

Курс лекций по дисциплине «Начертательная геометрия»



лектор

Каражанова Дарига Дюсеновна

Кандидат педагогических наук

ассоциированный профессор Satbayev University

Лекция 10

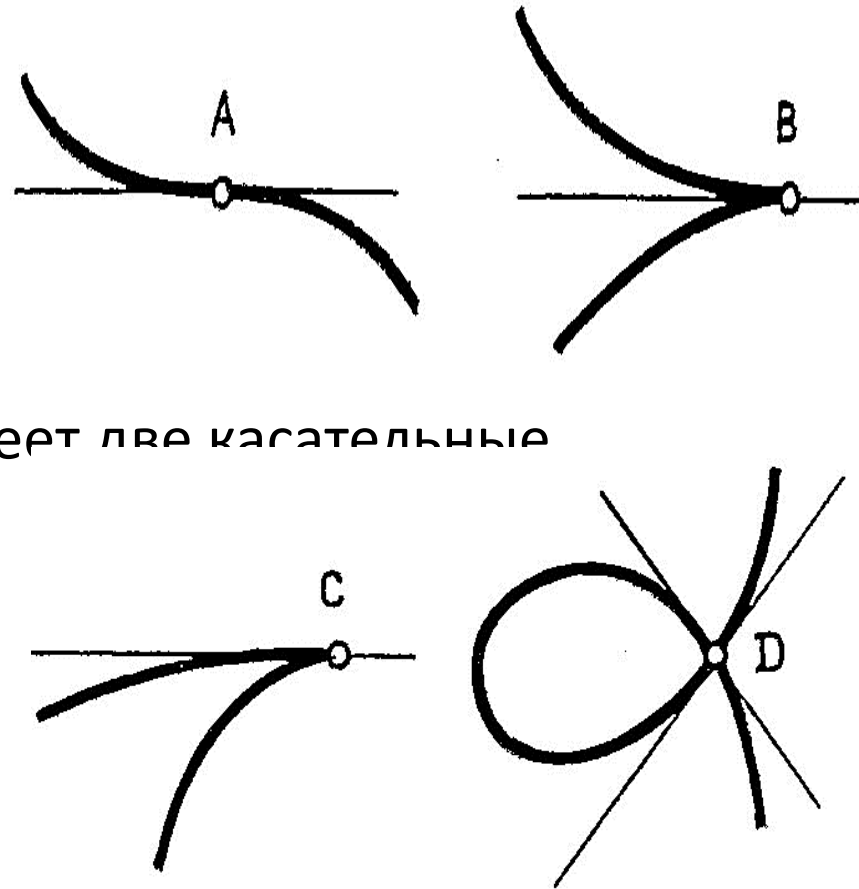
Кривые линии и поверхности

К.п.н., ассоциированный профессор

Каражанова Дарига Дюсеновна

Особые точки кривой

- Точка перегиба A- касательная перес
- Точка возврата первого рода B
- Точка возврата второго рода C
- Точка излома D- кривая в этой точке имеет две касательные



Свойства точек кривой

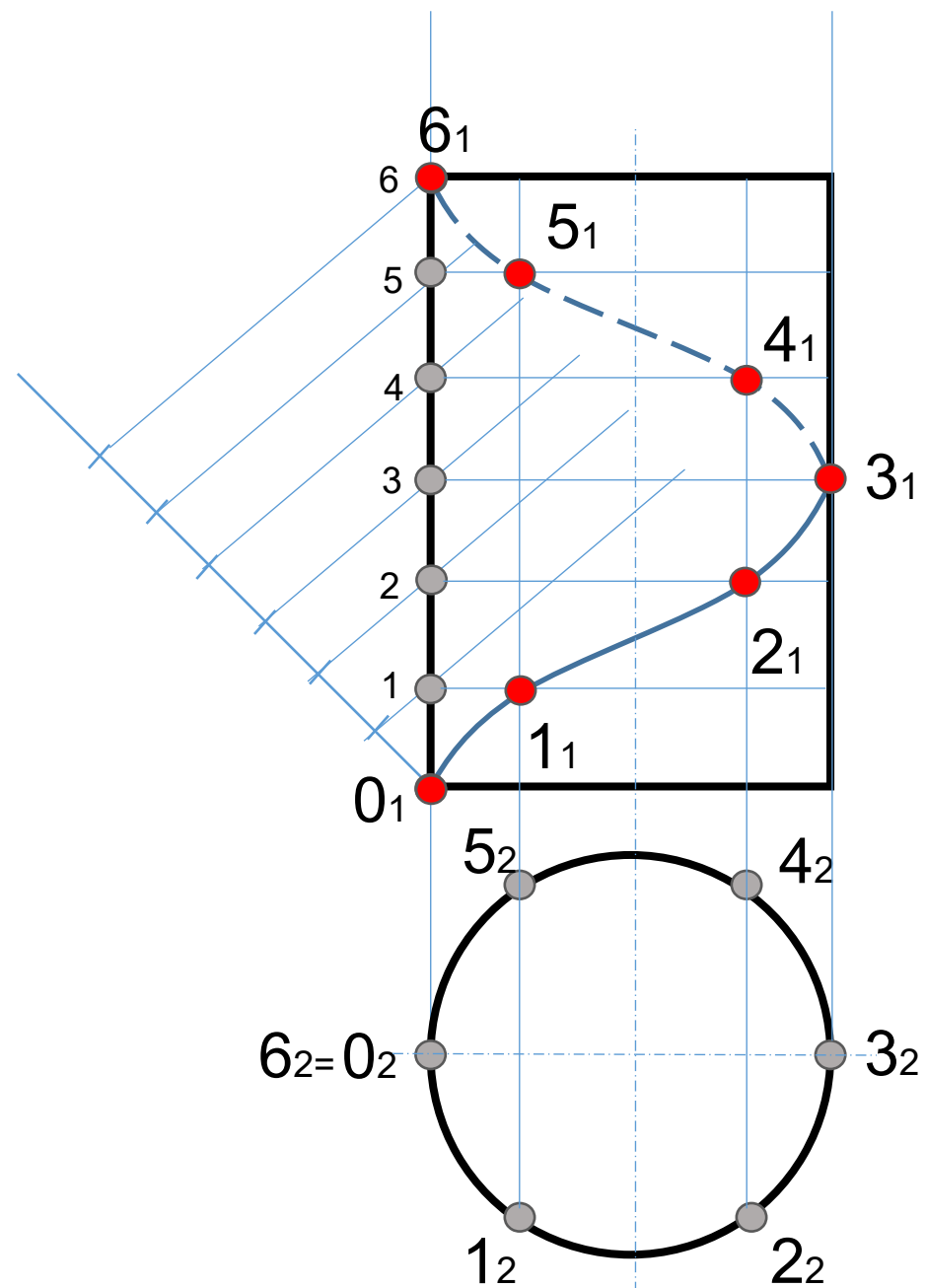
- Точка кривой, в которой можно провести единственную касательную, называется **гладкой**.
- Кривая, состоящая только из гладких точек, называется **гладкой кривой**.
- Точка кривой называется **обыкновенной**, если при движении точки по кривой направление ее движения и направление поворота касательной не изменяются
- Точки, не отвечающие этим условиям, называются **особыми**

Пространственные кривые

- Пространственные кривые линии могут иметь самую разнообразную форму. Они могут быть заданы аналитически. Кривые случайного вида задаются графически.
- Для анализа пространственной кривой необходимо установить самые общие ее свойства, которые изучаются по ее проекциям.
- Для задания на чертеже пространственной кривой линии и точек, принадлежащих ей, достаточно двух ее проекций – горизонтальной и фронтальной.

Проекции пространственных кривых

- Наибольшее применение в практике архитектурного проектирования имеют **закономерные пространственные кривые**, в частности винтовые линии
- Винтовая линия образуется двойным движением точки – поступательным и вращательным.





Поверхности

Начертательная геометрия как самостоятельная наука, которая занимается теоретическим моделированием трехмерного пространства, а **результатами исследований пользуются инженеры для их практического применения, не может обойти вниманием такие важные геометрические фигуры, как поверхности.**

Мир поверхностей многообразен и безграничен - начиная от элементарной простой плоскости до причудливых сложнейших форм криволинейных поверхностей, образующие которых периодически изменяют свой вид. Такие поверхности не поддаются точному математическому описанию.

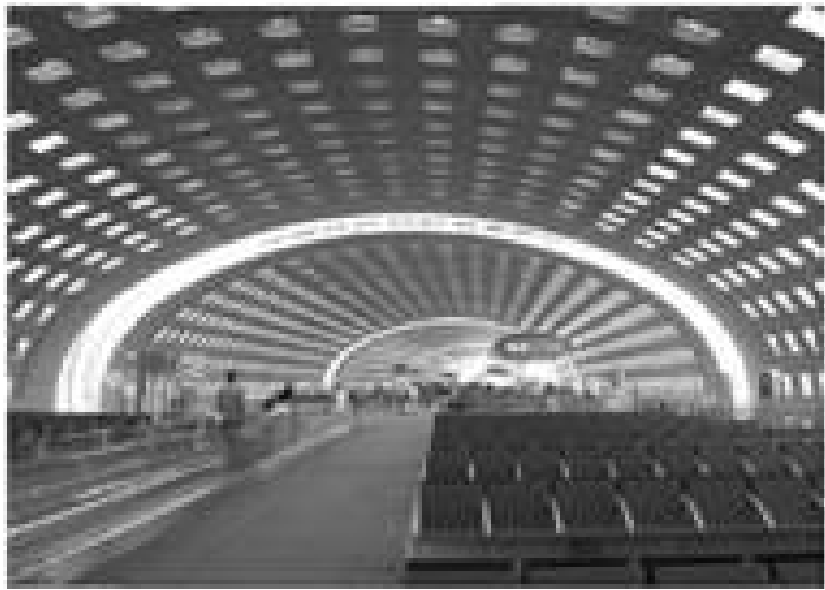
По разнообразию форм и свойств, по своему значению при моделировании геометрических фигур в архитектуре, строительстве, изобразительном искусстве, авиастроении поверхности не имеют себе равных среди других фигур.



Гиперболоидный собор
Brasília: Catedral
Metropolitana



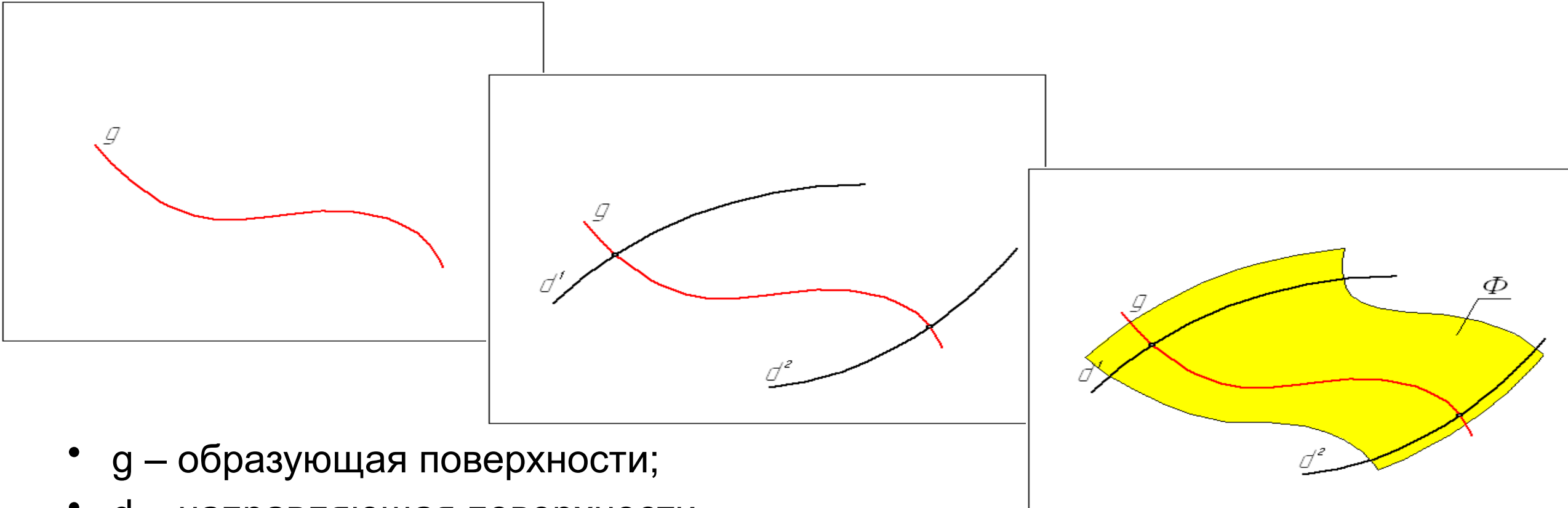
Kobe port tower (Гиперболоидная башня) and Maritime Museum (гиперболический параболоид) седлообразная поверхность



- **Поверхность** – непрерывное двумерное множество точек. Измерения : длина, ширина, площадь.
- Толщины и объема нет.

Кинематический способ формирования поверхности

Поверхность рассматривается как непрерывное множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону



- g – образующая поверхности;
- d – направляющая поверхности.

Поверхность – это непрерывное множество последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону. Такой способ образования поверхностей называется кинематическим. Линия ℓ , создающая при своем движении поверхность, называется образующей. Линия m , по которой перемещается образующая, называется направляющей (рис. 3). При этом образующая и направляющая могут иметь различные формы, поэтому и поверхностей может быть образовано большое множество. Форма и закон движения образующей однозначно определяют вид поверхности.

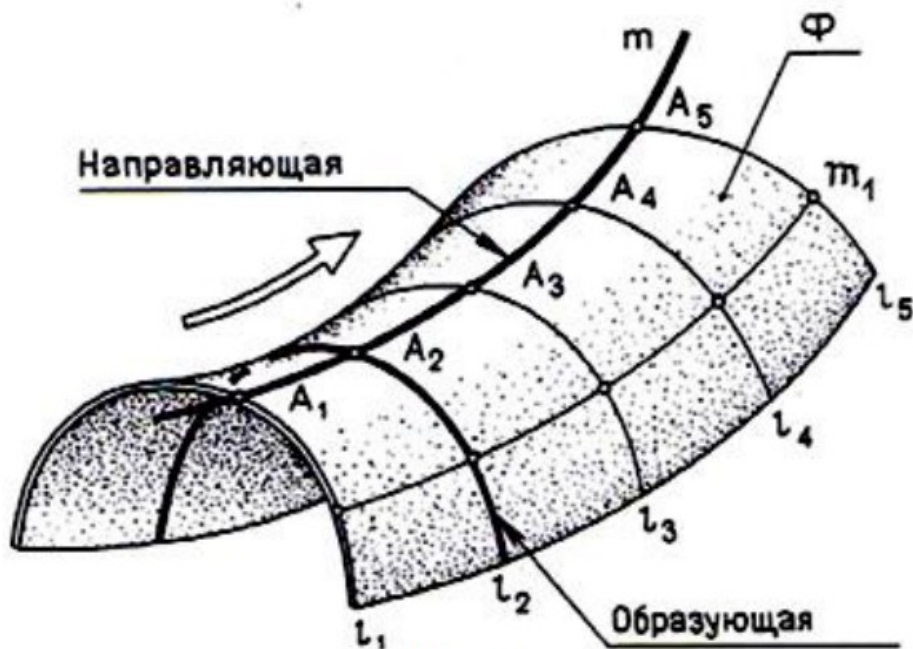


Рис. 3

На поверхности, образованной кинематическим способом, всегда можно выделить семейство образующих $\ell_1, \ell_2, \dots$ и семейство направляющих $m, m_1, \dots$. Эти два семейства, пересекаясь, образуют каркас поверхности.

В начертательной геометрии поверхность задается определителем.

Определитель – это совокупность геометрических элементов (точек, линий) и необходимых условий, однозначно задающих поверхность. Структурная формула поверхности имеет вид:

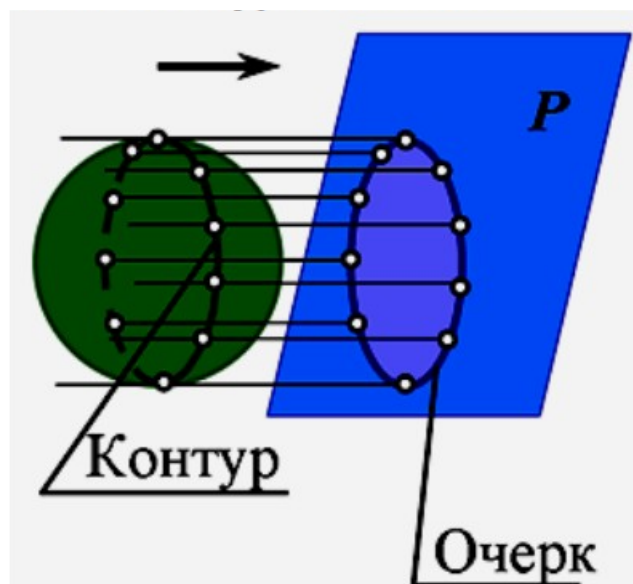
$\Phi(\Gamma)[A],$

где (Γ) – геометрическая часть (элементы поверхности), а $[A]$ – алгоритмическая часть, которая задает закон движения образующей. Графически поверхность задается проекциями геометрических элементов ее определителя.

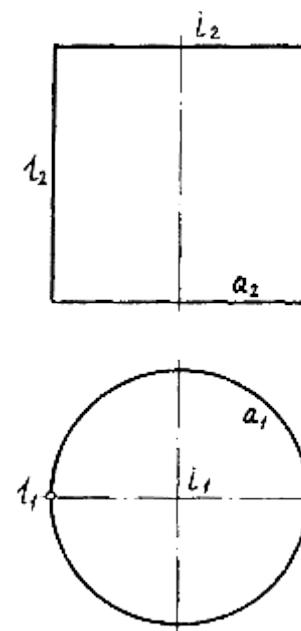
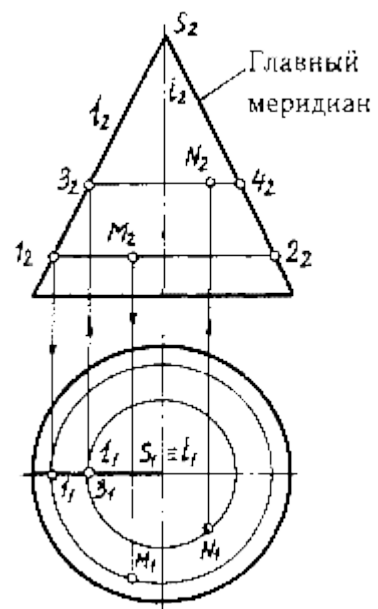
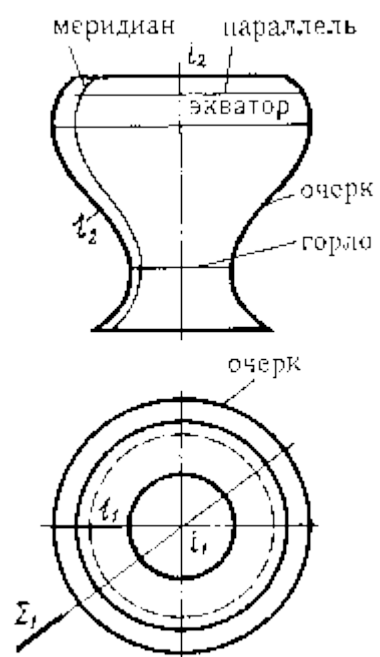
Но этого недостаточно для наглядности чертежа, поэтому строят очертания или очерк поверхности.

Очерк поверхности – это проекция контурной линии на плоскость.

Контур или контурная линия - это линия, образованная точками касания проецирующих прямых заданной поверхности. Очерк отделяет видимую часть поверхности от невидимой на данной плоскости проекций. Очерковая линия на одной плоскости проекций называется линией видимости на другой плоскости проекций.



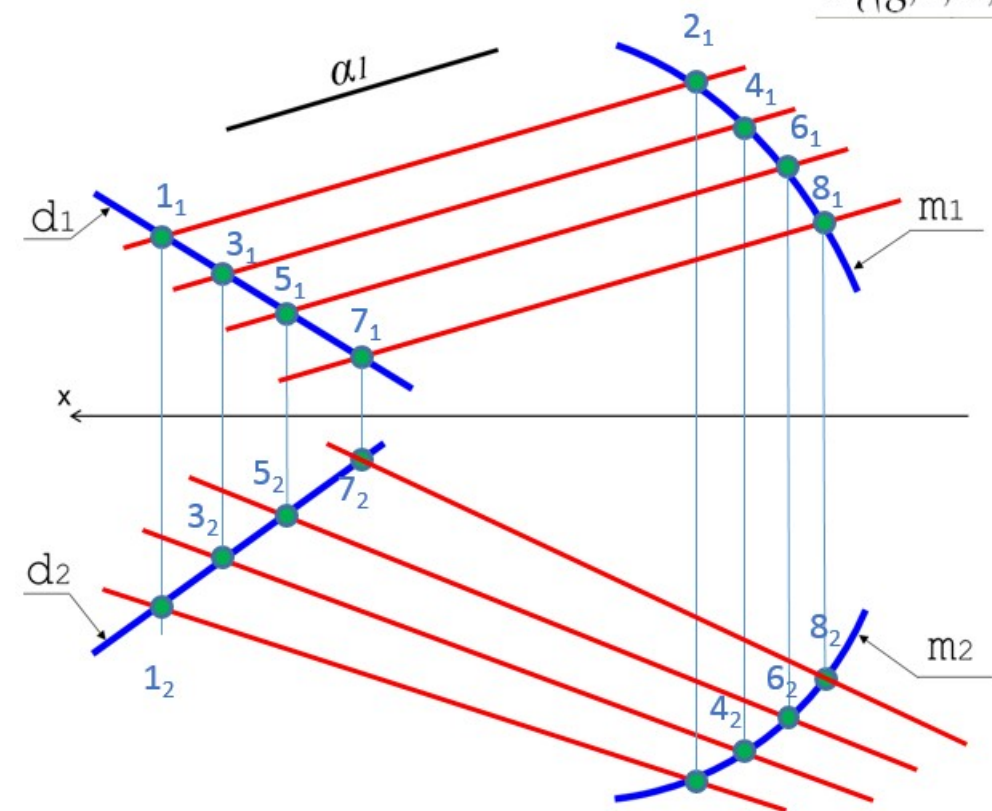
Очерк – это проекция контура на плоскости проекций.



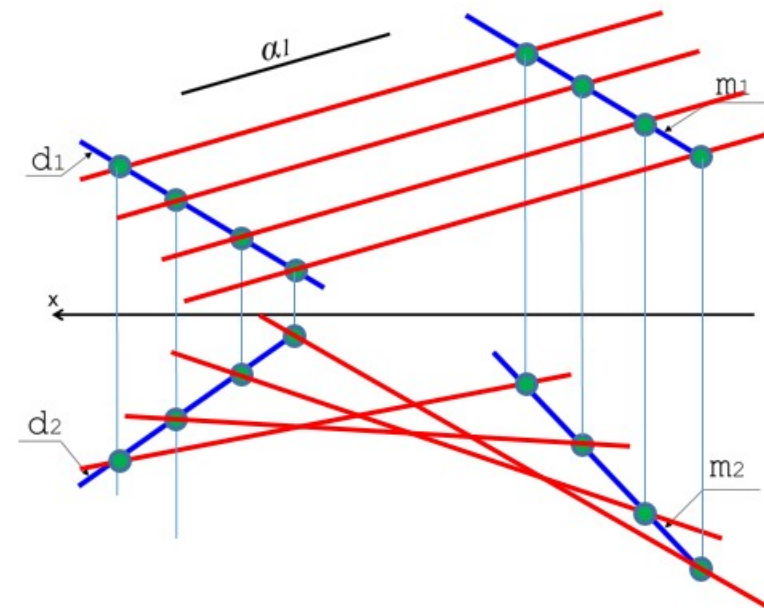
На чертежах поверхности задают проекциями их определителя, очерками, проекциями каркаса.

- **Определитель** – это совокупность геометрических элементов и условий, необходимых и достаточных для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже.
- **Каркас** – это множество линий, заполняющих поверхность так, что через каждую точку поверхности в общем случае проходит одна линия каркаса. Часто под каркасом понимают семейство линий, полученных на поверхности в результате пересечения ее пучком параллельных плоскостей, расположенных на равных расстояниях друг от друга.
- **Контуром** поверхности называется линия, точки которой являются точками касания проецирующих прямых с предметом.
- **Очерк** – это проекция контура на плоскости проекций.

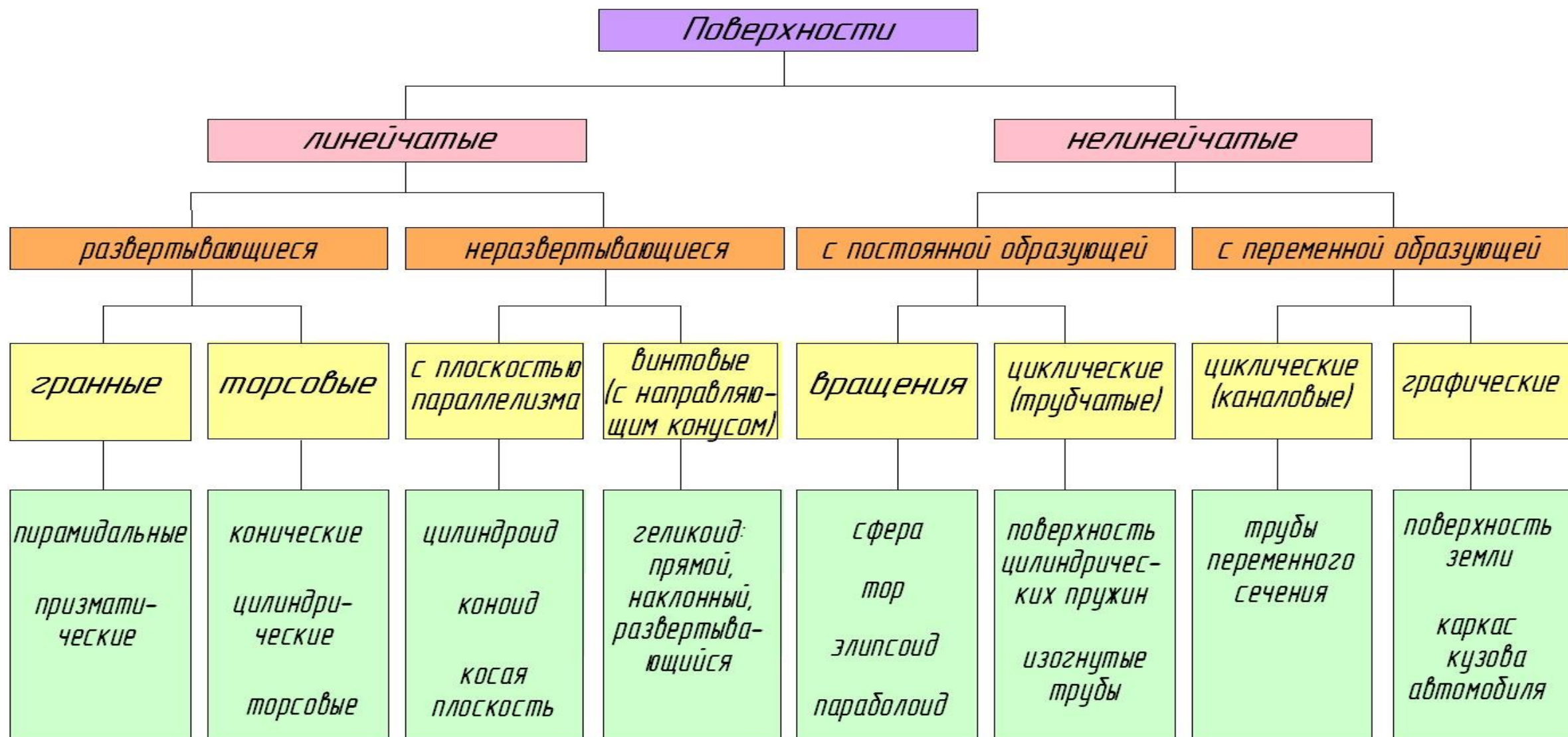
$$\Phi\{(\bar{g}, \bar{d}, \hat{m}, \alpha)[g_i \cap d, g_i \cap m, g_i // \alpha]\}.$$



$$\Psi\{(\bar{g}, \bar{d}, \bar{m}, \alpha)[g_i \cap d, g_i \cap m, g_i // \alpha]\}$$



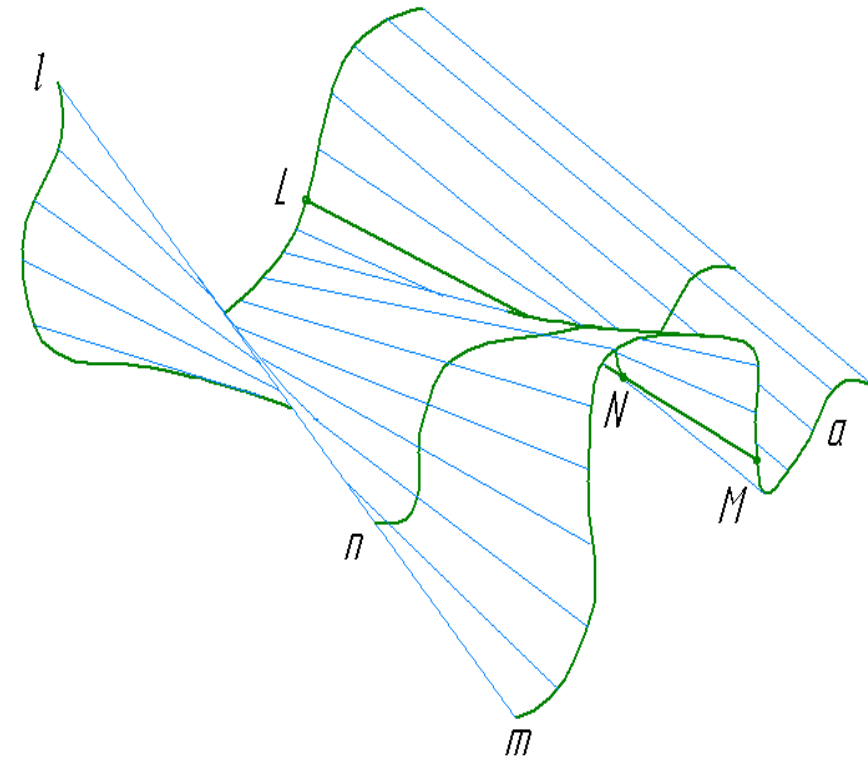
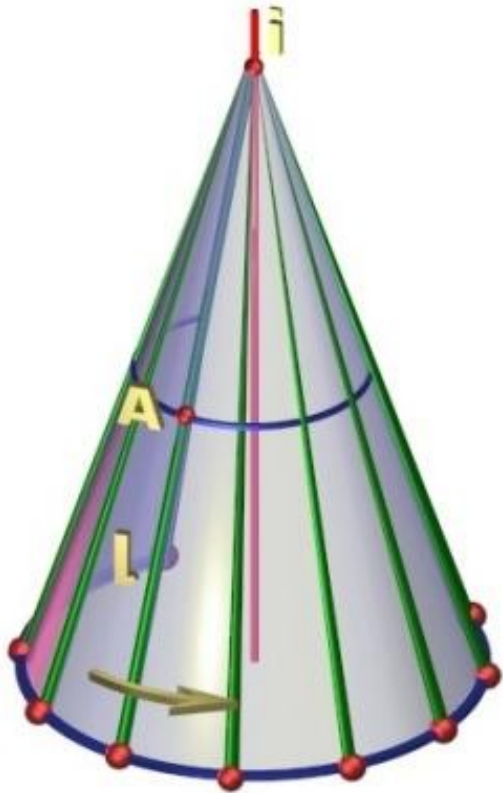
КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ



ЛИНЕЙЧАТЫЕ И НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ – это поверхности с прямолинейной образующей.

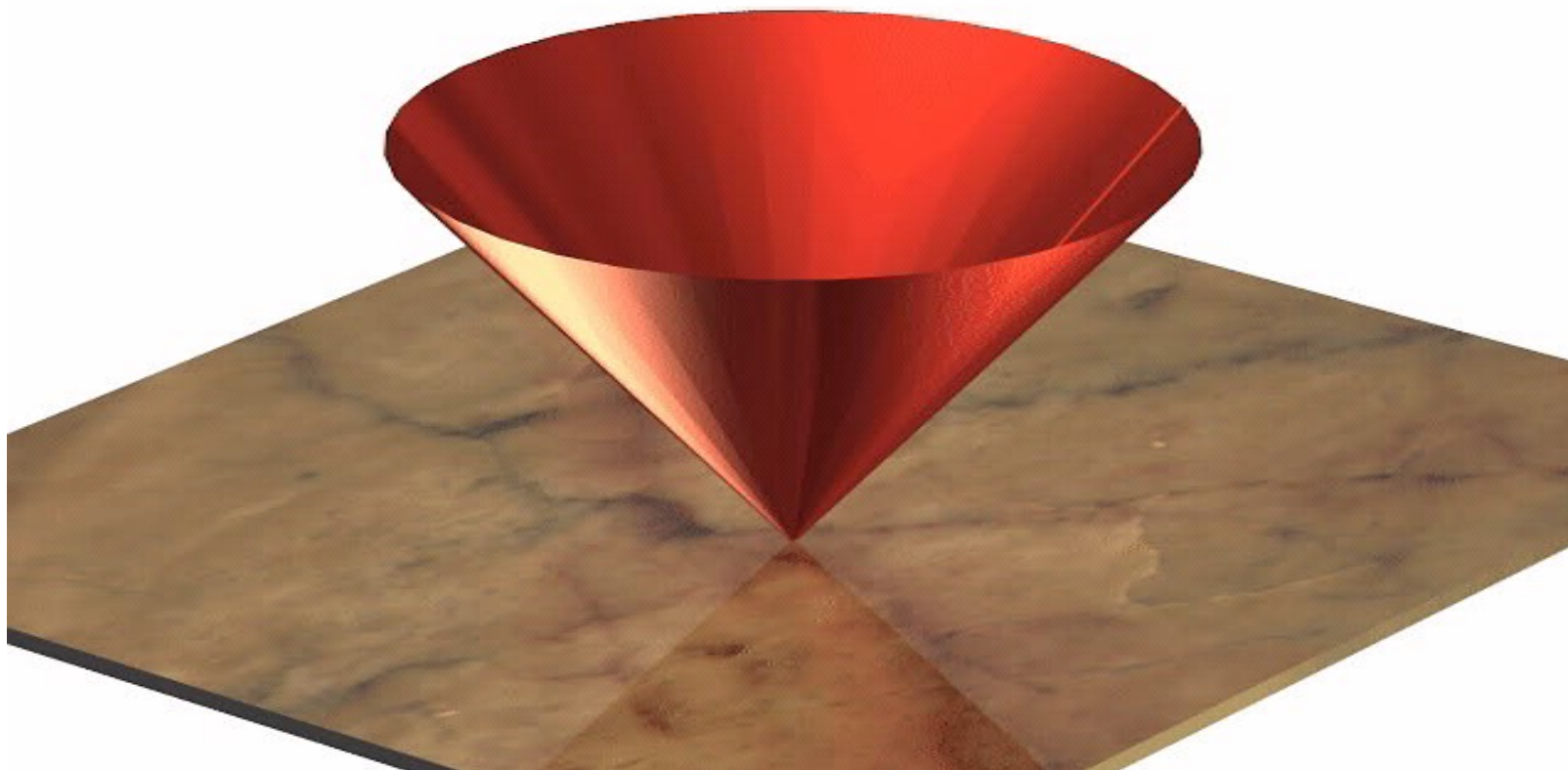
НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ – это поверхности с криволинейной образующей.



РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ называют поверхности, которые можно развернуть до совмещения с плоскостью без образования складок и разрывов.

РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА



НЕРАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

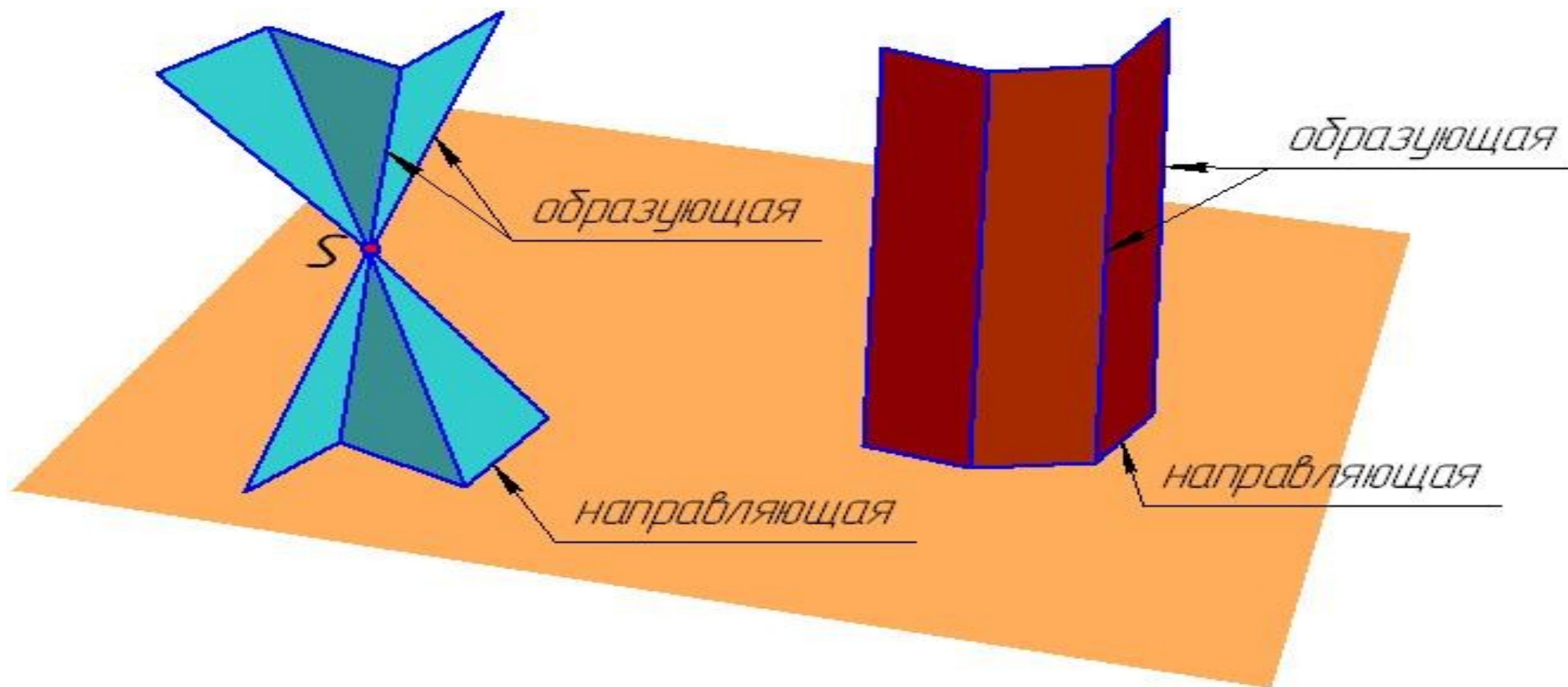
НЕРАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ называют поверхности, которые при совмещении с плоскостью образуют складки или разрывы.



ГРАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

способы образования

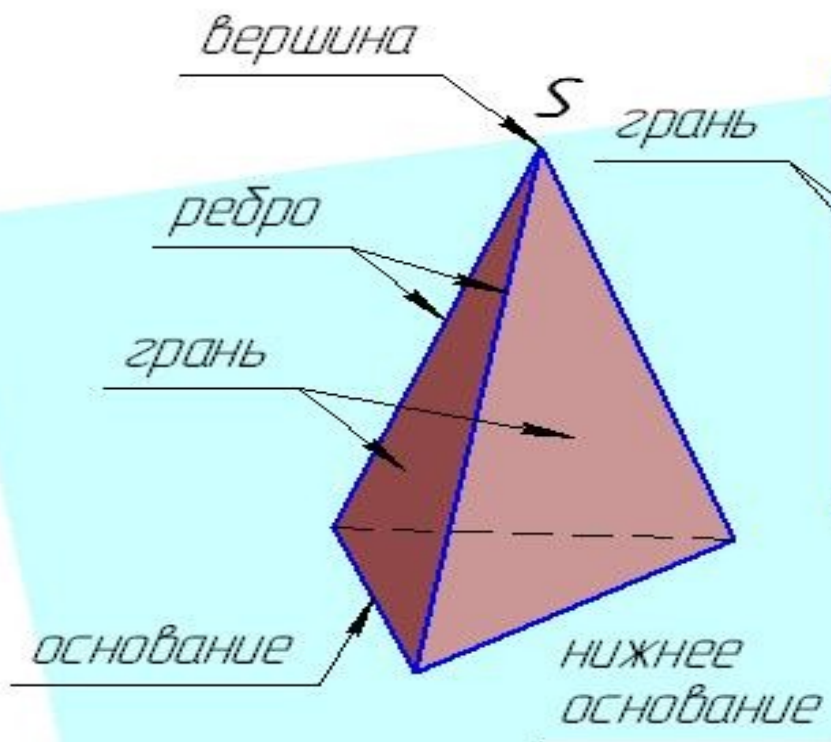
ГРАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ образованы движением прямолинейной образующей по ломаной направляющей.



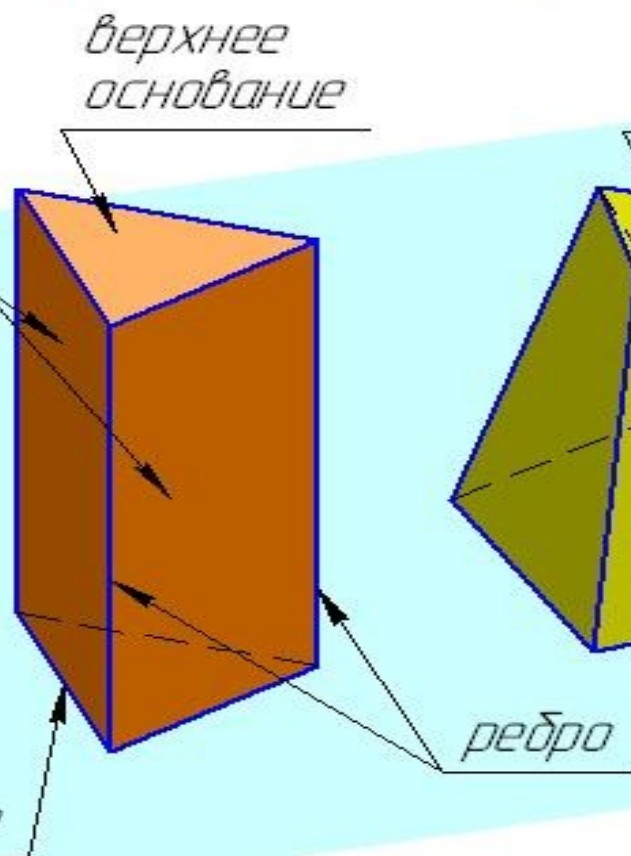
ГРАННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

элементы гранных поверхностей

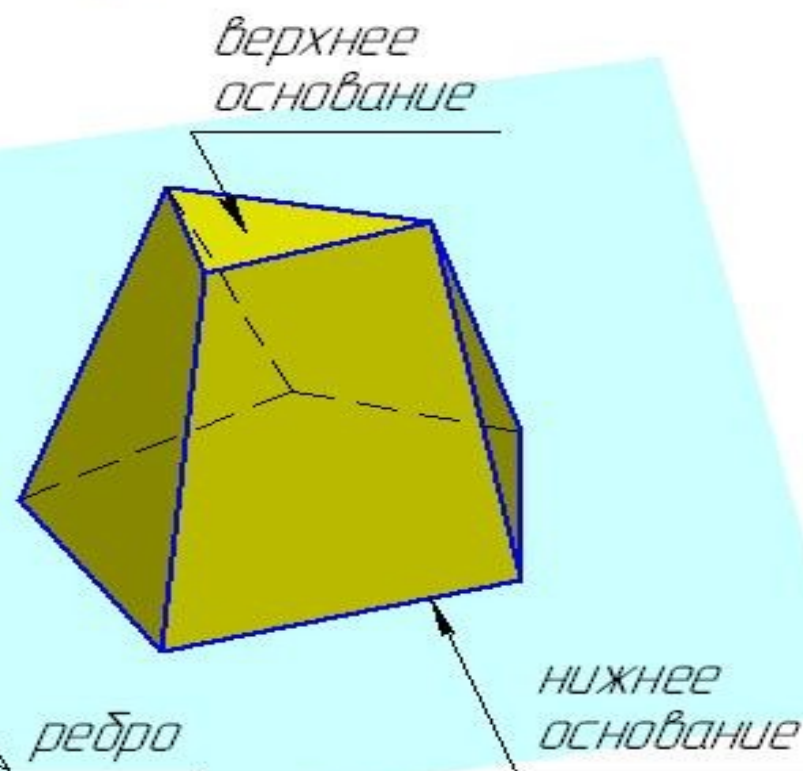
пирамида



призма



призматойд

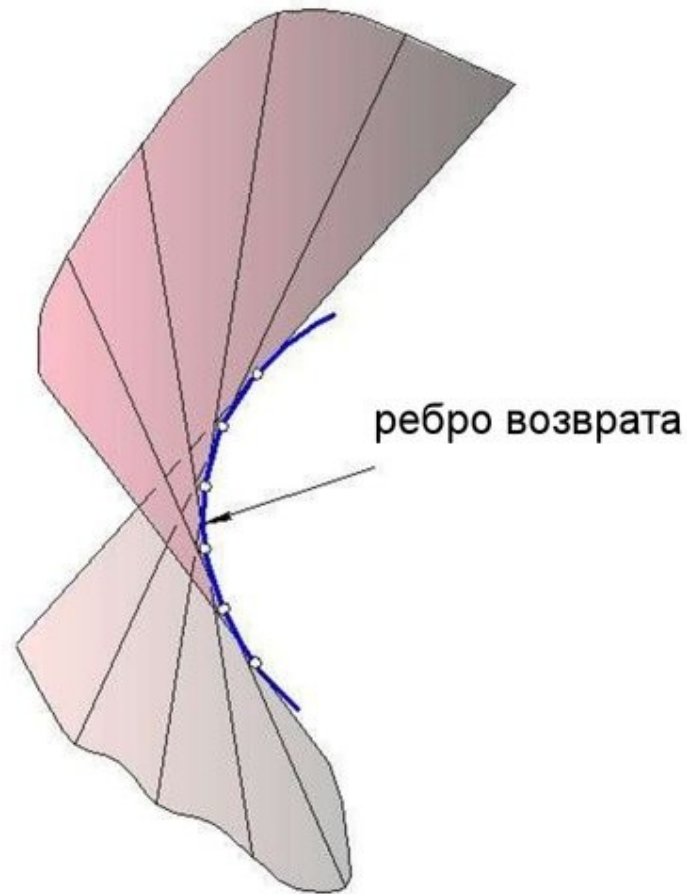


Поверхности линейчатые с одной направляющей (торсы)

- **Торс** – линейчатая поверхность, которую можно совместить всеми ее точками с плоскостью без складок и разрывов.
- Такие поверхности называю также **развертывающимися** поверхностями.
- К ним относятся:
 - а) поверхность с ребром возврата;
 - б) поверхность цилиндрическая;
 - в) поверхность коническая.

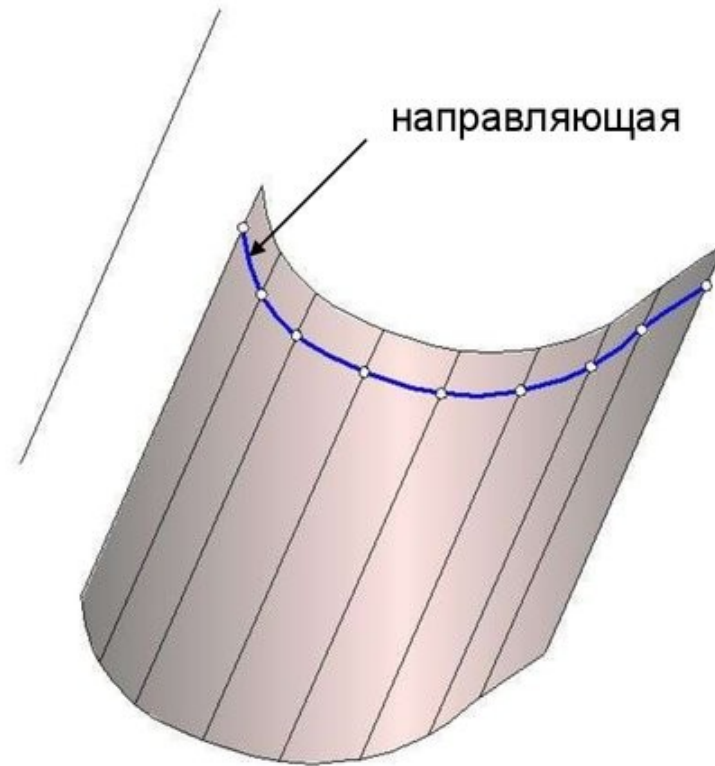
Поверхность с ребром возврата

- образуется непрерывным движением прямолинейной образующей, во всех своих положениях касающейся некоторой пространственной кривой, которая называется **ребром возврата**.



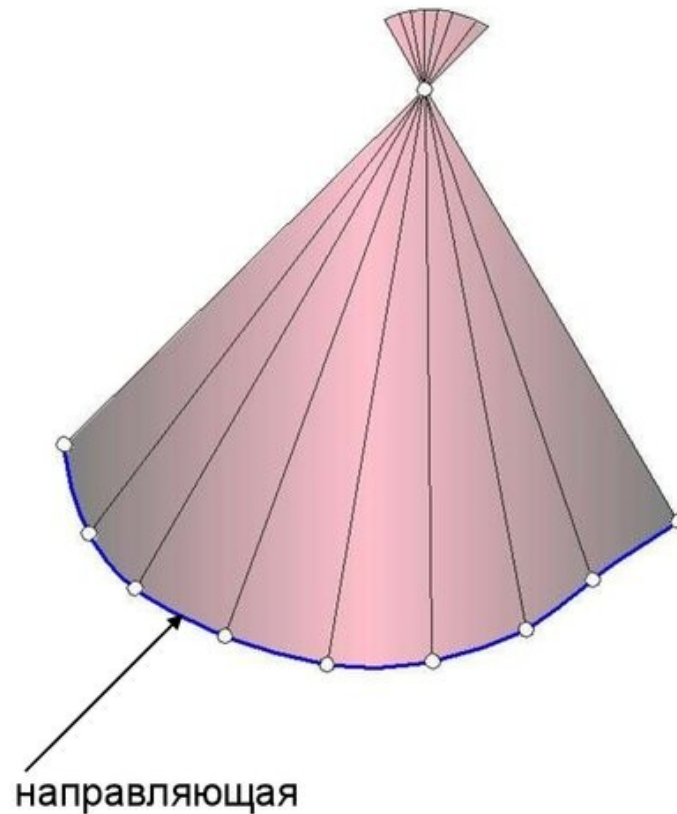
Поверхность цилиндрическая

- образуется прямой линией, сохраняющей во всех своих положениях параллельность некоторой заданной прямой линии и проходящей последовательно через все точки некоторой кривой направляющей линии.



Поверхность коническая

- образуется прямой линией, проходящей через некоторую неподвижную точку и последовательно через все точки некоторой кривой направляющей линии.



Поверхности линейчатые с двумя направляющими и плоскостью параллелизма

- При образовании линейчатой поверхности с помощью плоскости параллелизма образующие должны быть параллельными этой плоскости.
- Образование линейчатой поверхности с помощью плоскости параллелизма является частным случаем общего способа формирования линейчатой поверхности с двумя направляющими.
- В рассматриваемую группу поверхностей входит три подгруппы поверхностей:
 - а) цилиндроиды;
 - б) коноиды;
 - в) косые плоскости.

Поверхности с плоскостью параллелизма. Поверхности Каталана.

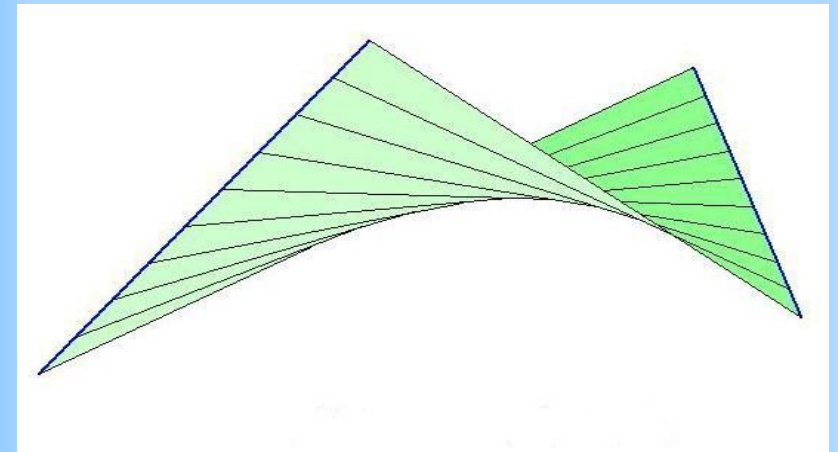
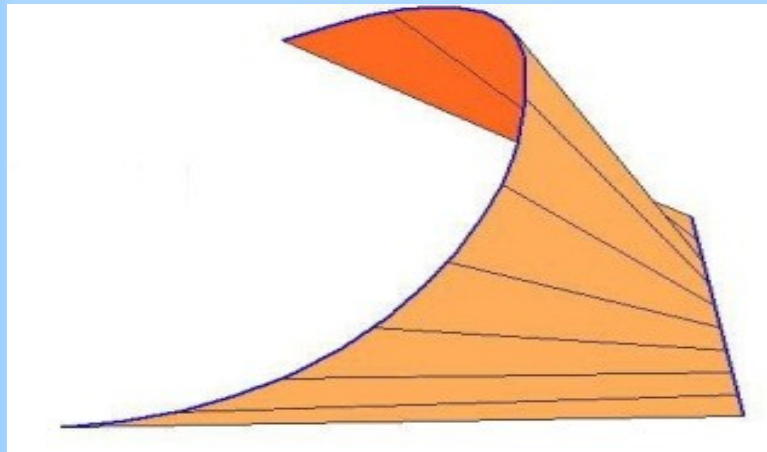
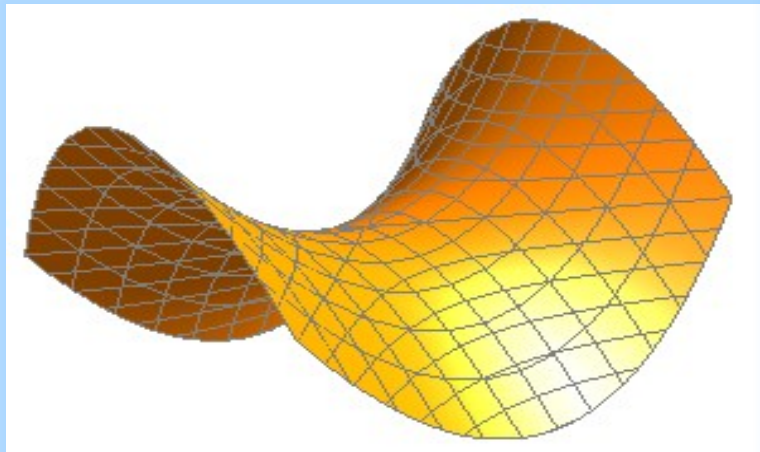
Линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма - поверхности с двумя направляющими, образующие при этом параллельны одной плоскости, называемой плоскостью параллелизма.

К линейчатым поверхностям с плоскостью параллелизма относятся:

цилиндроид;

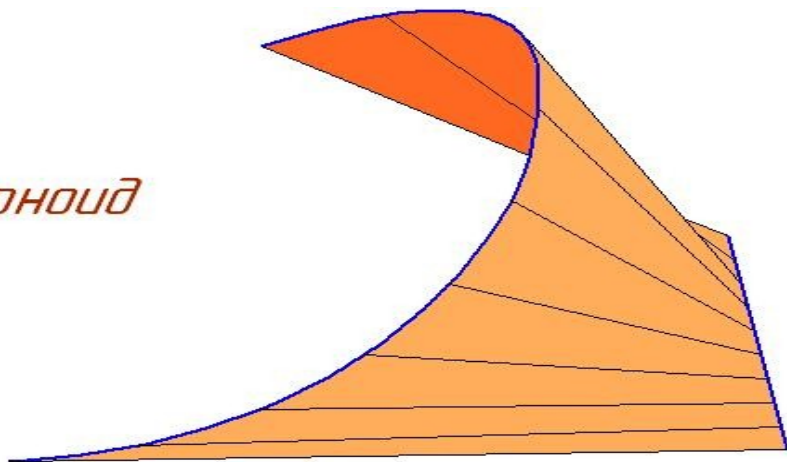
коноид;

**гиперболический
параболоид.**

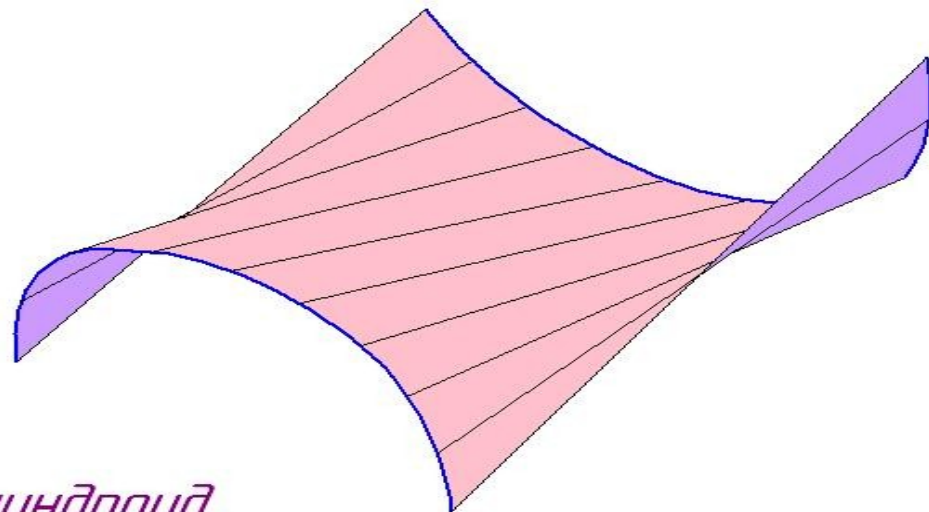


ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА (поверхности Каталана)

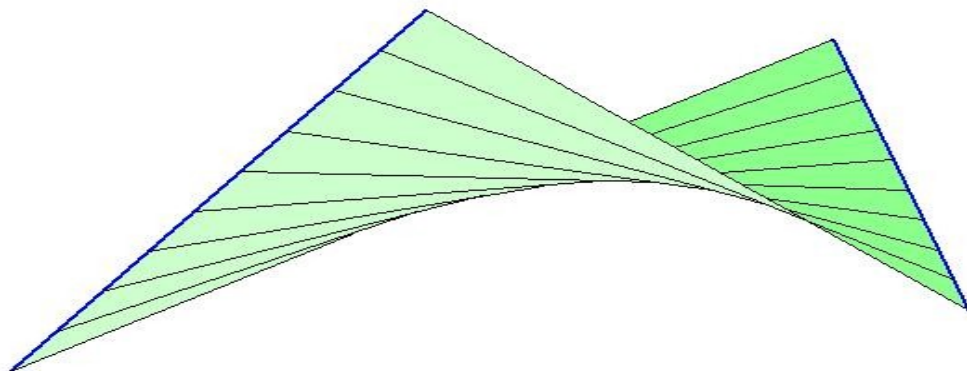
конус



цилиндр

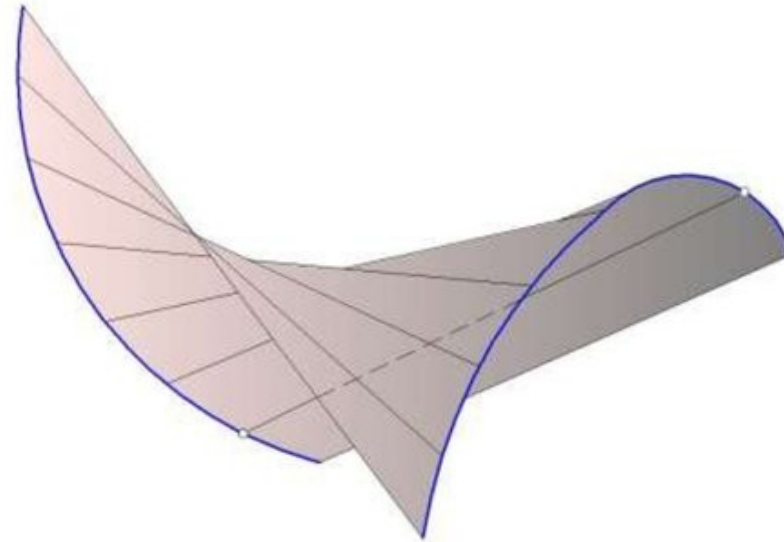


косая плоскость



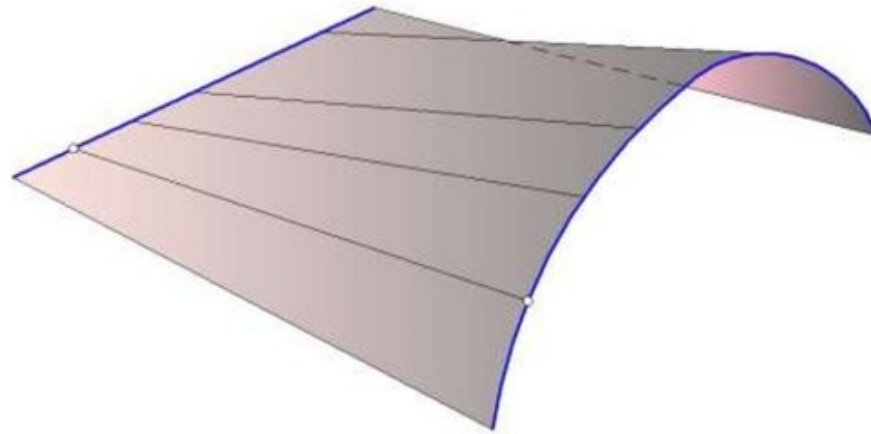
Поверхность цилиндроида

- образуется при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости (плоскости параллелизма) и пересекающей две кривые линии (направляющие).



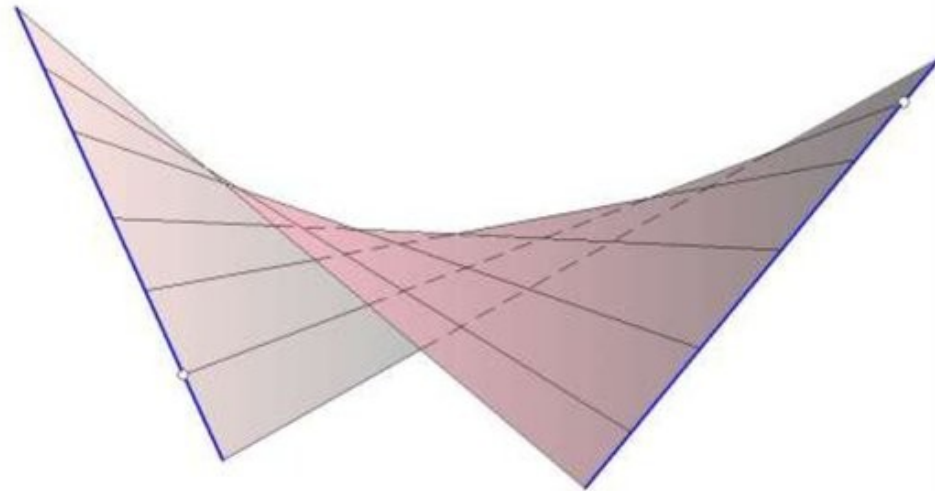
Поверхность коноида

- образуется при перемещении прямой линии, во всех своих положениях сохраняющей параллельность некоторой заданной плоскости (плоскости параллелизма) и пересекающей две направляющие, одна из которых – кривая, а другая – прямая линия.



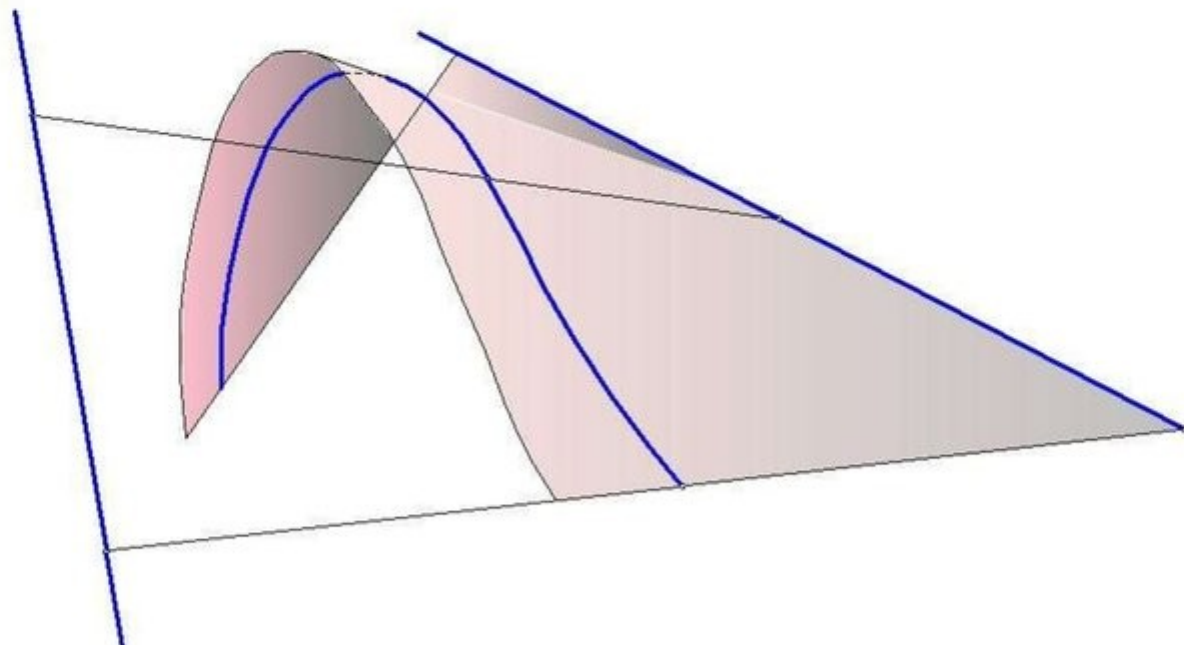
Косая плоскость (поверхность гиперболического параболоида)

- образуется при перемещении прямой линии, по двум направляющим – скрещивающимся прямым линиям – параллельно некоторой плоскости параллелизма.



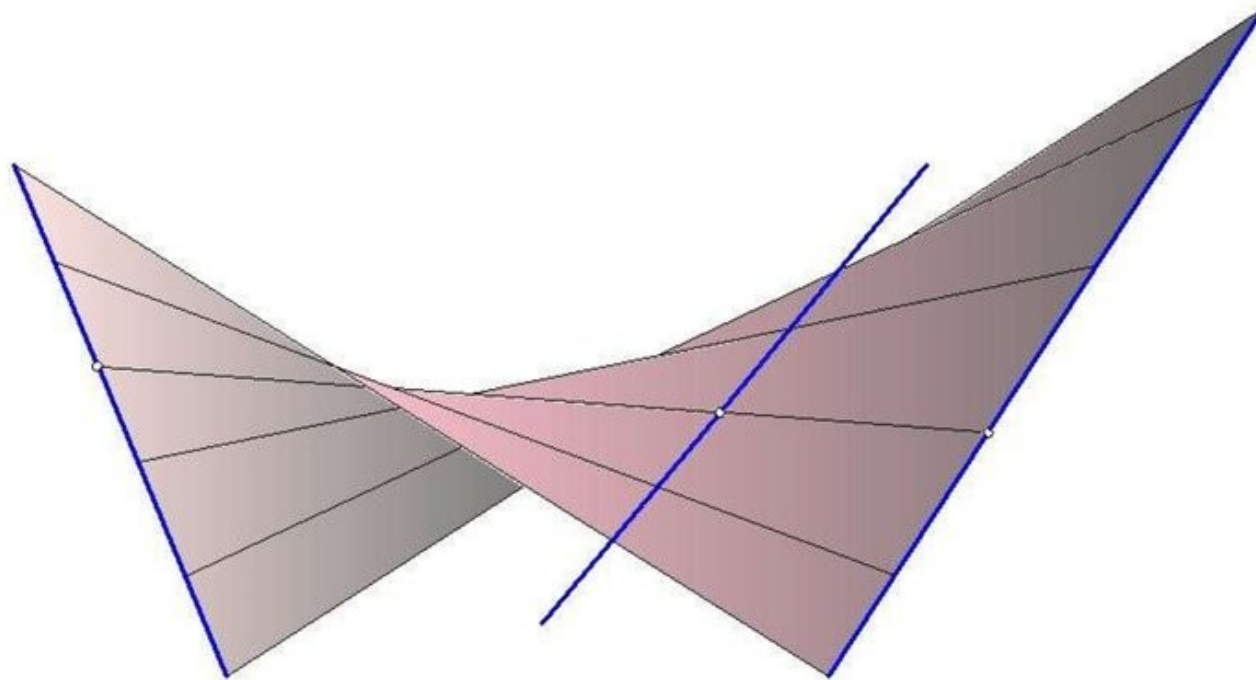
Поверхность дважды косоугольника

- образуется при перемещении прямой линии по трем направляющим, две из которых прямые линии, а третья – кривая.



Поверхность однополостного гиперболоида

- образуется при перемещении прямой линии по трем направляющим – скрещивающимся прямым.



Поверхности нелинейчатые



```
graph TD; A[Поверхности нелинейчатые] --> B[Образующая переменного вида]; A --> C[Образующая постоянного вида]; B --> D[Поверхность общего вида]; D --> E[Каналовая поверхность]; E --> F[Циклическая поверхность]; C --> G[Поверхность общего вида]; G --> H[Трубчатая поверхность];
```

Образующая пере-
менного вида

Поверхность общего
вида

Каналовая
поверхность

Циклическая
поверхность

Образующая постоян-
ного вида

Поверхность общего
вида

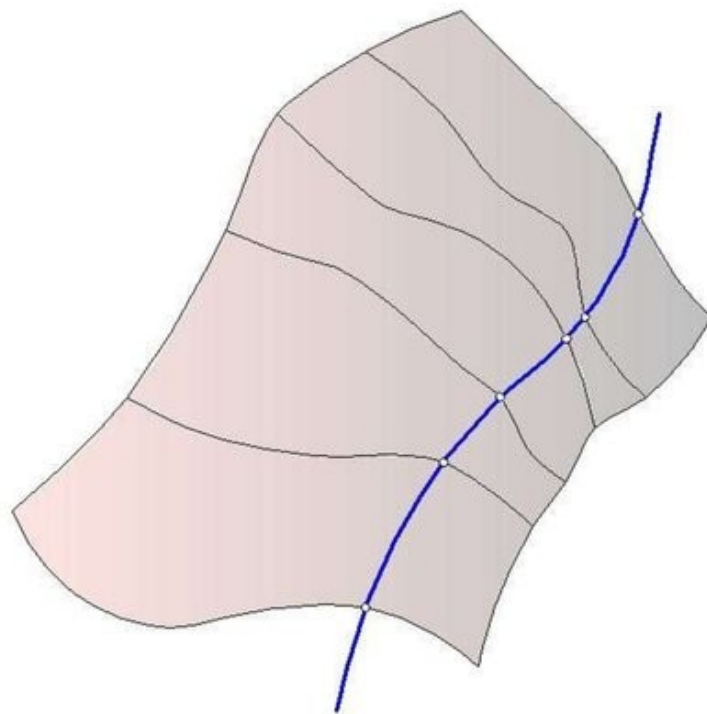
Трубчатая
поверхность

Поверхности нелинейчатые с образующей переменного вида

- Рассматриваемая группа поверхностей включает в себя три подгруппы:
 - а) поверхность общего вида;
 - б) каналовая поверхность;
 - в) циклическая поверхность.

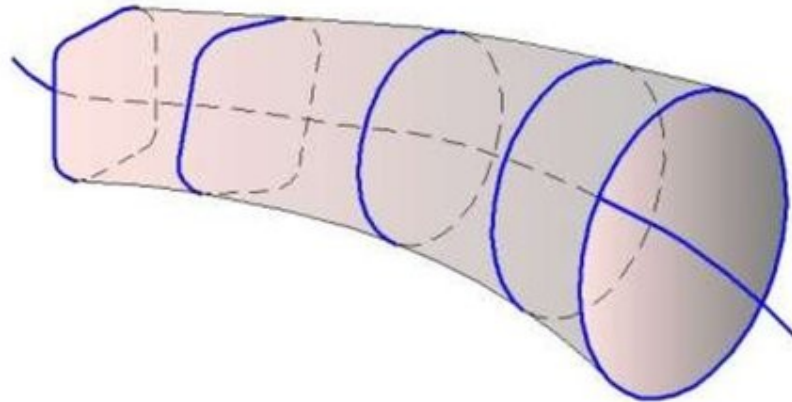
Поверхность общего вида

- образуется перемещением произвольной (плоской или пространственной) кривой по криволинейной направляющей.



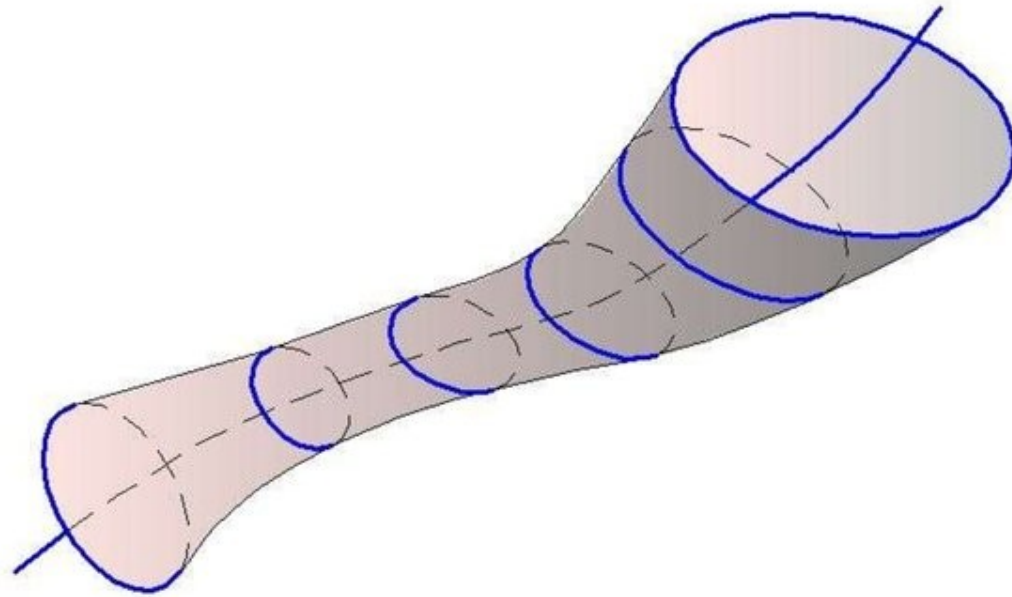
Каналовая поверхность

- образуется непрерывным каркасом замкнутых плоских сечений, определенным образом ориентированных в пространстве. Площади этих сечений монотонно изменяются в процессе их перемещения по направляющей.
- Каналовая поверхность может быть использована для создания переходных участков между двумя поверхностями различных типов трубопроводов.



Циклическая поверхность

- образуется с помощью окружности, центр которой перемещается по криволинейной направляющей.

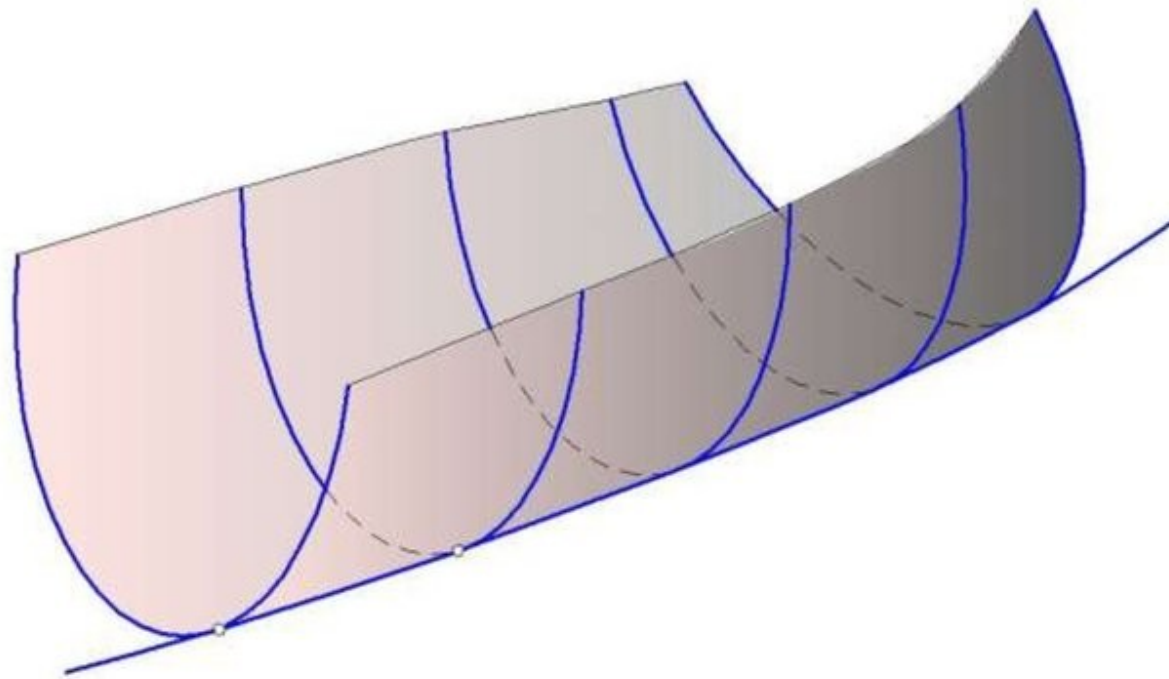


Поверхности нелинейчатые с образующей постоянного вида

- Эта группа поверхностей включает в себя две подгруппы:
- а) поверхность общего вида;
- б) трубчатая поверхность.

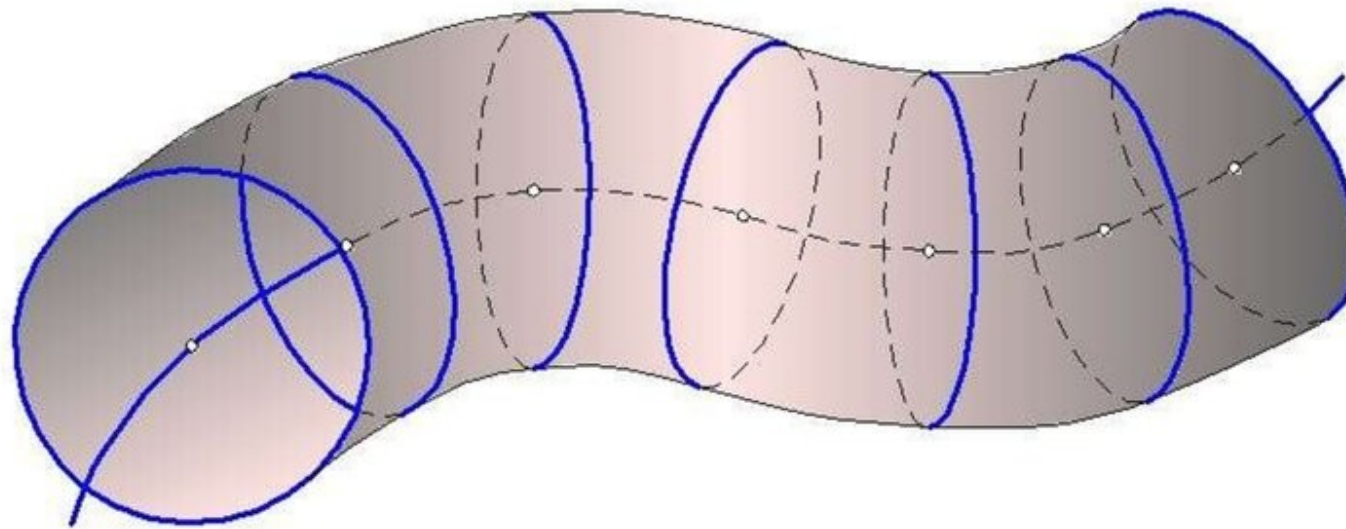
Поверхность общего вида

- образуется произвольной (плоской или пространственной) кривой, перемещающейся по направляющей линии.



Трубчатая поверхность

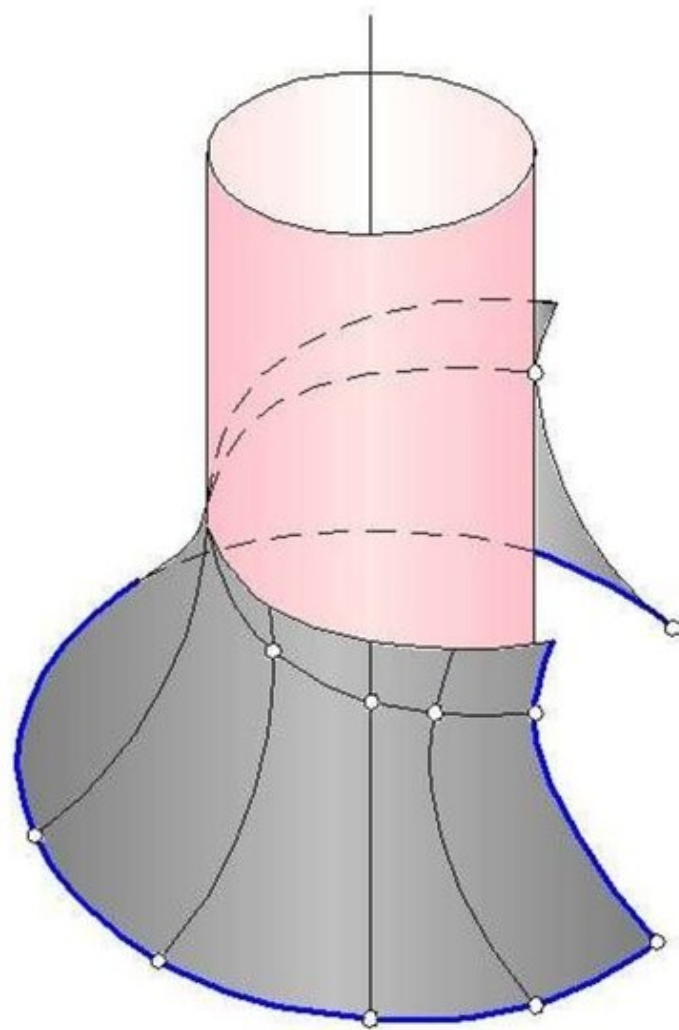
- образуется при движении окружности постоянного радиуса по криволинейной направляющей; плоскость окружности все время остается перпендикулярной к направляющей.
- Трубчатая поверхность может быть образована также движением сферы постоянного радиуса, центр которой перемещается по криволинейной направляющей.



Поверхность винтовая

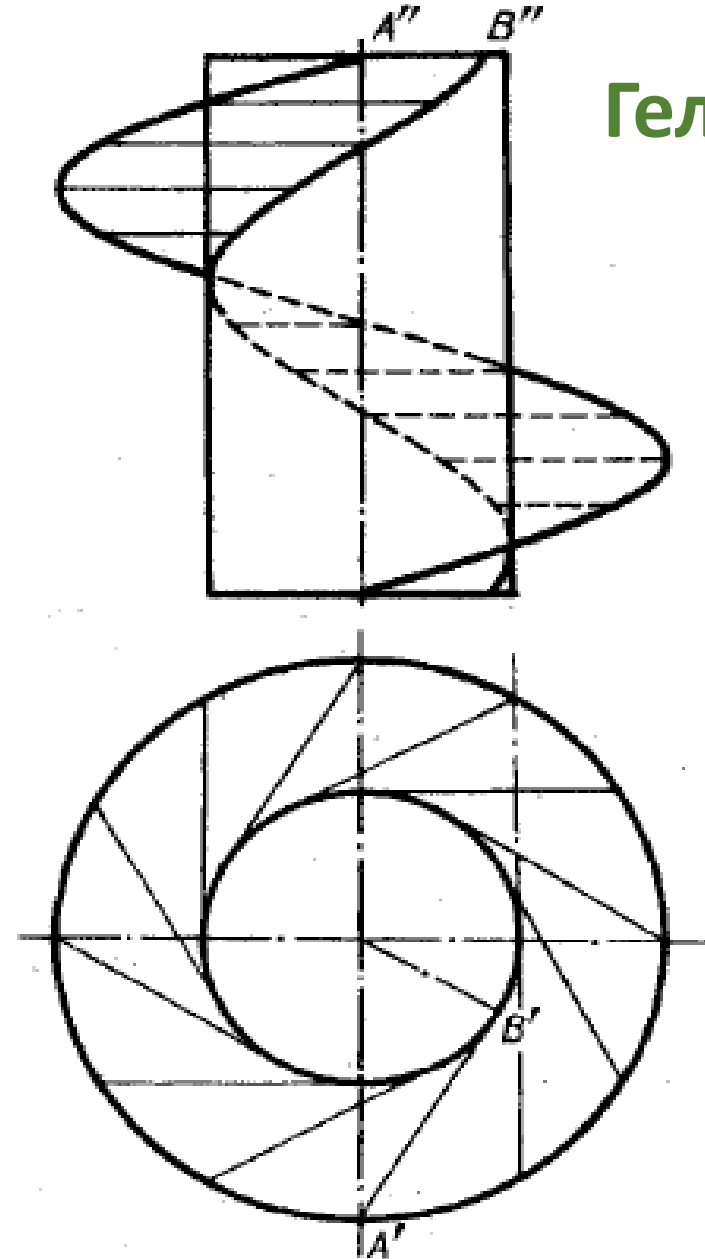
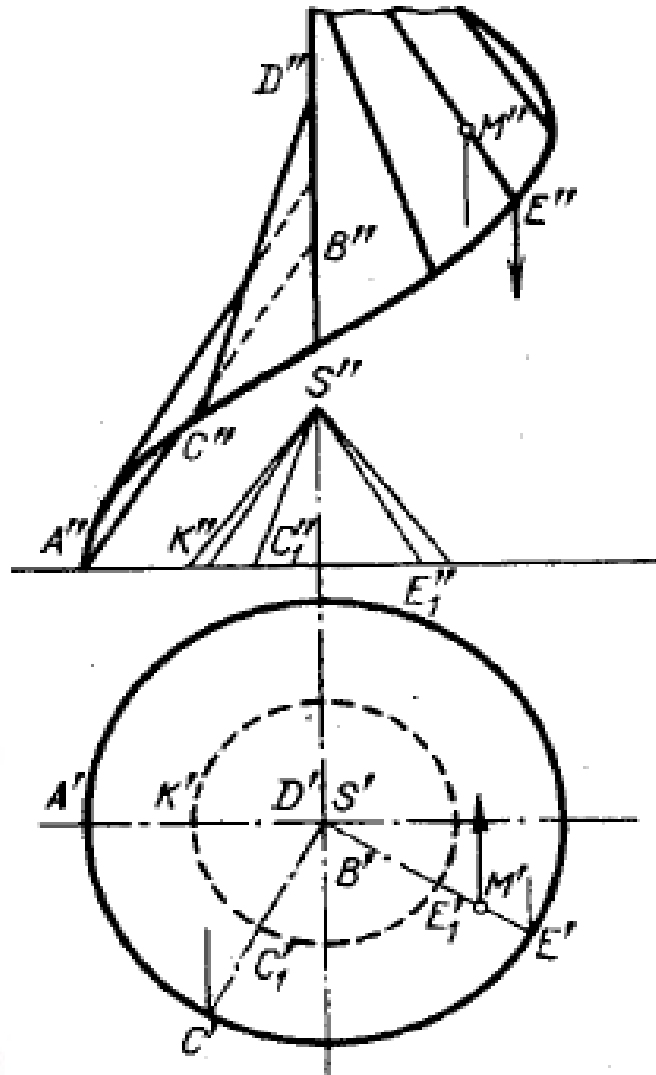
- образуется при винтовом перемещении образующей.
- Винтовое перемещение характеризуется вращением вокруг оси и одновременно поступательным движением, параллельным этой оси.
- Винтовые поверхности могут быть:
 - а) с криволинейной образующей;
 - б) с прямолинейной образующей.

Винтовая поверхность с криволинейной образующей



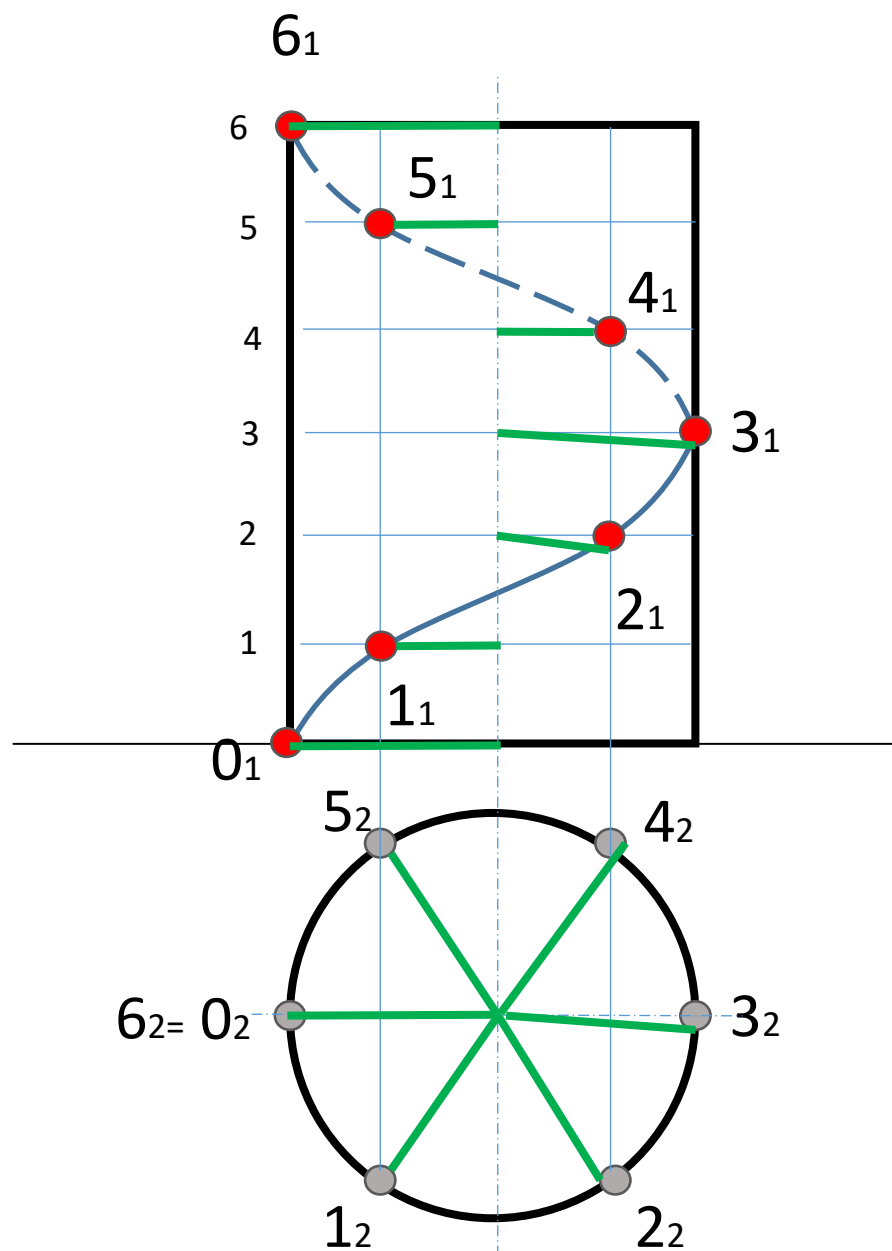
Винтовая поверхность с прямолинейной образующей

Геликоид наклонный



Геликоид прямой



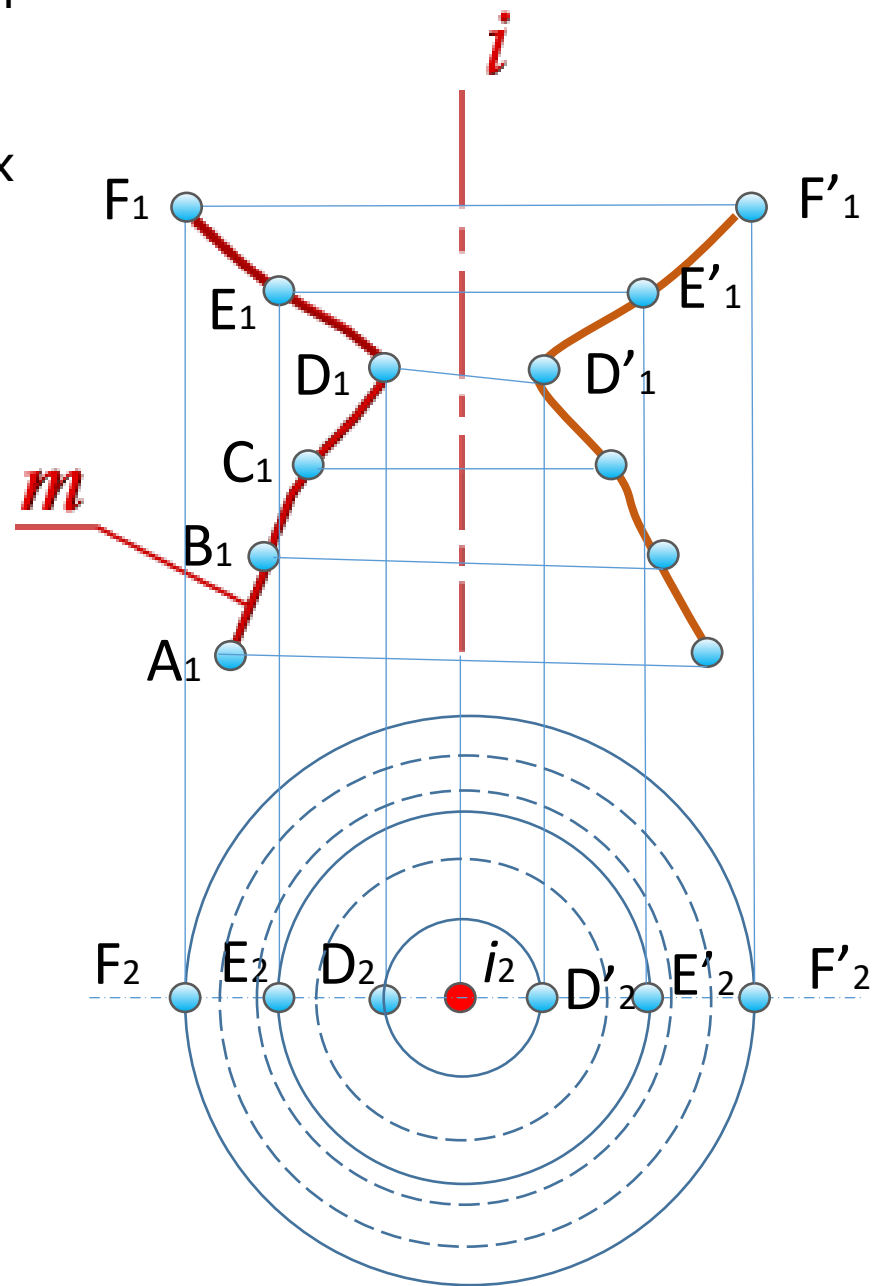
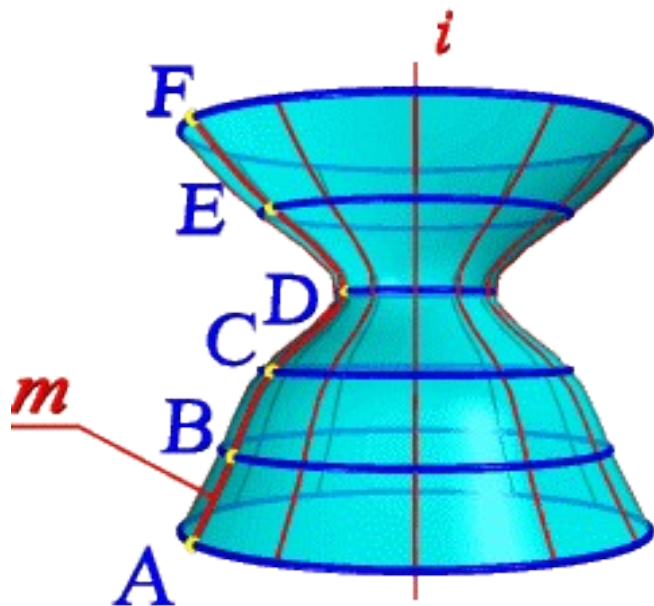


Поверхности вращения – это поверхности созданные при вращении образующей m вокруг оси i .

Геометрическая часть определителя состоит из двух линий: образующей m и оси i .

Алгоритмическая часть включает две операции:

1. на образующей m выделяют ряд точек $A, B, C, \dots F$,
2. каждую точку вращают вокруг оси i .

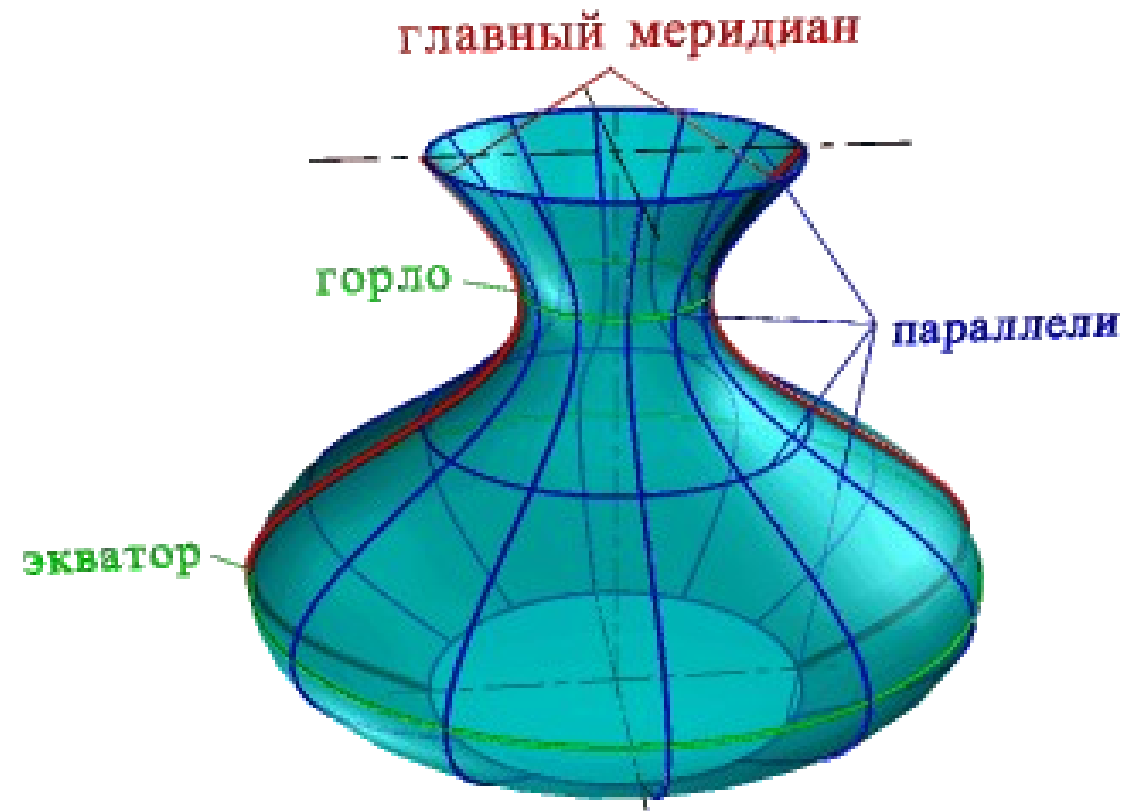


Так создается каркас поверхности, состоящей из множества окружностей, плоскости которых расположены перпендикулярно оси i . Эти окружности называются **параллелями**; наименьшая параллель называется **горлом**, наибольшая – **экватором**.

Из закона образования поверхности вращения вытекают два основных свойства:

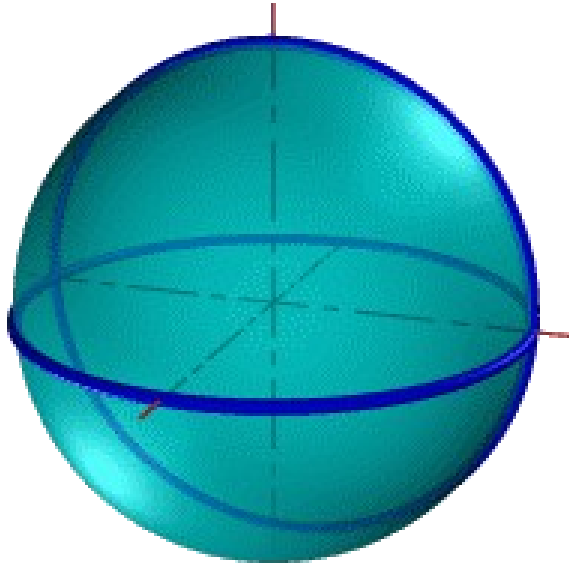
1. Плоскость перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности – **параллели**.
2. Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум симметричным относительно оси линиям – **меридианам**.

Плоскость, проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций называется плоскостью главного меридиана, а линия, полученная в сечении, – **главным меридианом**.

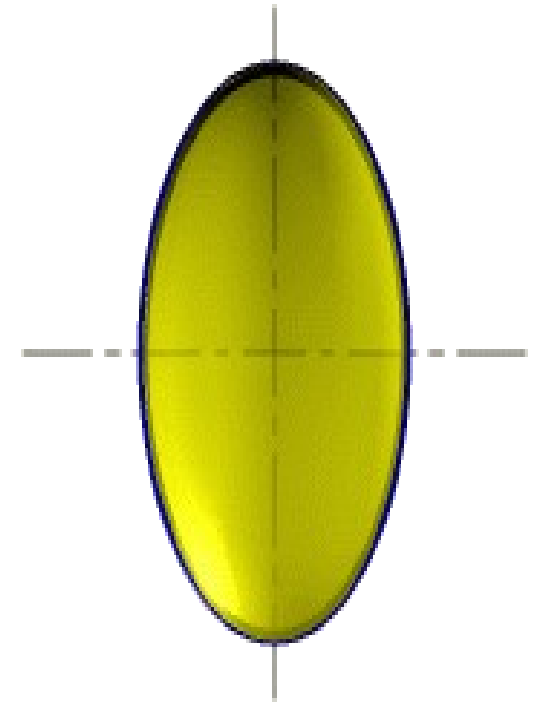
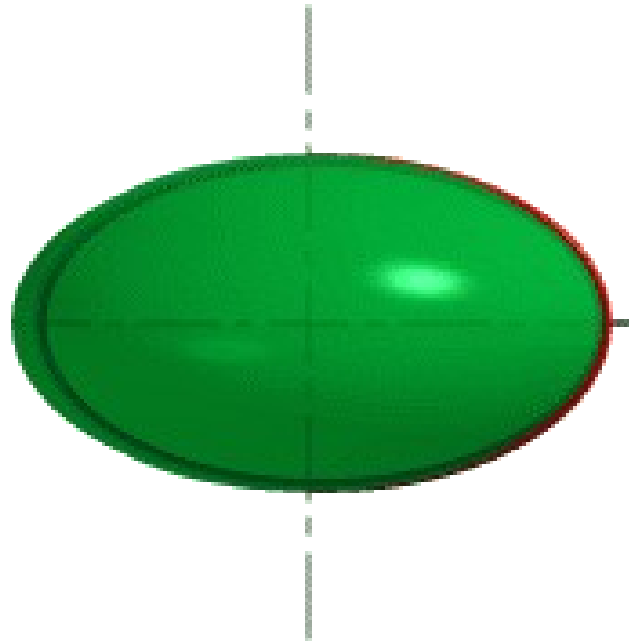


Рассмотрим наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими:

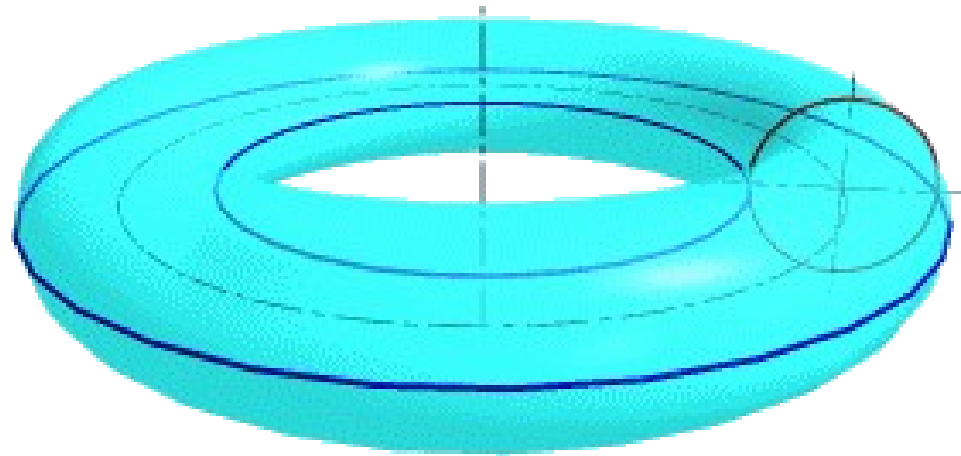
Сфера – образуется вращением окружности вокруг её диаметра.



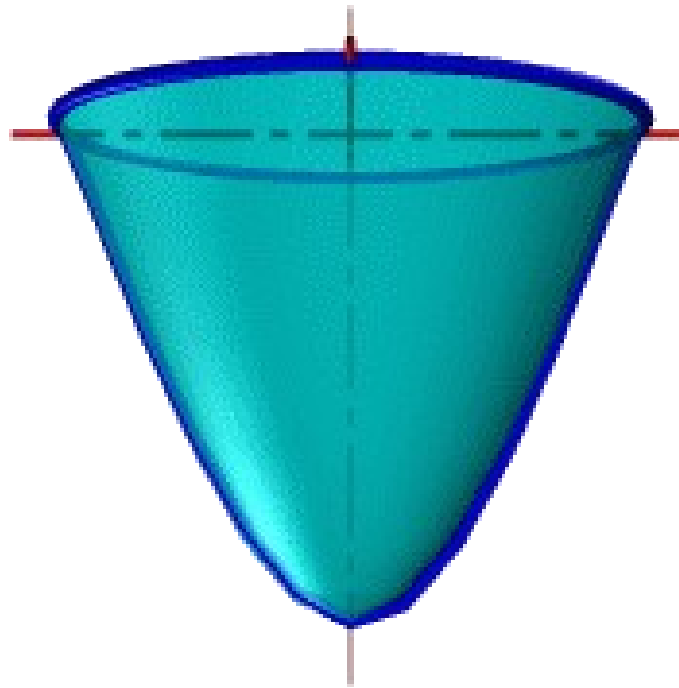
При сжатии или растяжении сферы она преобразуется в **эллипсоиды**, которые могут быть получены вращением эллипса вокруг одной из осей: если вращение вокруг малой оси, то эллипсоид называется **сжатым** или **сфероидом**, если вокруг большой – **вытянутым**



Тор – образуется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр окружности

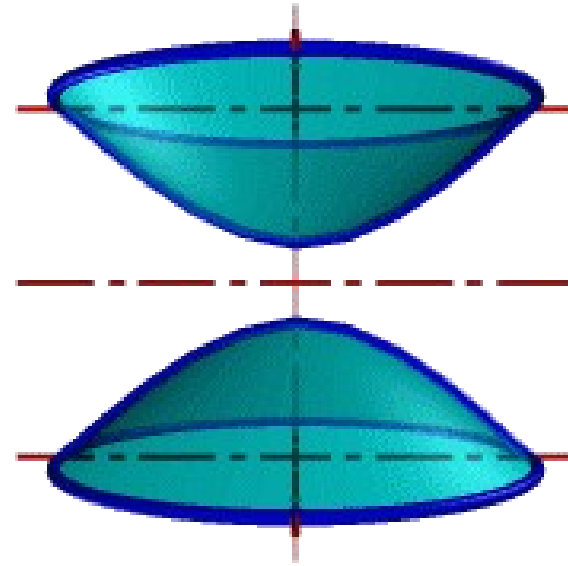
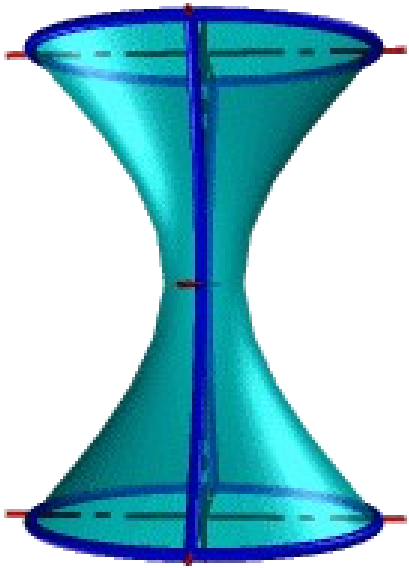


Параболоид вращения – образуется при вращении параболы вокруг своей оси

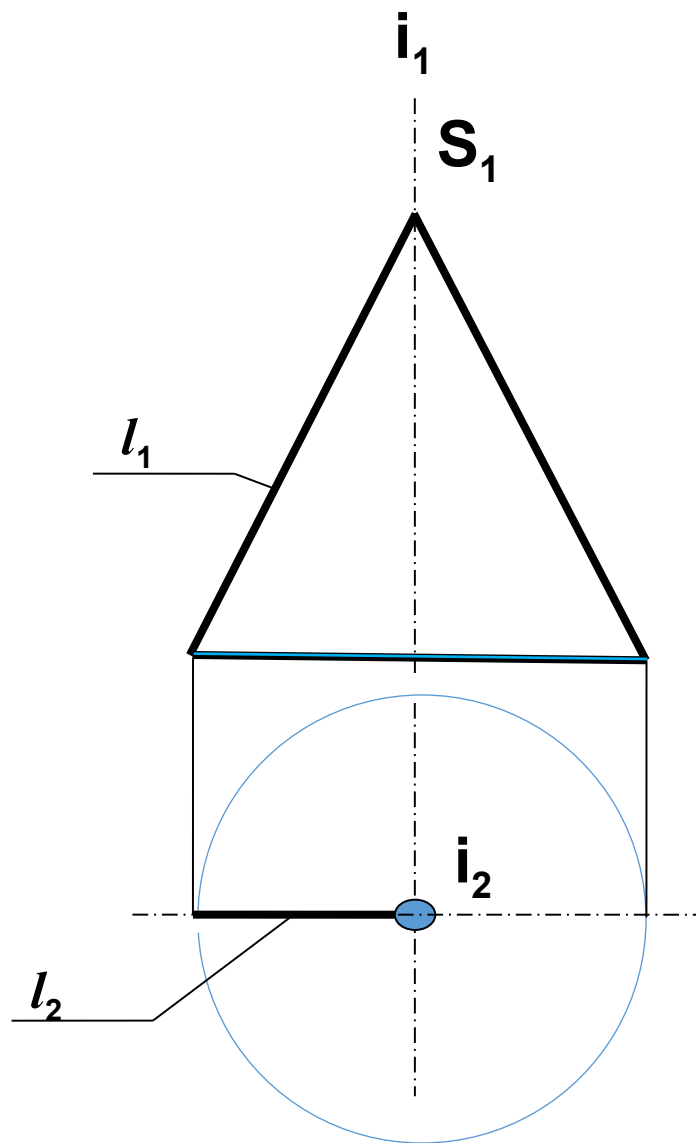


Гиперболоид вращения – различают одно и двух полостной гиперболоиды вращения.

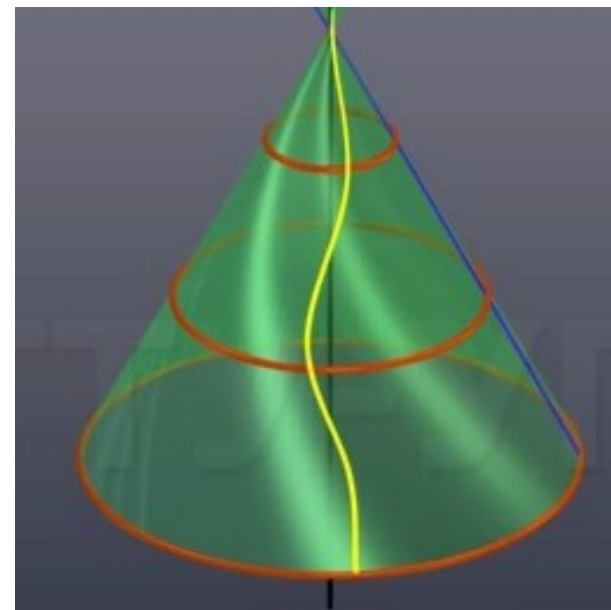
Первый получается при вращении вокруг мнимой оси, а второй – вращением гиперболы вокруг действительной оси.

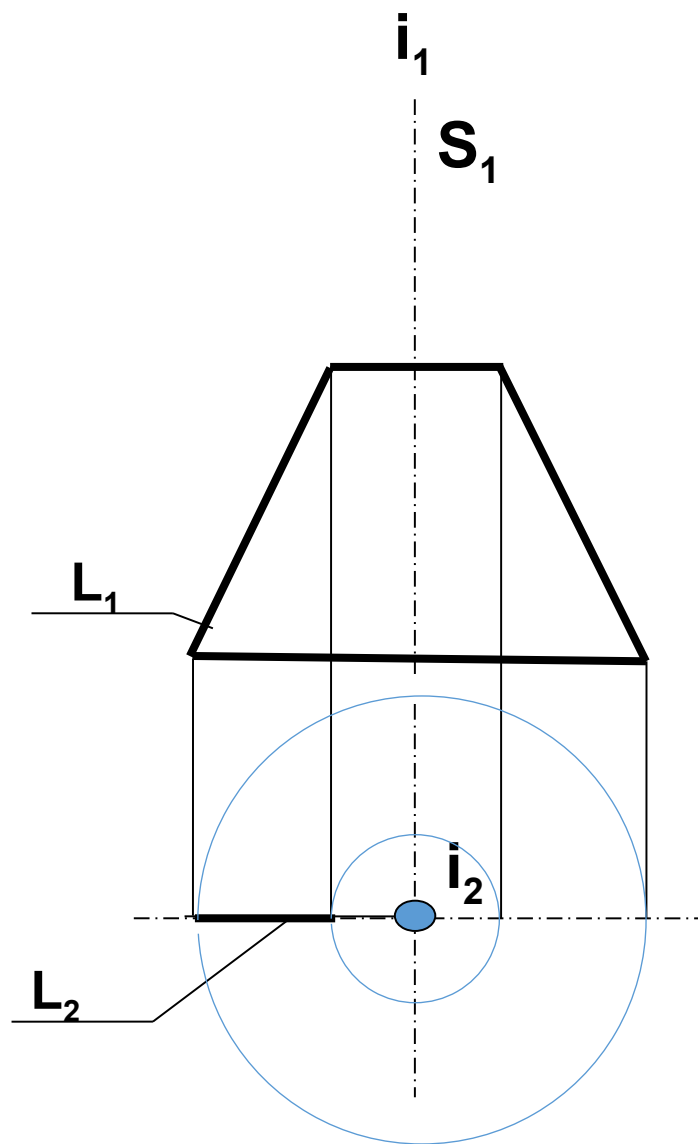


ПОВЕРХНОСТЬ КОНУСА ВРАЩЕНИЯ

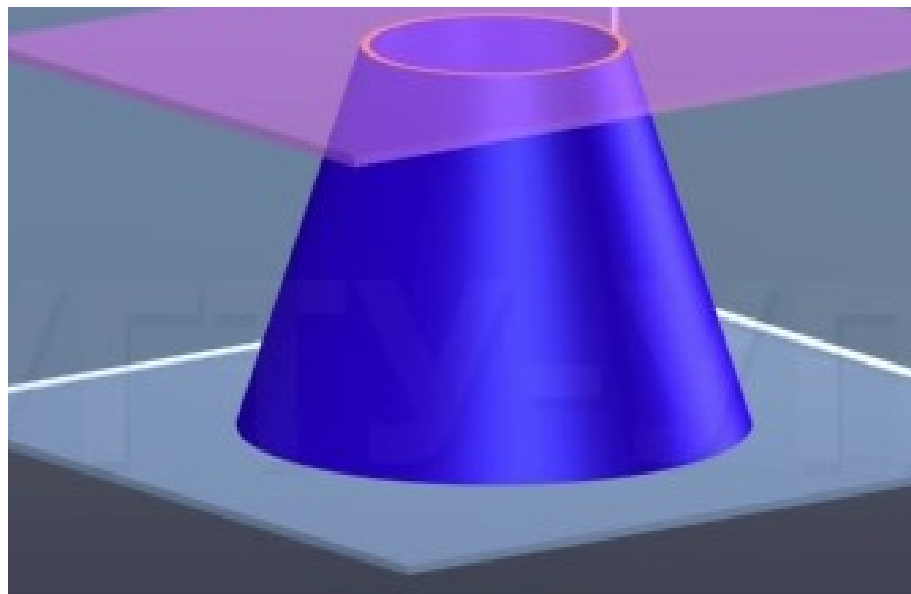


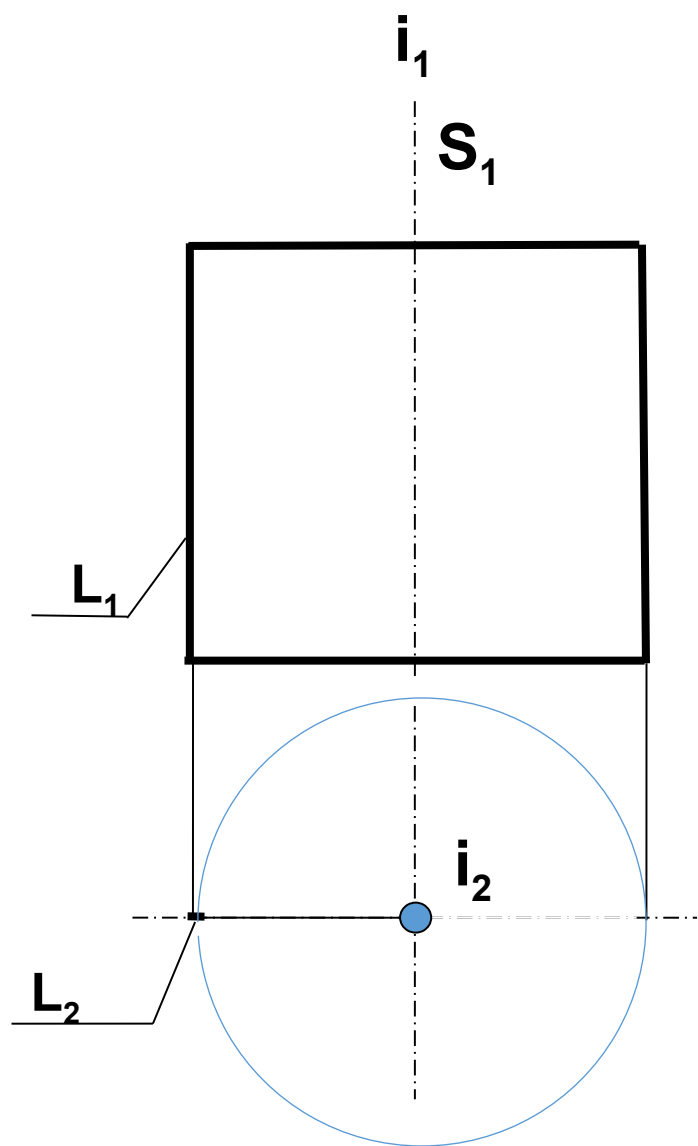
1. i – ось вращения
2. L – прямолинейная образующая
3. S – вершина конической поверхности





1. i – ось вращения
2. L – прямолинейная образующая
3. S – вершина конической поверхности





1. **i** – ось вращения
2. **L** – прямолинейная образующая
3. **S** – вершина конической поверхности

