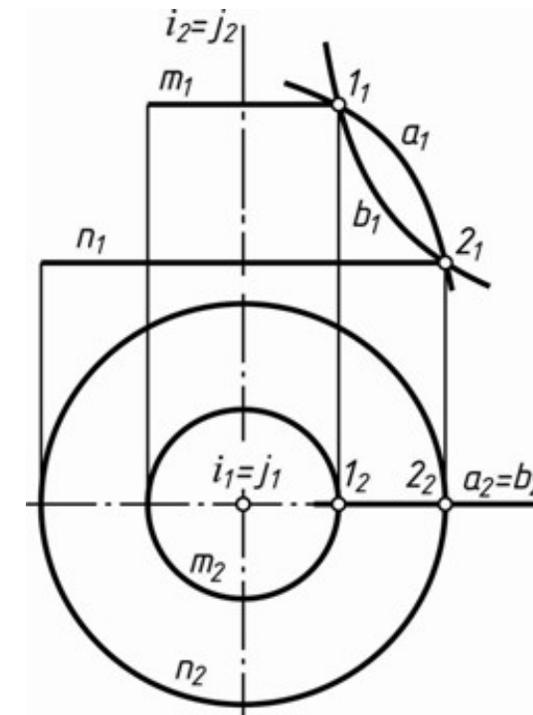
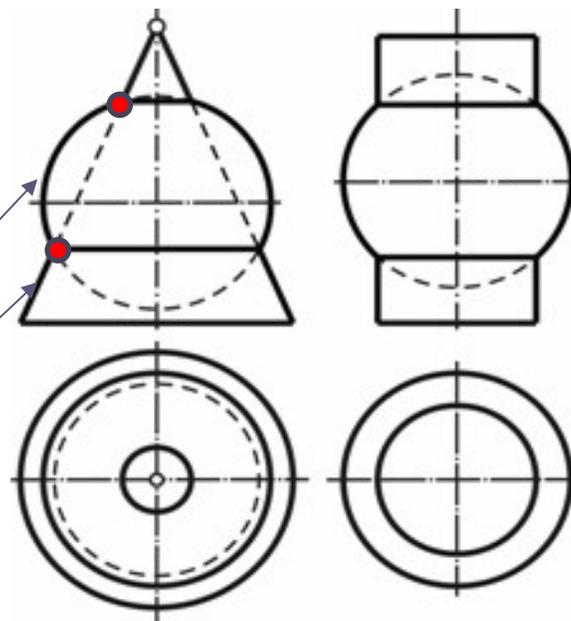


Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка. Способ сфер.

1. Оси двух пересекающихся поверхностей вращения совпадают

Две соосные поверхности вращения пересекаются по параллелям, при этом, если оси поверхностей параллельны плоскости проекций, то параллели проецируются на эту плоскость прямыми линиями, перпендикулярными проекции оси.

Две соосные поверхности вращения пересекаются по параллелям, причем эти параллели проходят через точки пересечения их меридианов



Любая прямая, проходящая через центр сферы может быть осью сферы, и если ось поверхности вращения проходит через центр сферы, то эти поверхности автоматически становятся соосными и поэтому сферу можно применять в качестве вспомогательной поверхности при определении линии пересечения поверхностей вращения

Способ вспомогательных концентрических сфер

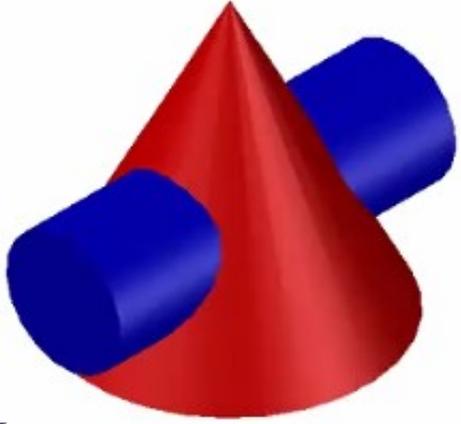
2. Оси поверхностей вращения пересекаются и параллельны плоскости проекций.

В этом случае нецелесообразно использовать вспомогательные секущие плоскости. Они не могут дать вспомогательные линии сечения, которые проецировались бы графически простыми линиями.

Поэтому для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной плоскости проекций следует применять **способ вспомогательных концентрических сфер**.

Если оси поверхностей вращения второго порядка пересекаются и параллельны плоскости проекций, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде плоской кривой второго порядка

Способ вспомогательных концентрических сфер



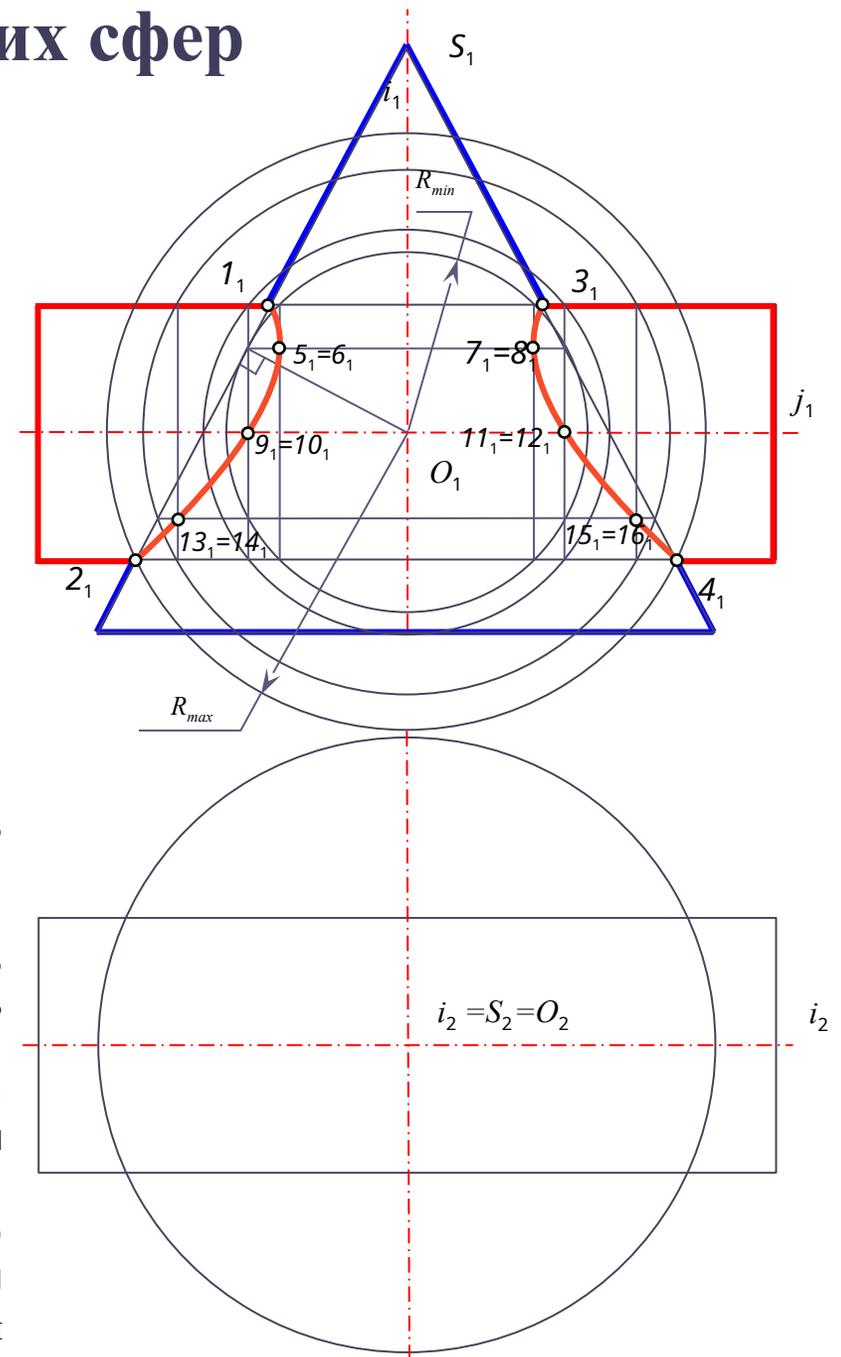
$$i \cap j = O$$

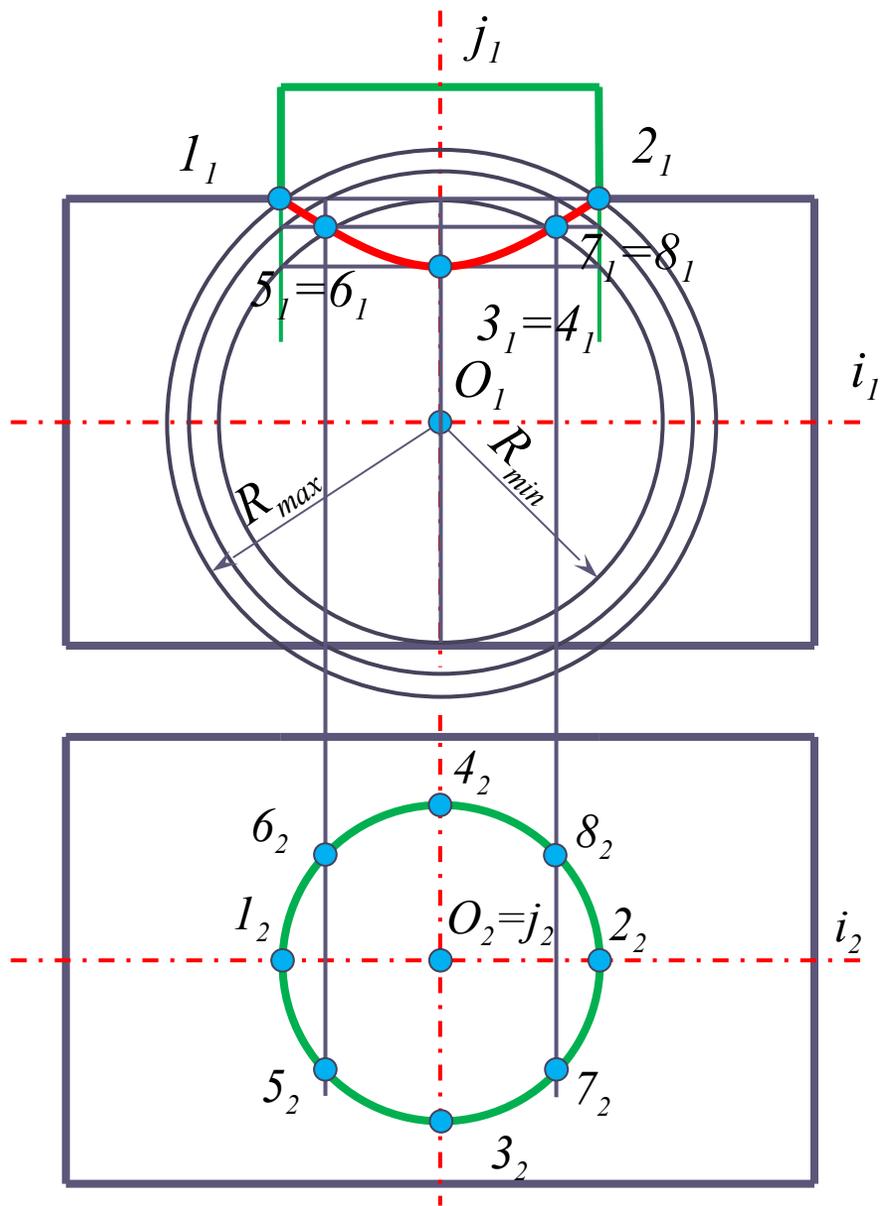
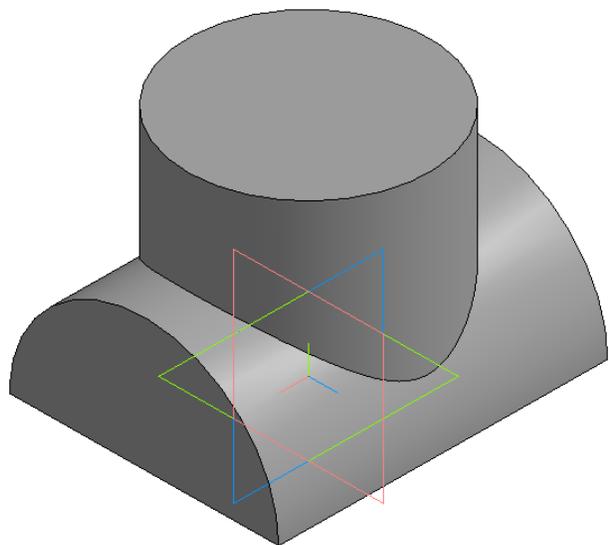
$$\alpha(i \cap j) \parallel \pi_1$$

Для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной плоскости проекций следует применять **способ вспомогательных концентрических сфер**.

Рассмотрим задачу: Построить линию пересечения конуса и цилиндра. Мы видим, что оси i и j поверхностей Конуса и цилиндра пересекаются. А также, пересекающиеся оси i и j поверхностей определяют общую плоскость симметрии, которая параллельна плоскости Π_1 . И их точка пересечения O будет центром вспомогательных сфер.

Построим первую сферу. Правило построения такое: Сфера должна быть вписана в одну из поверхностей и при этом пересекать вторую. (Если вписать сферу в цилиндр, то она не пересечет конус. Поэтому впишем сферу в конус, потому что она пересечет цилиндр.) Для этого из центра O проведем перпендикуляр к очерковой образующей конуса- это будет радиус R_{min} первой вписанной сферы. Остальные сферы не будут вписанными, потому что должны пересекать обе поверхности. Самая большая сфера пройдет через самую дальнюю опорную точку 2_1 – но эта сфера не используется для определения точек линии пересечения. Ее используют как границу построений R_{max} . Радиусы всех вспомогательных сфер находятся в промежутке между R_{min} и R_{max} .





3. Поверхности в точках касания имеют общие касательные плоскости

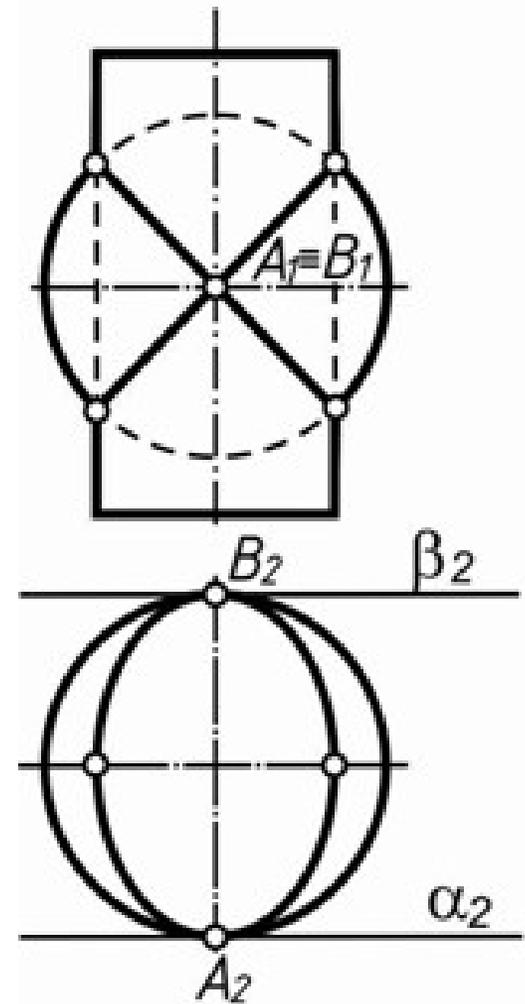
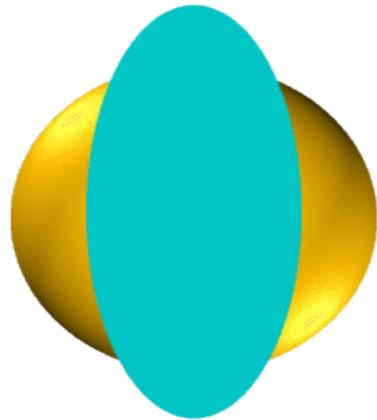
Теорема о двойном соприкосновении. Если две поверхности 2-го порядка имеют две точки соприкосновения и общие касательные плоскости в этих точках, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка.

На рисунке показаны две поверхности:

- Эллиптический цилиндр,
- Сфера.

А и В - две точки соприкосновения.

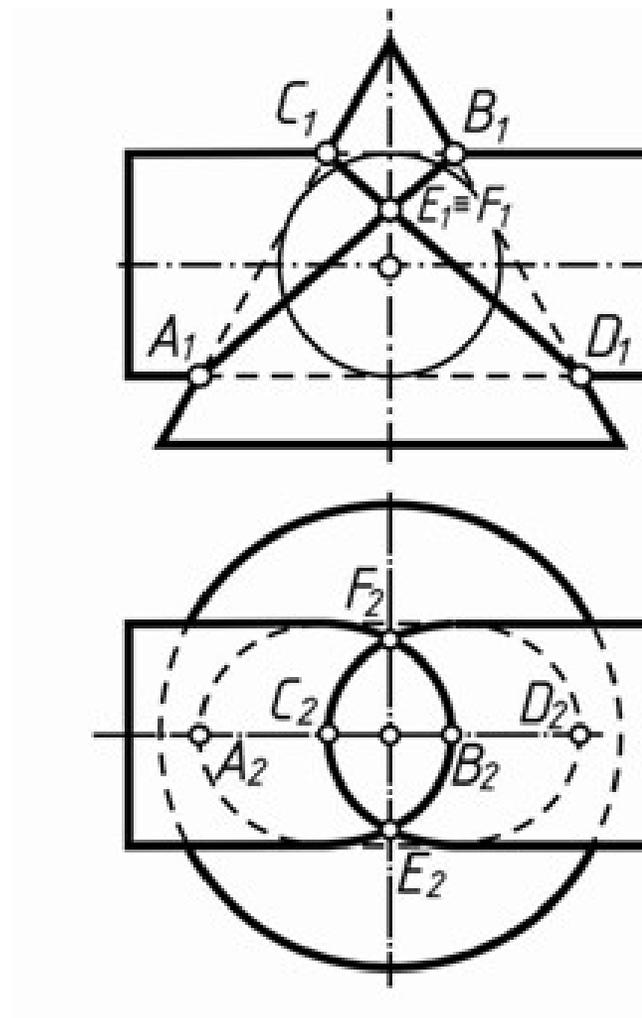
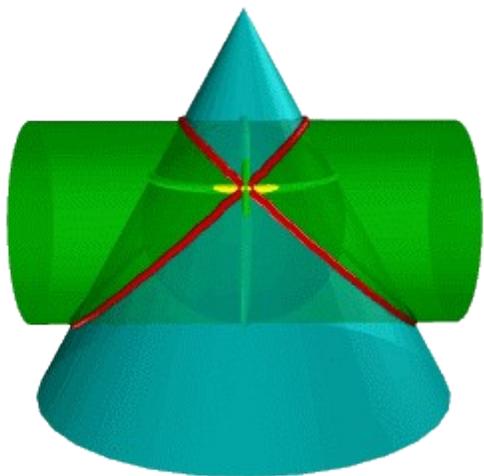
Альфа и Ветта - две общие касательные плоскости.

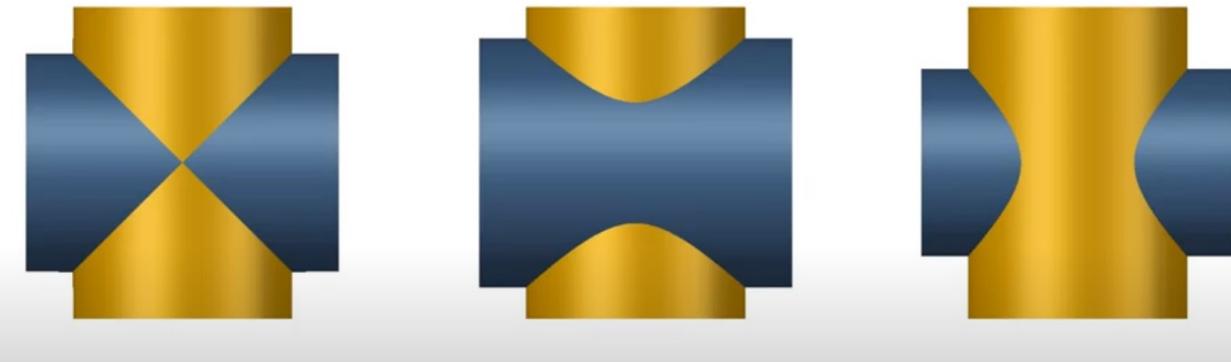
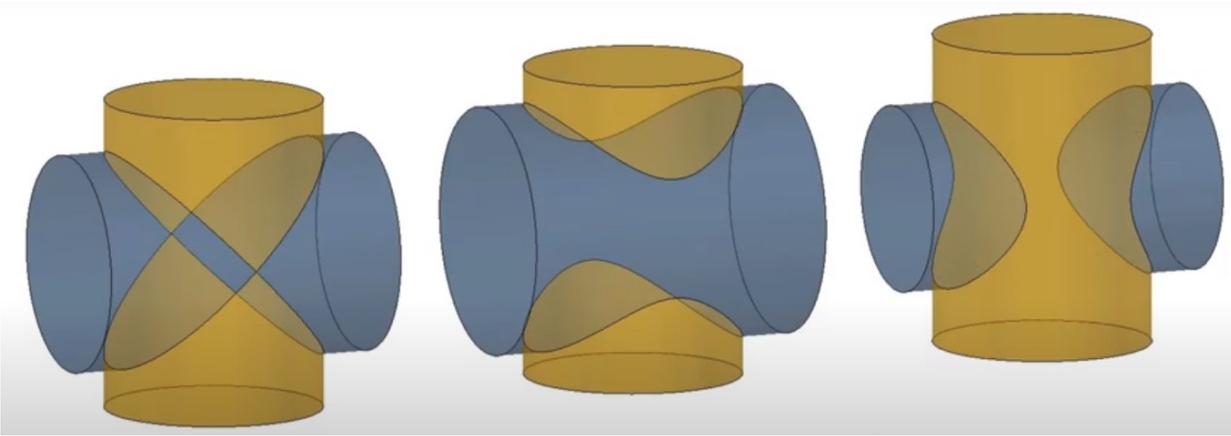
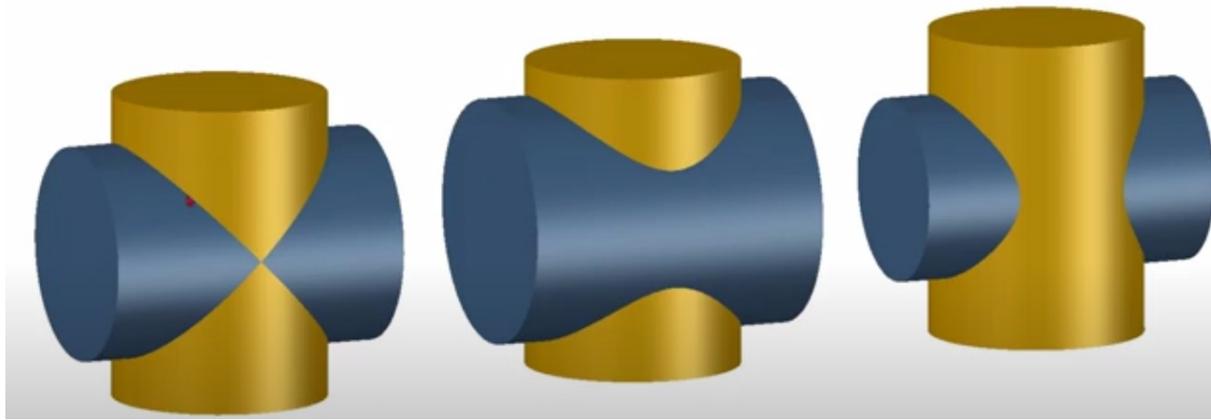


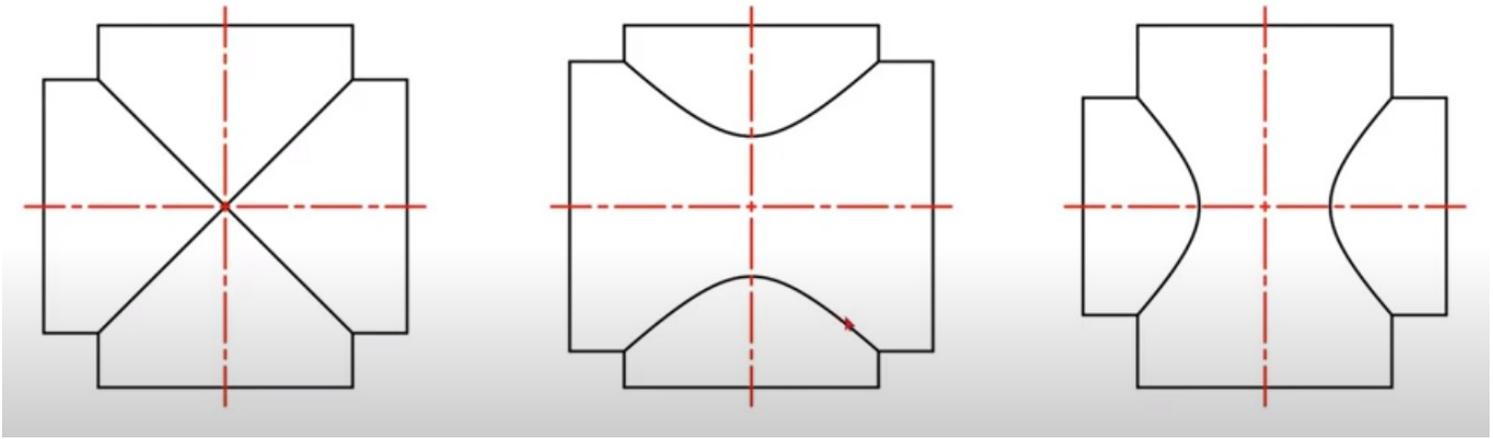
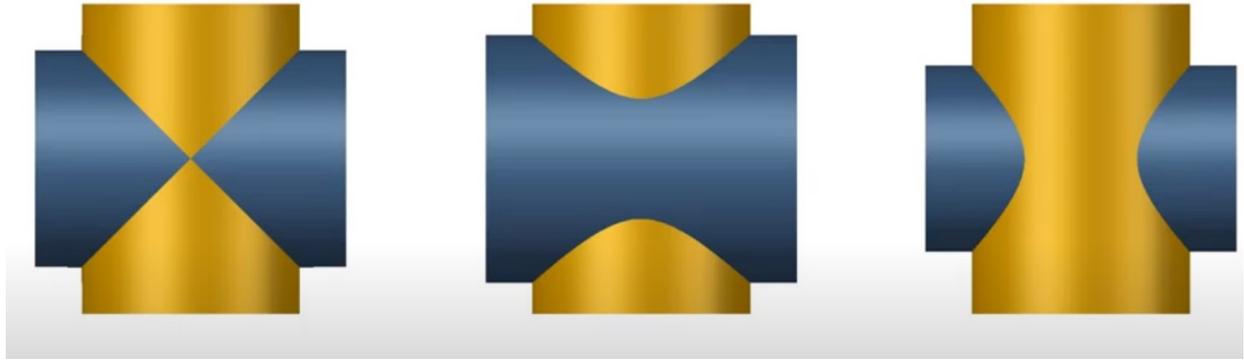
4. Две пересекающиеся поверхности касаются третьей поверхности второго порядка

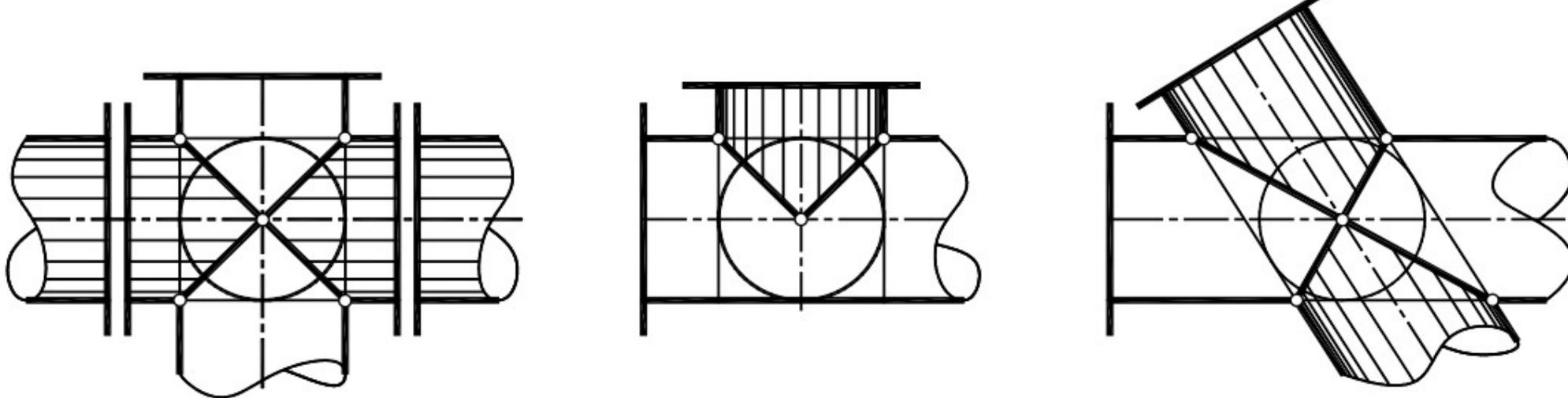
Теорема Г.Монжа. Если две поверхности 2-го порядка описаны вокруг третьей поверхности 2-го порядка или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым 2-го порядка.

Теорема Монжа – частный случай теоремы о двойном соприкосновении.







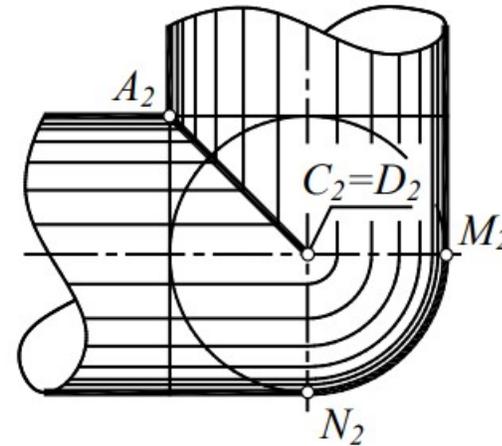
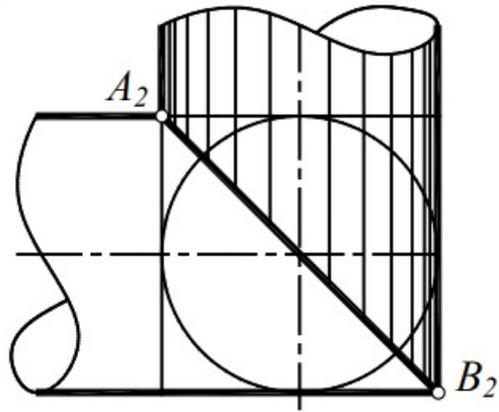


Задача. Построить линию пересечения поверхностей двух цилиндров одинакового диаметра с пересекающимися осями.

На рисунке показаны фронтальные проекции круговых цилиндров одинакового диаметра. Пересекающиеся оси цилиндров параллельны фронтальной плоскости проекций.

Во всех трех случаях цилиндры описаны около сферы (с центром в точке пересечения осей). В соответствии с теоремой Монжа, линия их пересечения распадается на две плоские кривые (эллипсы), фронтальные проекции которых вырождаются в отрезки прямых линий.

Задача . Спроектировать угловое соединение двух трубопроводов одинакового диаметра



На рисунке показан простой угловой переходник, предназначенный для соединения цилиндрических трубопроводов с взаимно перпендикулярными осями.

Линия АВ пересечения соединяемых трубопроводов, в соответствии с теоремой Монжа – эллипс. При транспортировке по такому трубопроводу жидких или сыпучих тел будет возникать застойная зона в области точки В. Чтобы устранить этот недостаток, сопряжение трубопроводов делают плавным, дополняя его сферической поверхностью. В этом случае переходник состоит из двух цилиндрических поверхностей и четверти сферы. Цилиндрические поверхности касаются сферы по полуокружностям CMD и CND .

Линия САD пересечения сопрягаемых трубопроводов – половина эллипса.