Курс лекций по дисциплине «Начертательная геометрия»

лектор

Каражанова Дарига Дюсеновна

Кандидат педагогических наук

ассоциированный профессор Satbayev University

Лекция 6

Многогранники

К.п.н., ассоциированный профессор

Каражанова Дарига Дюсеновна

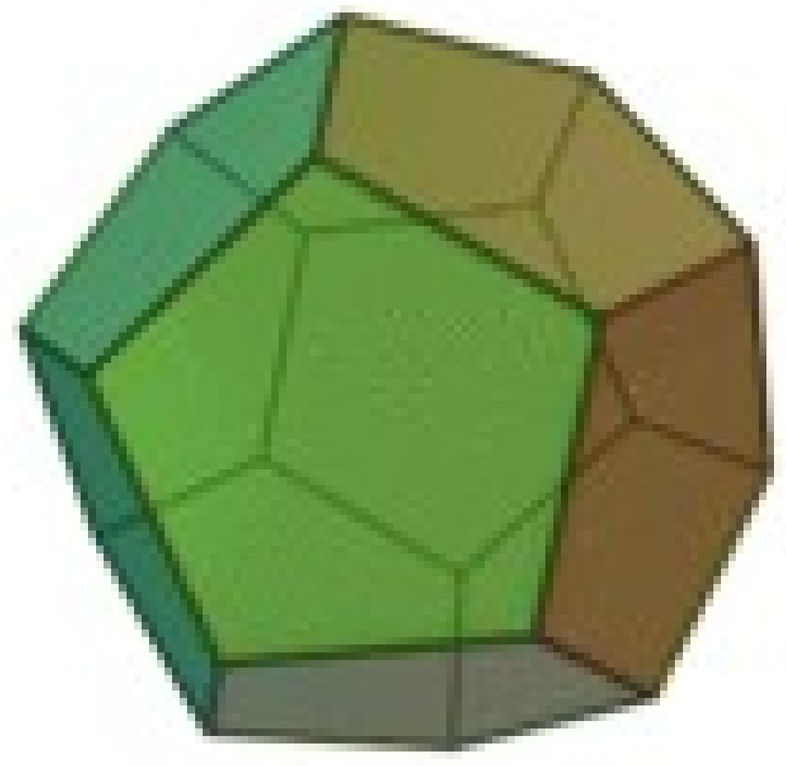
Многогранники

Многогранник - это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело.


Многогранники
Однородные выпуклые
Однородные невыпуклые
Тела Платона
Выпуклые призмы и антипризмы
Тела Архимеда
Невыпуклые полуправильные однородные многогранники
Тела Кеплера-Пуансо
Невыпуклые призмы и антипризмы

Правильными многогранниками

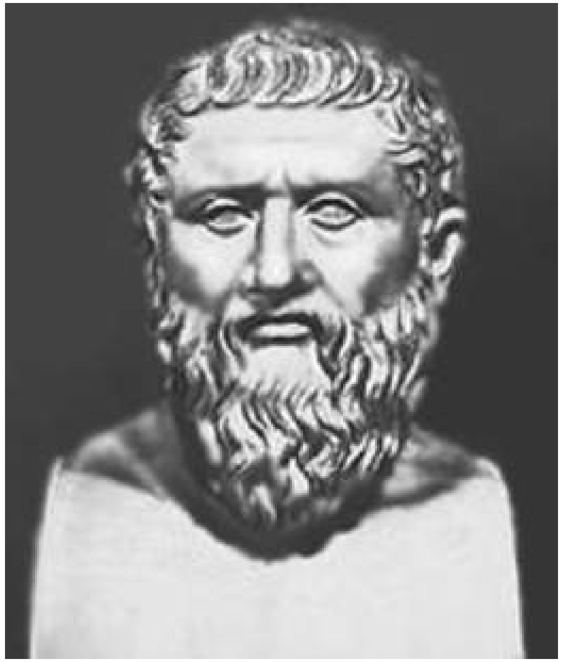
называют выпуклые многогранники, все грани и все углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники.



В каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер .

Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многоугольника равны.

Существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями.

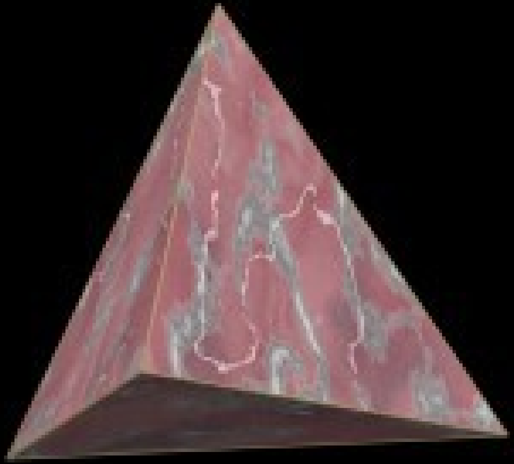


Эти тела еще называют

телами Платона.

Теорема Эйлера: В любом выпуклом многограннике сумма числа граней и числа вершин больше числа ребер на 2

Тела Платона

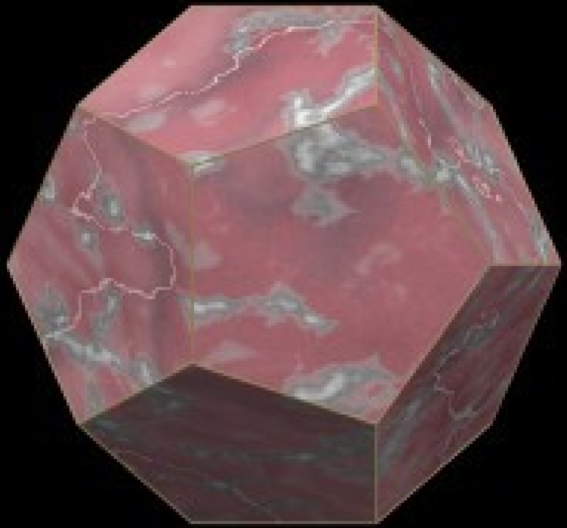


Тетраэдр

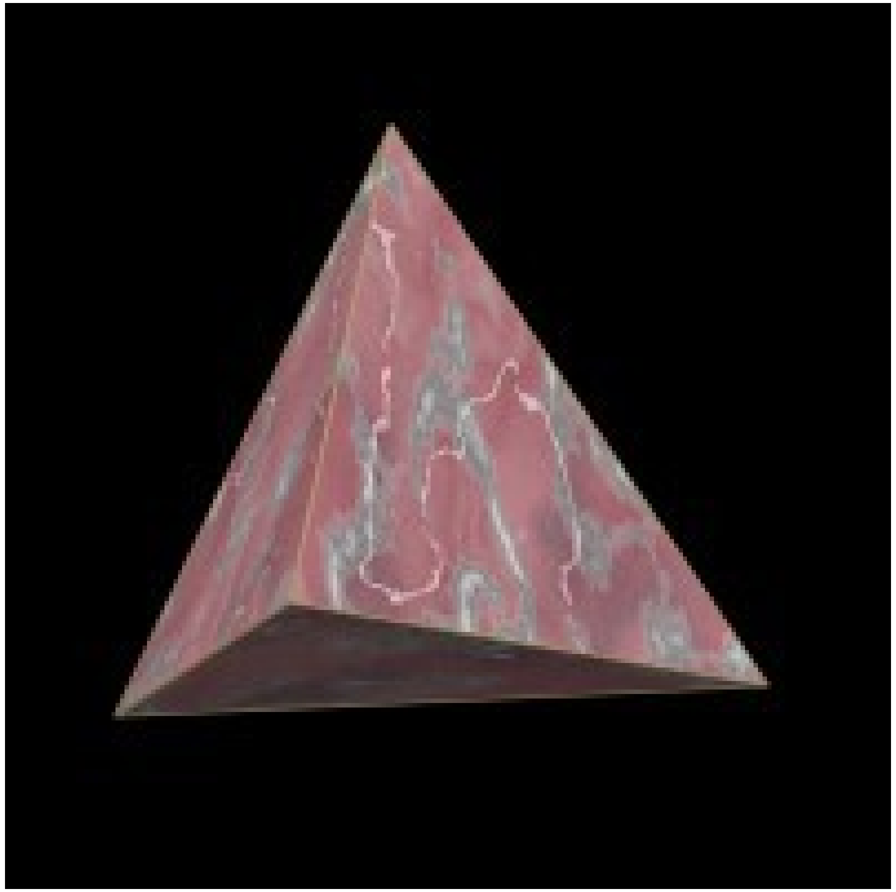
Гексаэдр

Октаэдр

Икосаэдр



Додекаэдр



Тетраэдр

(Четырехгранник)

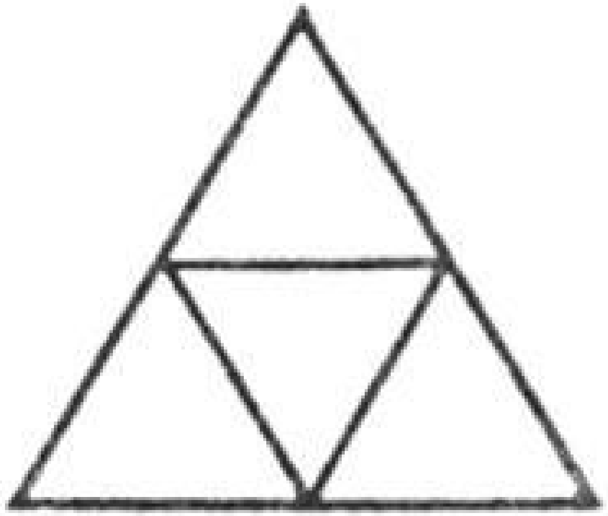
1. **Четыре равносторонних треугольника**
2. **Каждая его вершина является вершиной трех треугольников**
3. **Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180^0**
4. **Грани – 4**

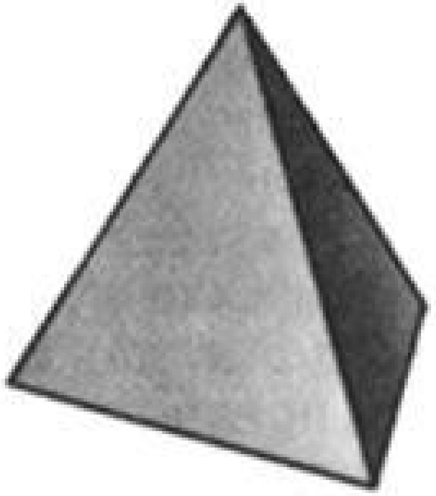
   Вершины – 4

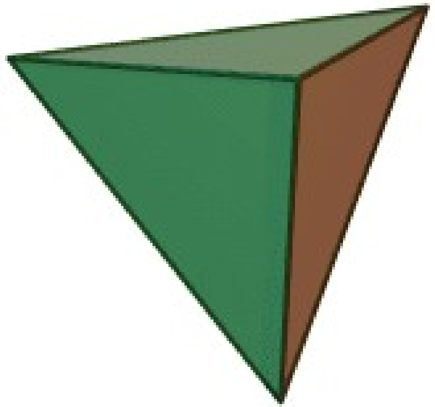
   Ребра – 6

5. Оси симметрии - 3

Плоскости симметрии - 6







Гексаэдр. Куб

(Шестигранник)

1. **Шесть квадратов**
2. **Каждая его вершина является вершиной трех квадратов**
3. **Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270**
4. **Грани – 6**

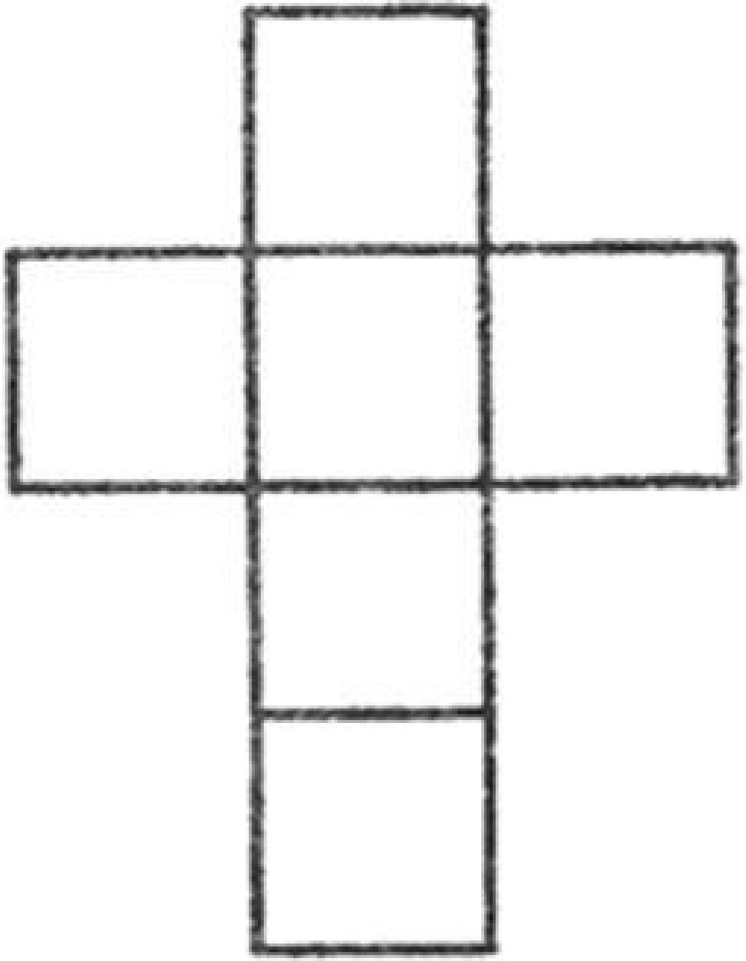
   Вершины – 8

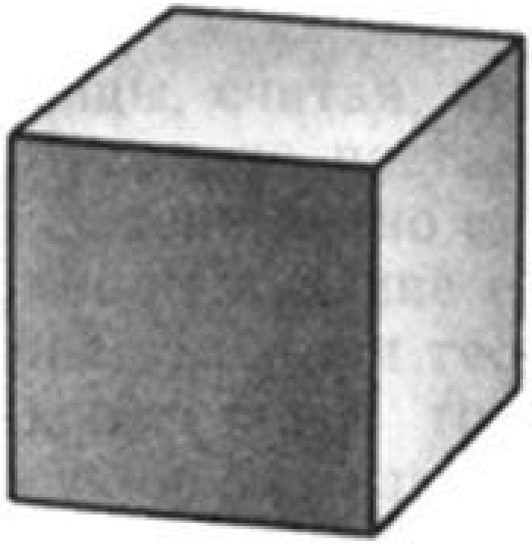
   Ребра – 12

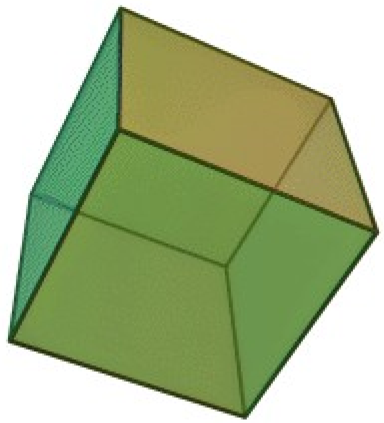
5. Оси симметрии - 9

Плоскости симметрии – 9

Имеет центр симметрии – центр куба.







Октаэдр

(Восмигранник)

1. **Восемь равносторонних треугольников**
2. **Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников**
3. **Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240**
4. **Грани – 8**

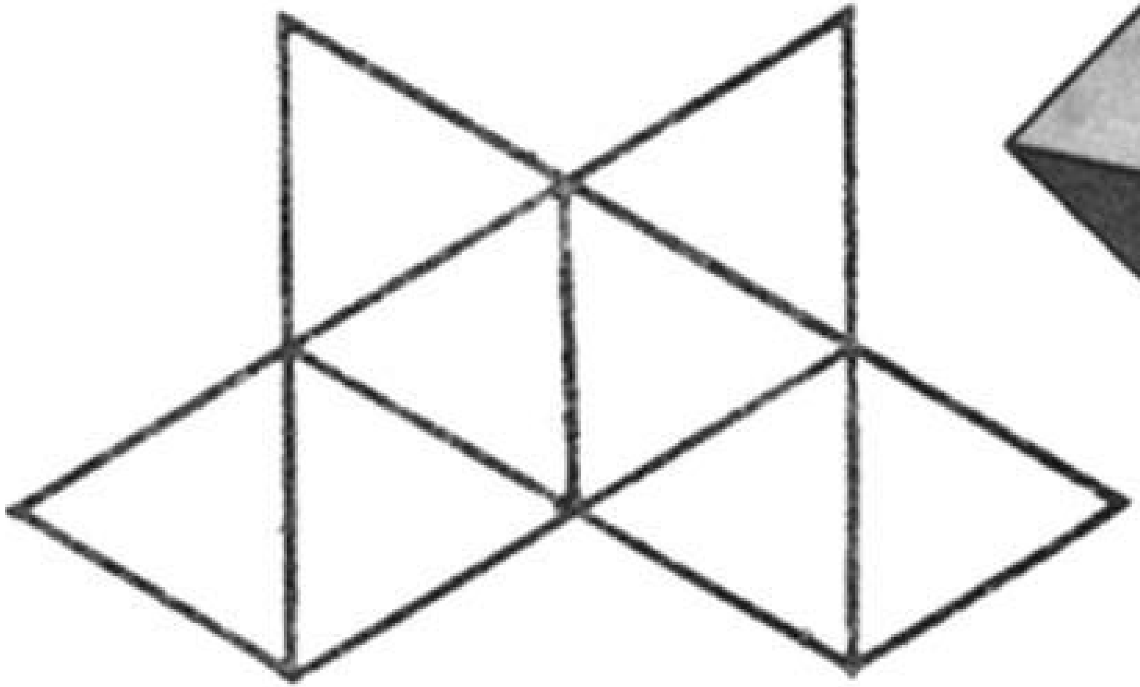
   Вершины – 6

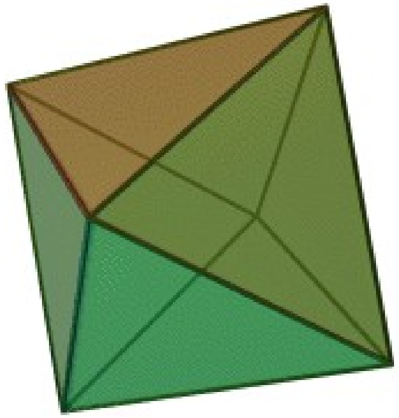
   Ребра – 12

5. Оси симметрии - 9

Плоскости симметрии – 9

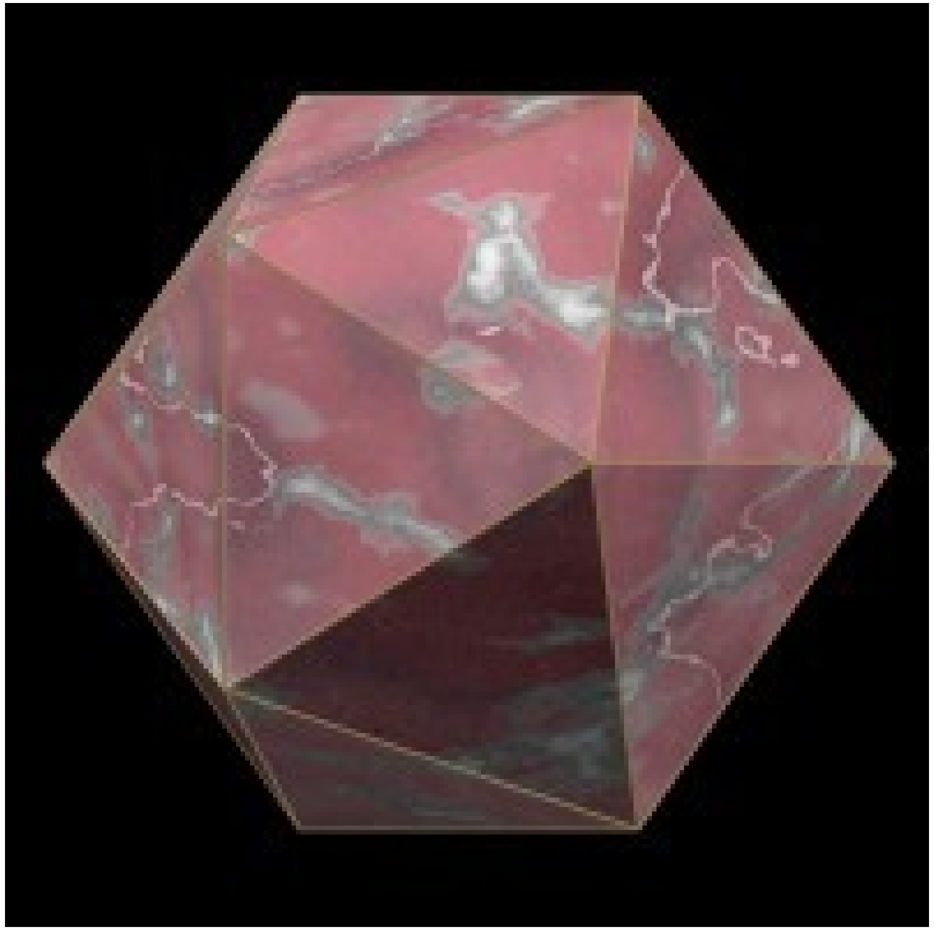
Имеет центр симметрии – центр октаэдра





Икосаэдр

(Двадцатигранник)



1. Двадцать равносторонних треугольников
2. Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников
3. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300
4. Грани – 20

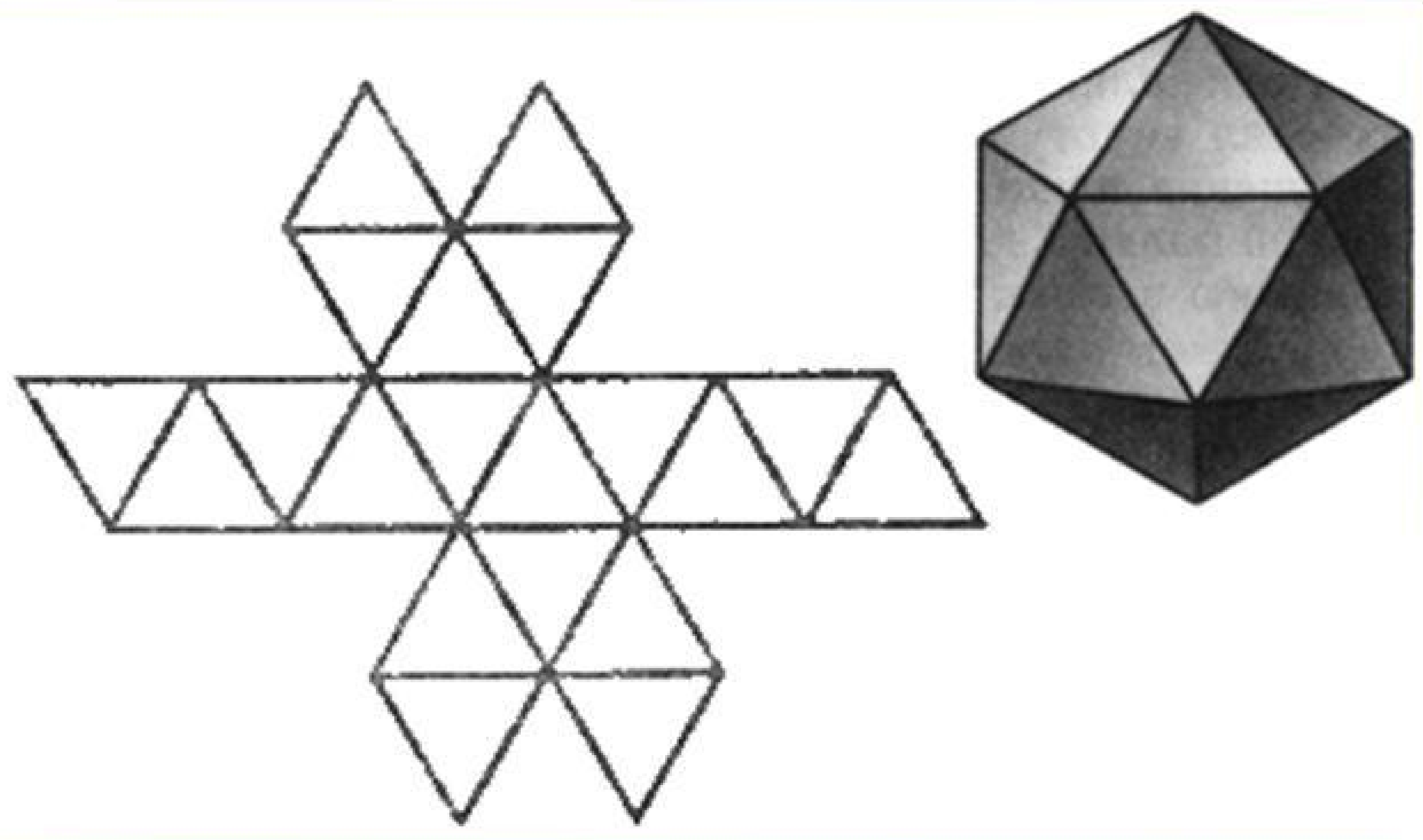
   Вершины – 12

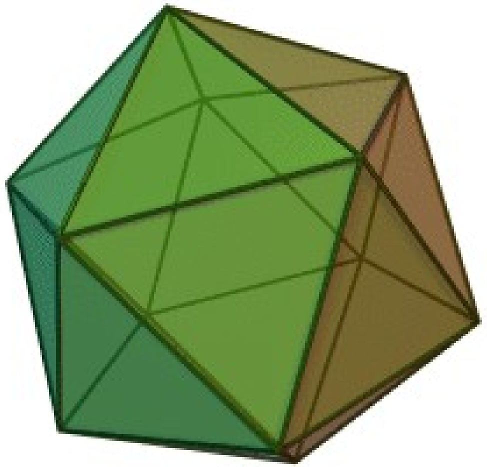
   Ребра – 30

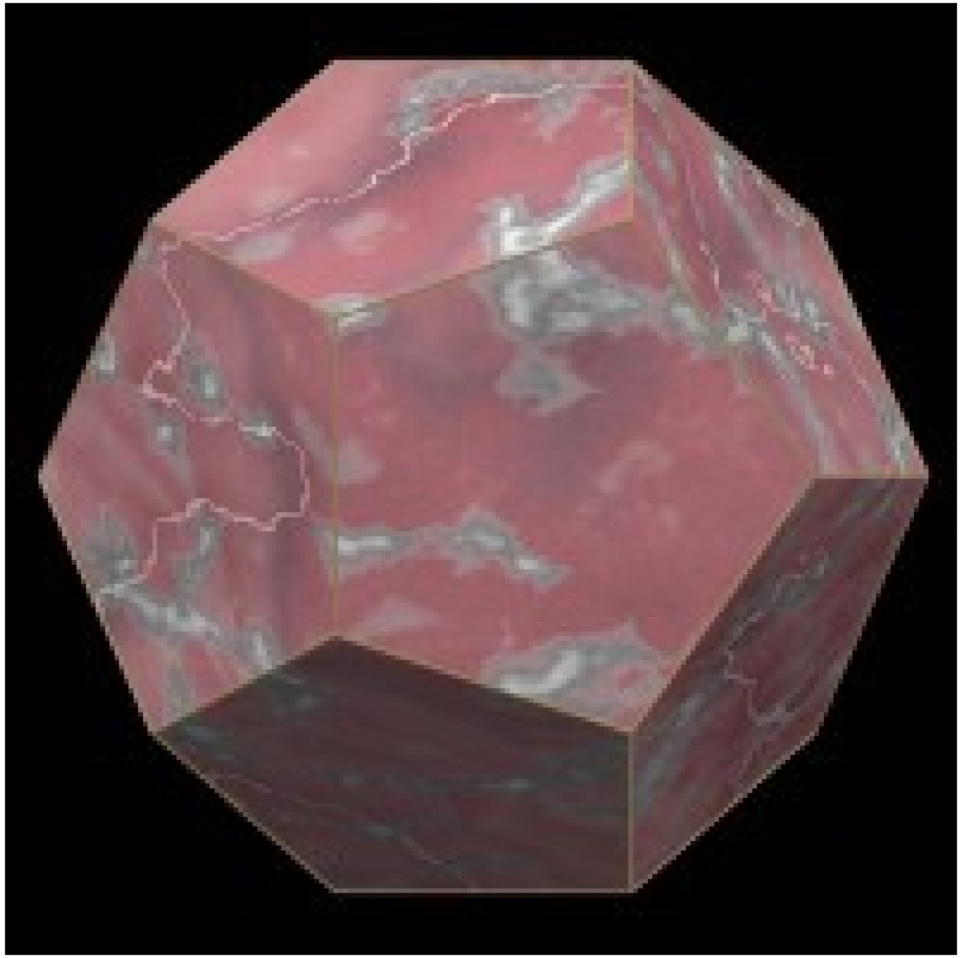
5. Имеет центр симметрии – центр икосаэдра

   Оси симметрии - 15

   Плоскости симметрии – 15







Додекаэдр

(Двенадцатигранник)

1.Двенадцать равносторонних пятиугольников

2.Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников

3.Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324

4.Грани – 12

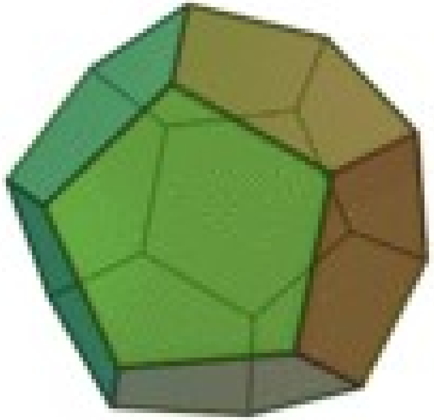
Вершины – 20

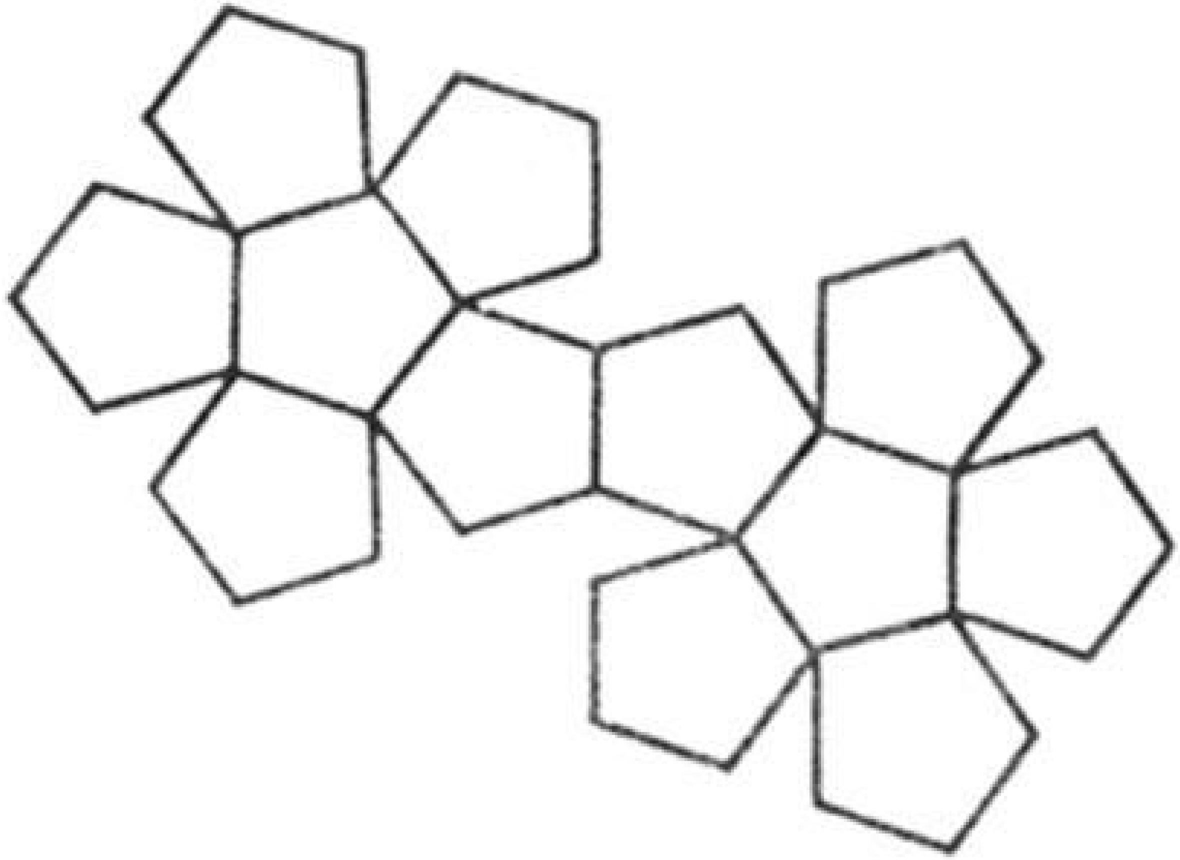
Ребра – 30

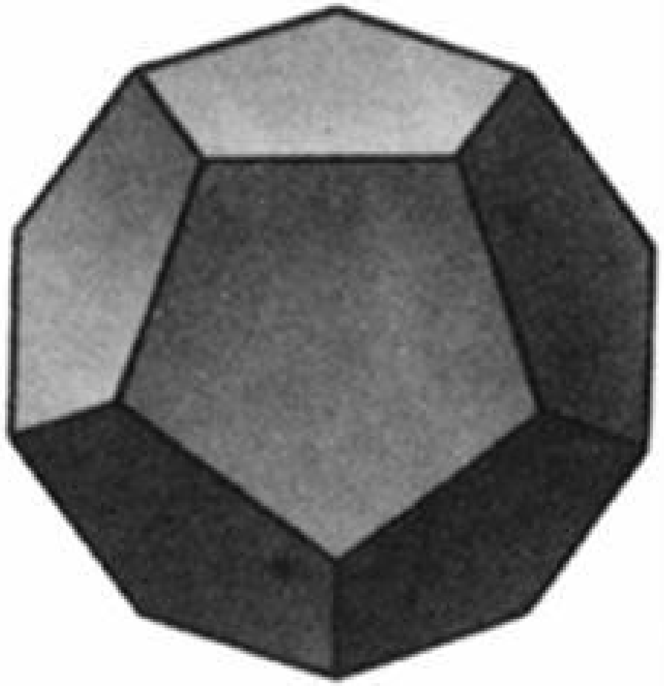
5. Имеет центр симметрии – центр додекаэдра

Оси симметрии - 15

Плоскости симметрии – 15

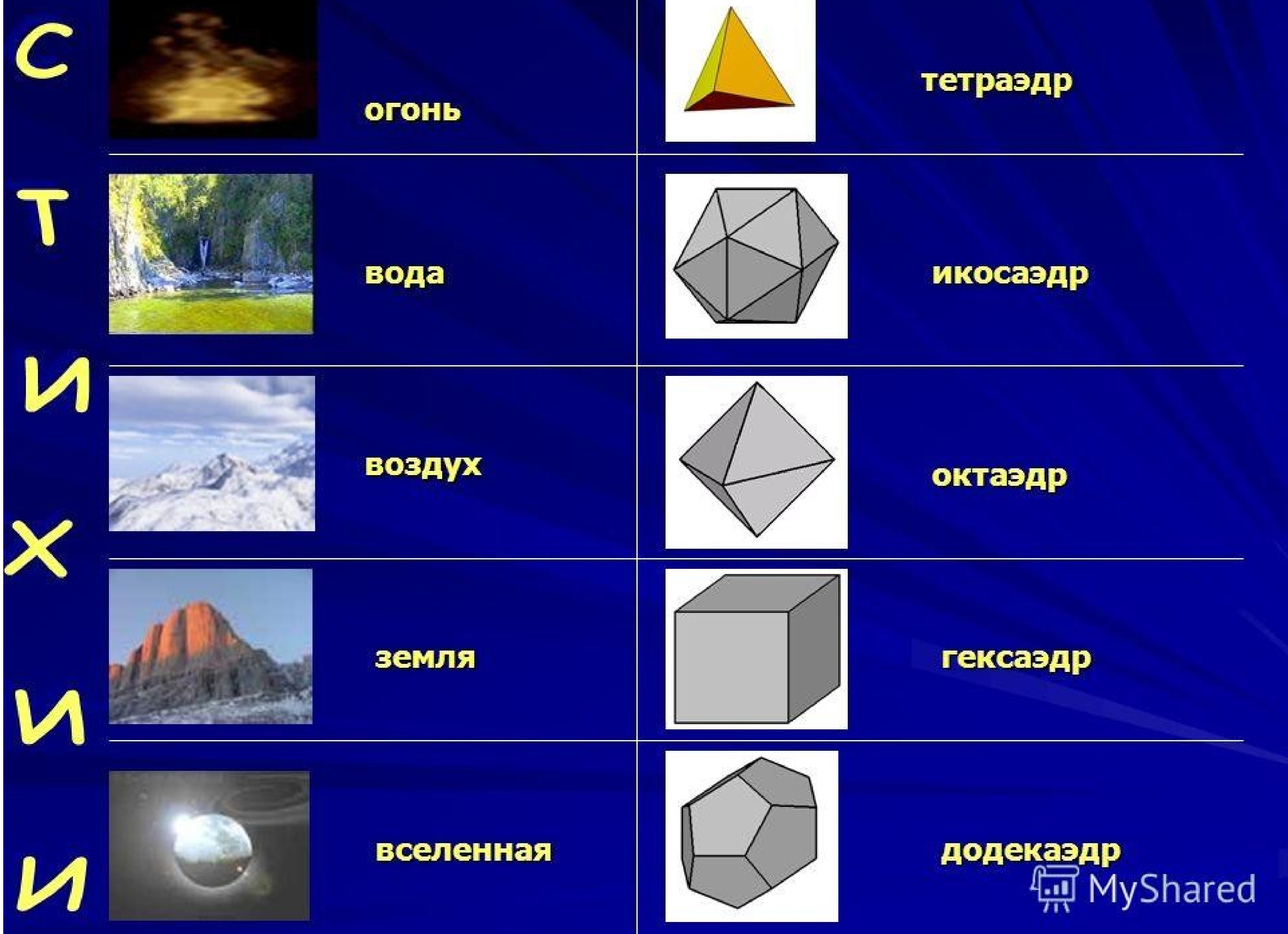






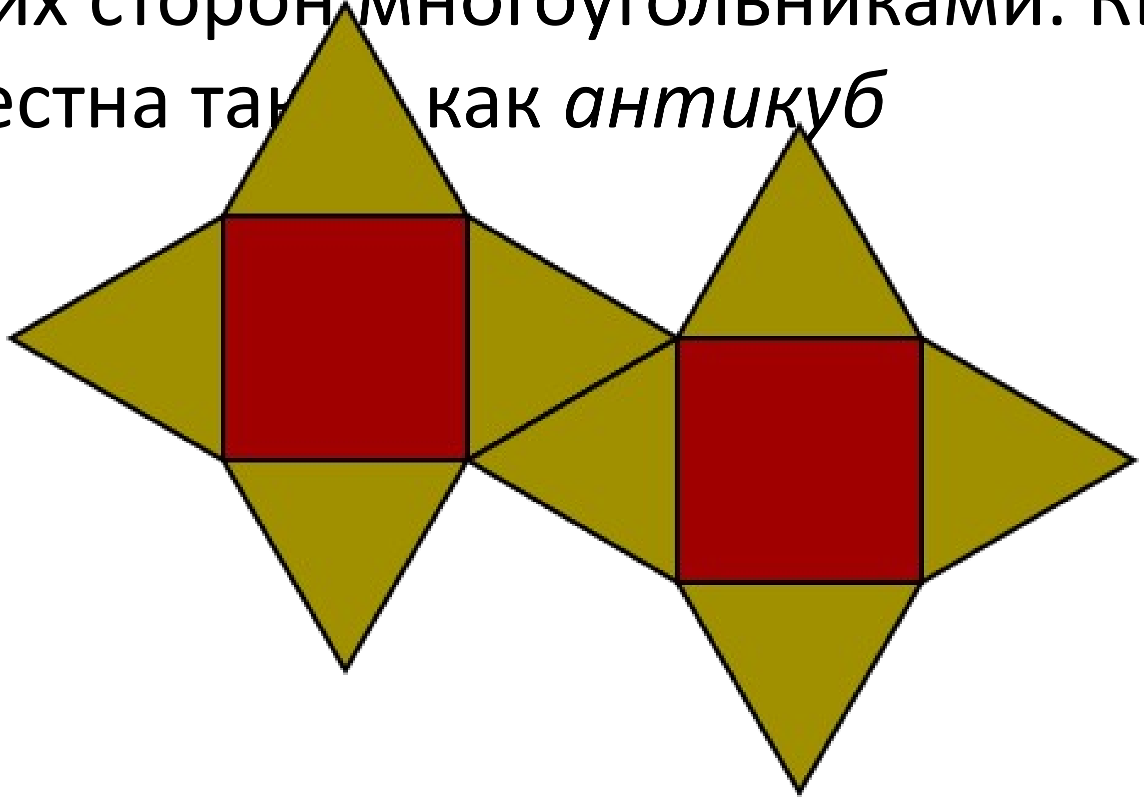
Одно из древнейших упоминаний о правильных многогранниках находится в трактате Платона (427-347 до н. э.) "Тимаус". Поэтому правильные многогранники также называются платоновыми телами.

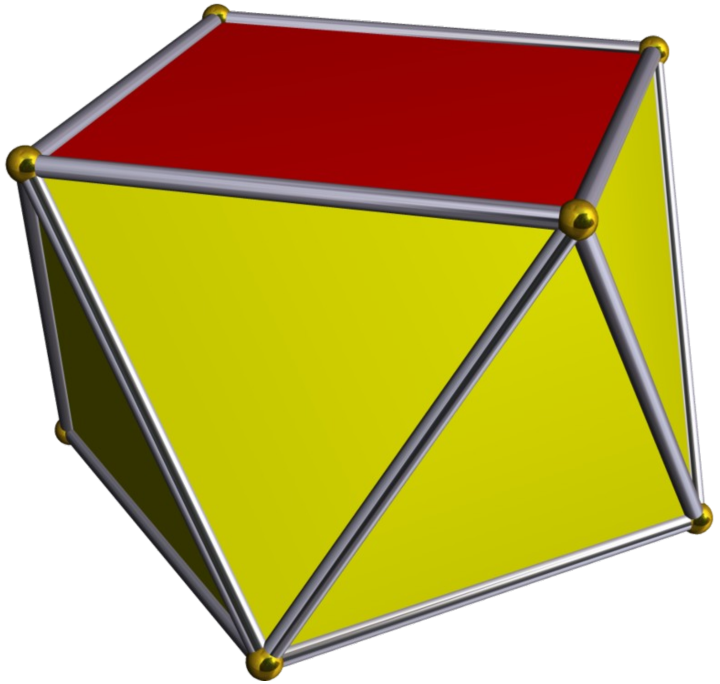
Каждый из правильных многогранников, а всего их пять, Платон ассоциировал с четырьмя "земными" элементами: земля (куб), вода (икосаэдр), огонь (тетраэдр), воздух (октаэдр), а также с "неземным" элементом - небом (додекаэдр).



Квадратная антипризма

Квадратная антипризма — это второй многогранник в бесконечном ряду антипризм, образованных последовательностью треугольных граней, закрытых с обоих сторон многоугольниками. Квадратная антипризма известна та[illegible] как *антикуб*





Простейшие многогранники

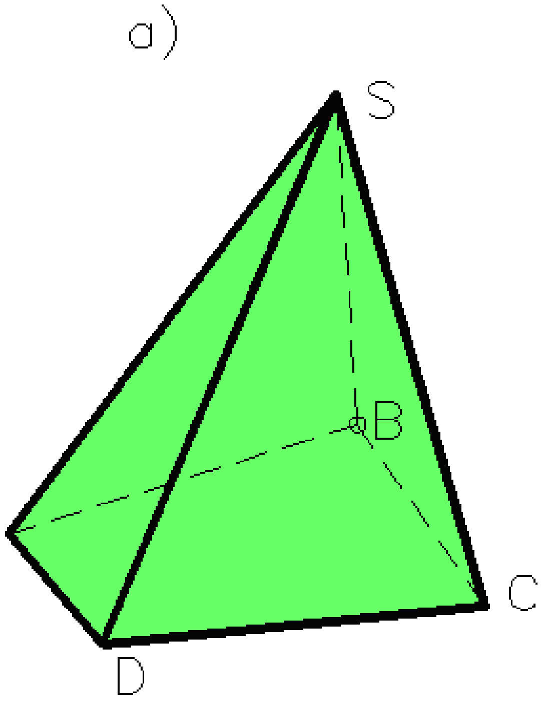
Пирамида – многогранник, у которого одна грань, принимаемая за *основание*, является произвольным многоугольником (например, *ABCD)*, а остальные грани (*боковые*) – треугольники с общей точкой *S*, называемой *вершиной*.

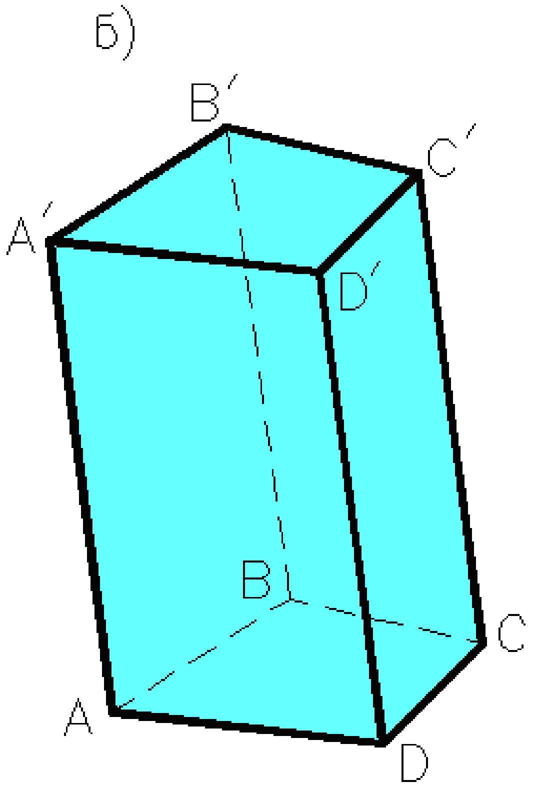
В зависимости от числа вершин у многоугольника основания пирамиды называют: треугольной, если в основании треугольник; четырехугольной, если в основании четырехугольник; и т.д.

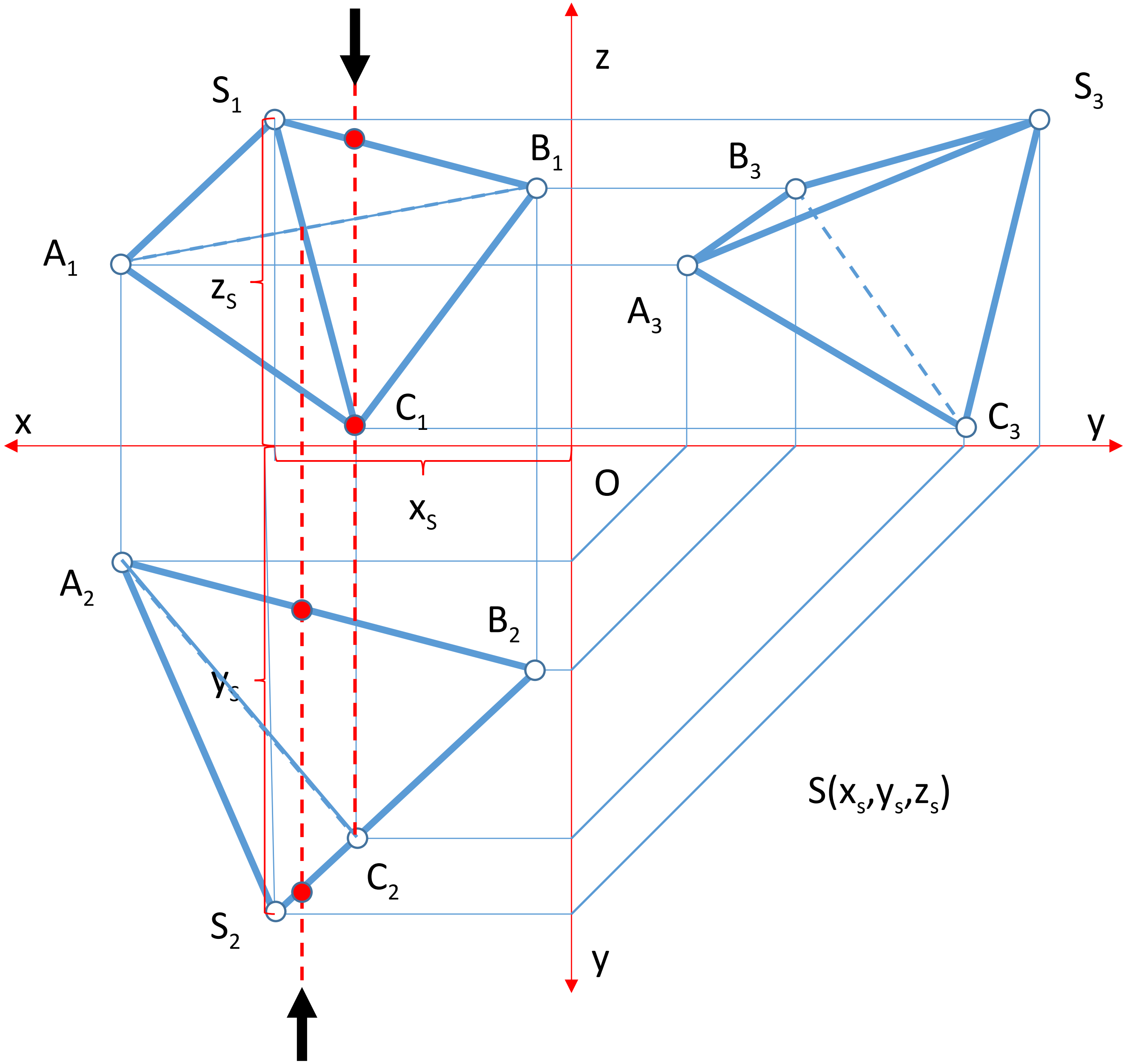
Призма – многогранник, у которого две грани – основания одинаковые и взаимно параллельные многоугольники – ABCD и A′B′C′D′, а остальные грани (боковые) – параллелограммы – AA′BB′; BB′CC′; …

В зависимости от числа вершин у многоугольника основания призмы, так же как и пирамиды, называют треугольными, четырехугольными и т.д.

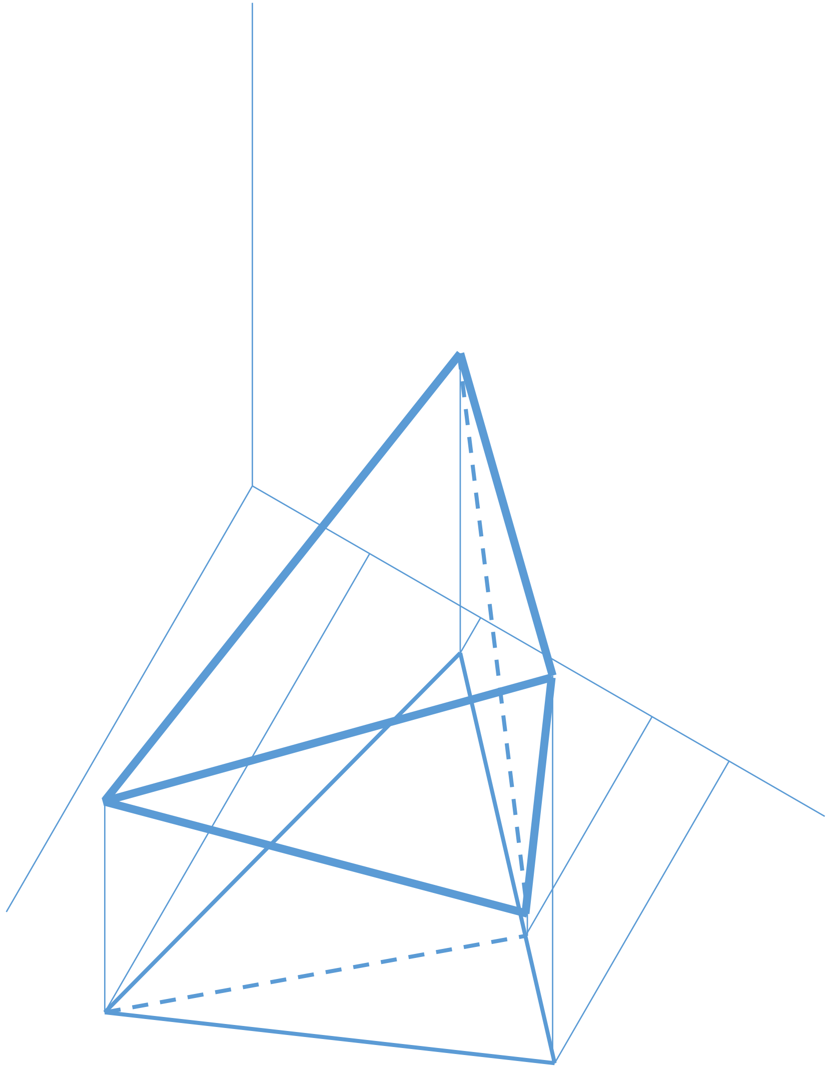
Призма называется *прямой*, если ее ребра перпендикулярны к плоскости основания, и *наклонной* – если не перпендикулярны.







z
S1
B1
B3
S3
A1
A3
zS
C1
C3
x
y
O
xS
A2
B2
yS
C2
S2
y
S(xs,ys,zs)

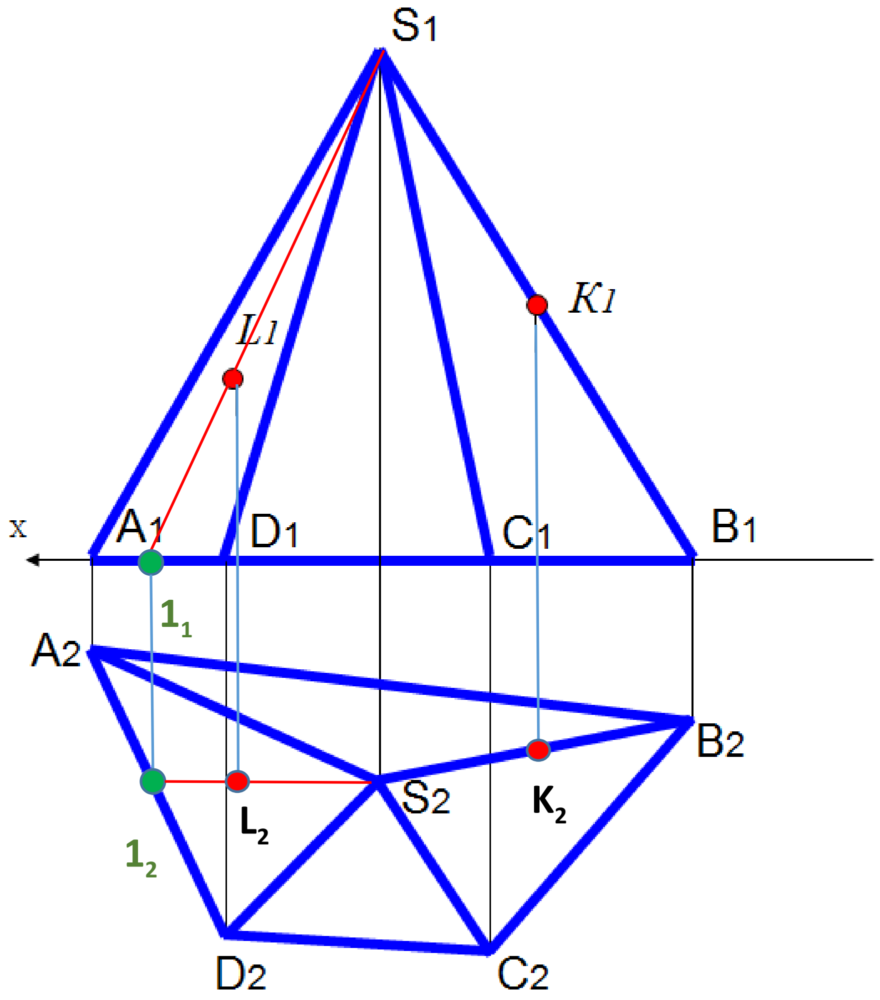


Точка и линия на поверхности многогранника.

Точка принадлежит поверхности многогранника, если она принадлежит прямой поверхности этого многогранника.

Линия принадлежит поверхности многогранника, если она проходит через точки данного многогранника.

Позиционные задачи. Принадлежность точки поверхности многогранника.
Построить недостающие горизонтальные проекции точек *К* и *L*, принадлежащих поверхности пирамиды.
Аралық есептер. Көпжақтар беттерінде орналасқан нүкте.
Пирамида бетінде орналасқан *К* және *L* нүктелердің жеткіліксіз горизонталь проекцияларын табу керек.

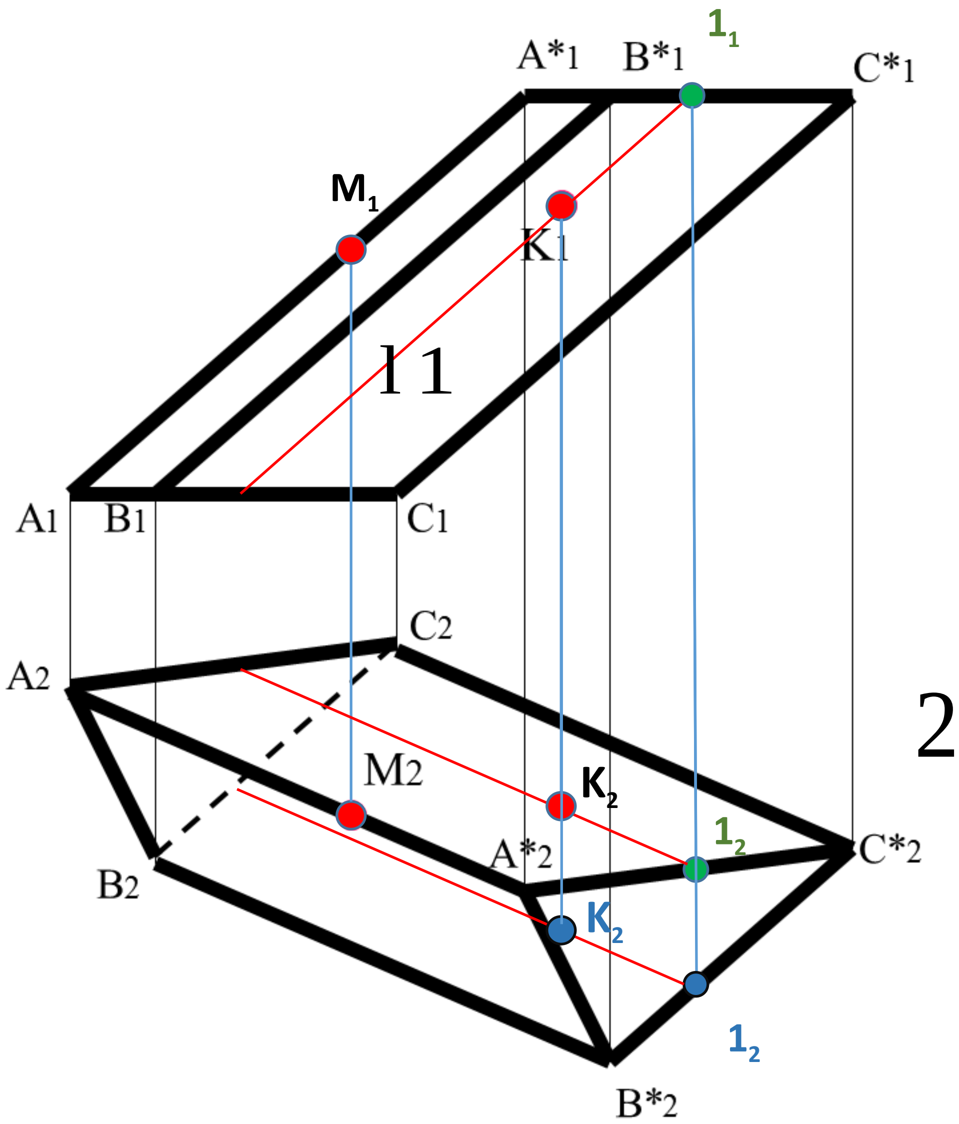


Позиционные задачи. Принадлежность точки поверхности многогранника.

Построить недостающие проекции точек *К* и *М*, принадлежащих поверхности призмы.

Аралық есептер. Көпжақтар беттерінде орналасқан нүкте.

Призма бетінде орналасқан *К2* және *М1* нүктелердің жеткіліксіз горизонталь проекцияларын табу керек.



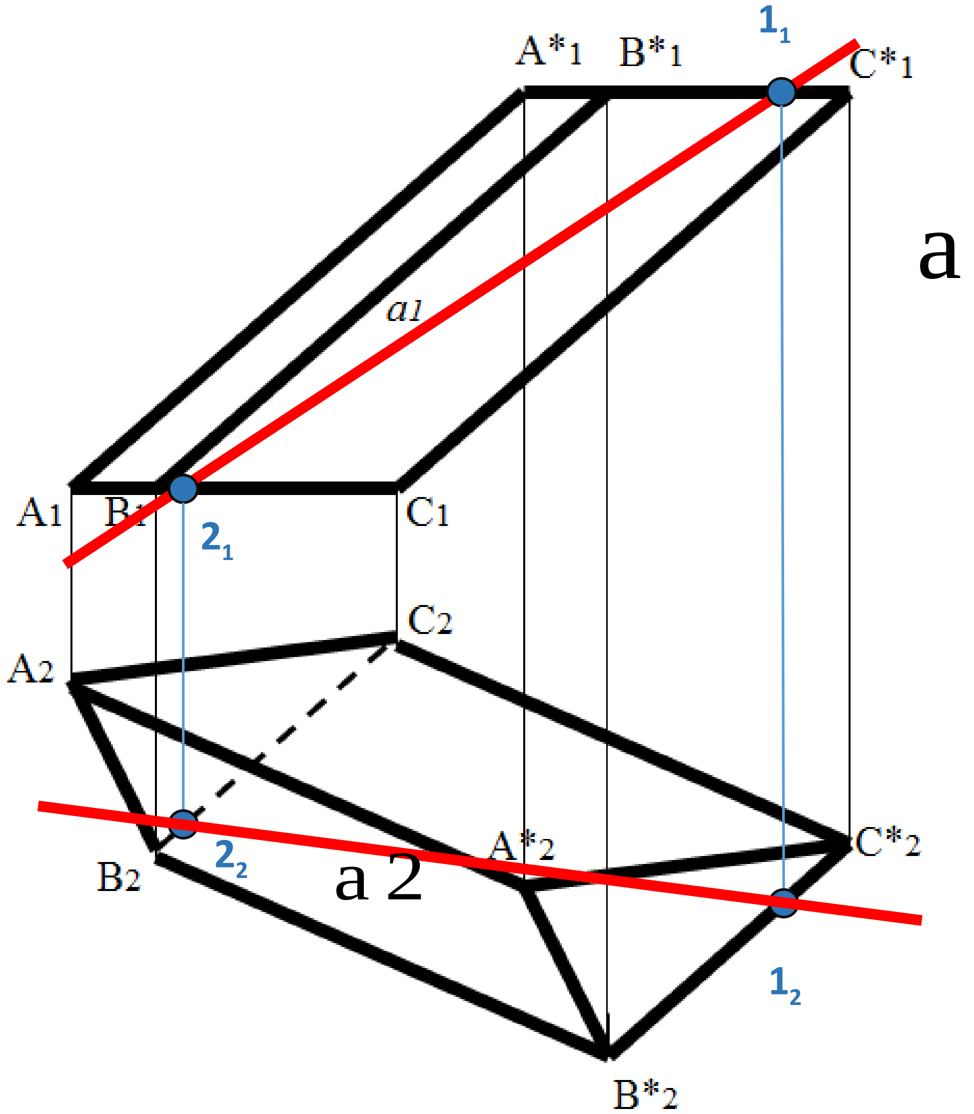
M (AA*)

M_2 (A_2A) ¿>M1 ∈ (A1A $^{*}_{1}$)

1. K ∈ AA * C * C

2. K ∈ BB * C * C

Позиционные задачи. Принадлежность линии поверхности многогранника.
Построить недостающую горизонтальную проекции линии *a2*, принадлежащей поверхности призмы.
Аралық есептер. Көпжақтың бетінде орналасқан сызықтар.
Призма бетінде орналасқан *a* сызықтың жеткіліксіз горизонталь проекциясың табу керек.



$$a \in BB * C * C$$

Пересечение многогранников плоскостью

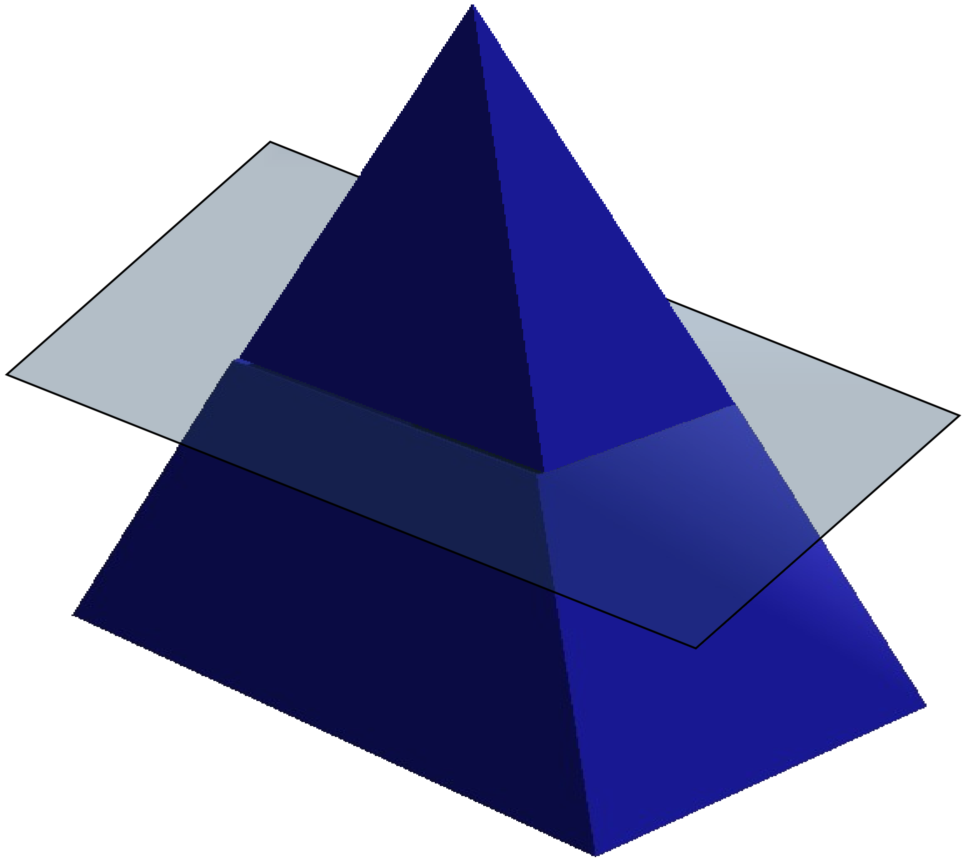
Чтобы построить линию пересечения многогранника с плоскостью, необходимо определить точки пересечения с данной плоскостью ребер многогранника. Соединив последовательно найденные точки прямыми линиями, получим искомую линию пересечения, называемую *сечением*.

Таким образом, задача на определение линии пересечения многогранника с плоскостью сводится, по сути дела, к многократному решению задачи на определение точки пересечения прямой линии с плоскостью, рассмотренной ранее.

Различают два способа построения сечения многогранника плоскостью:

- *способ ребер*, когда строятся вершины многоугольника сечения как точки пересечения ребер с секущей плоскостью;
- *способ граней*, когда строятся стороны многоугольника сечения как прямые пересечения граней с секущей плоскостью.

Сечение многогранника плоскостью



В общем случае

линия пересечения – *плоская ломаная линия*

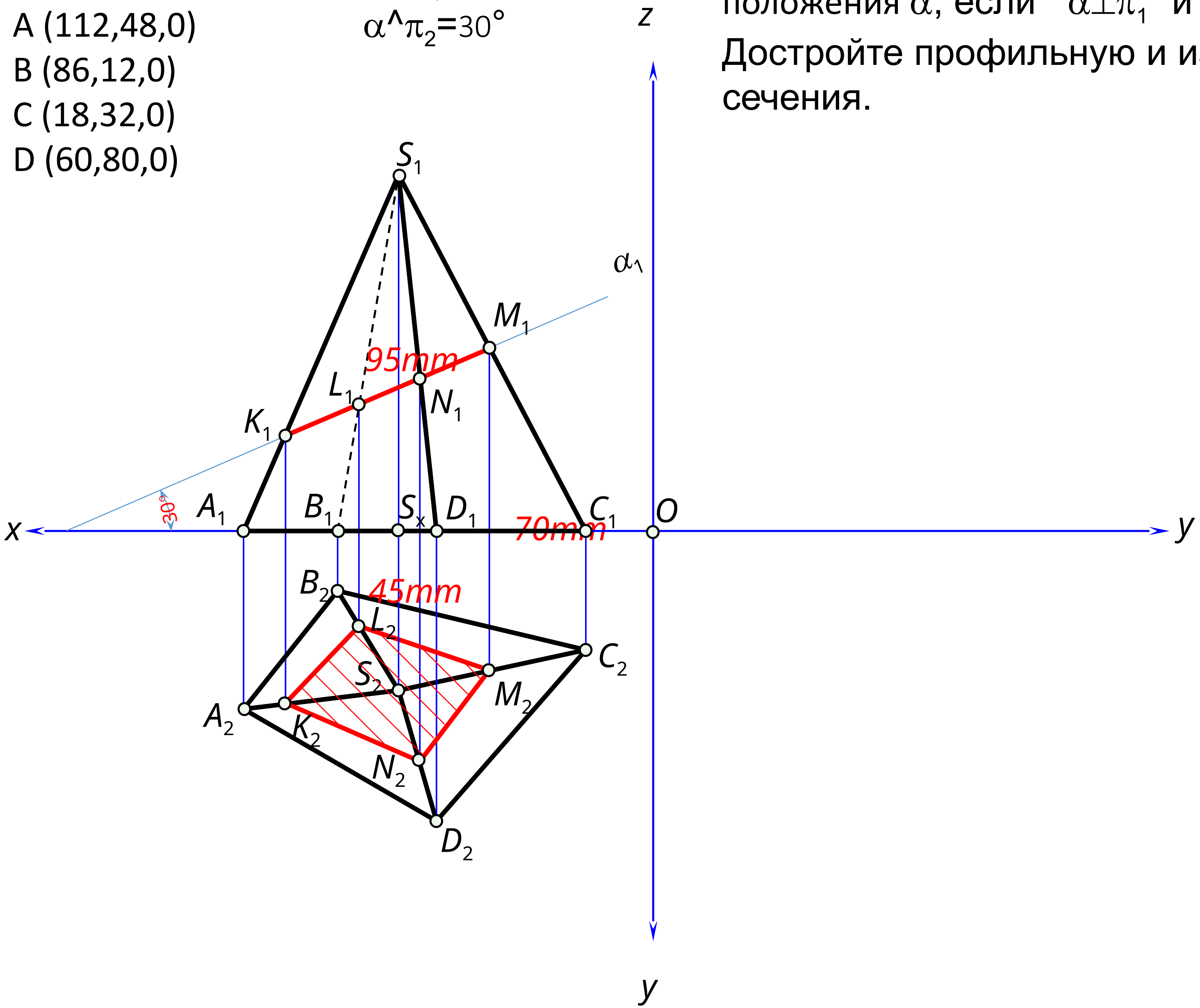
Секущая плоскость – *частного положения* – точки искомой линии пересечения строятся по точкам пересечения выродившейся в прямую проекции секущей плоскости с одноименными проекциями ребер (образующих или других линий) данной поверхности

S (70,45,95)
A (112,48,0)
B (86,12,0)
C (18,32,0)
D (60,80,0)

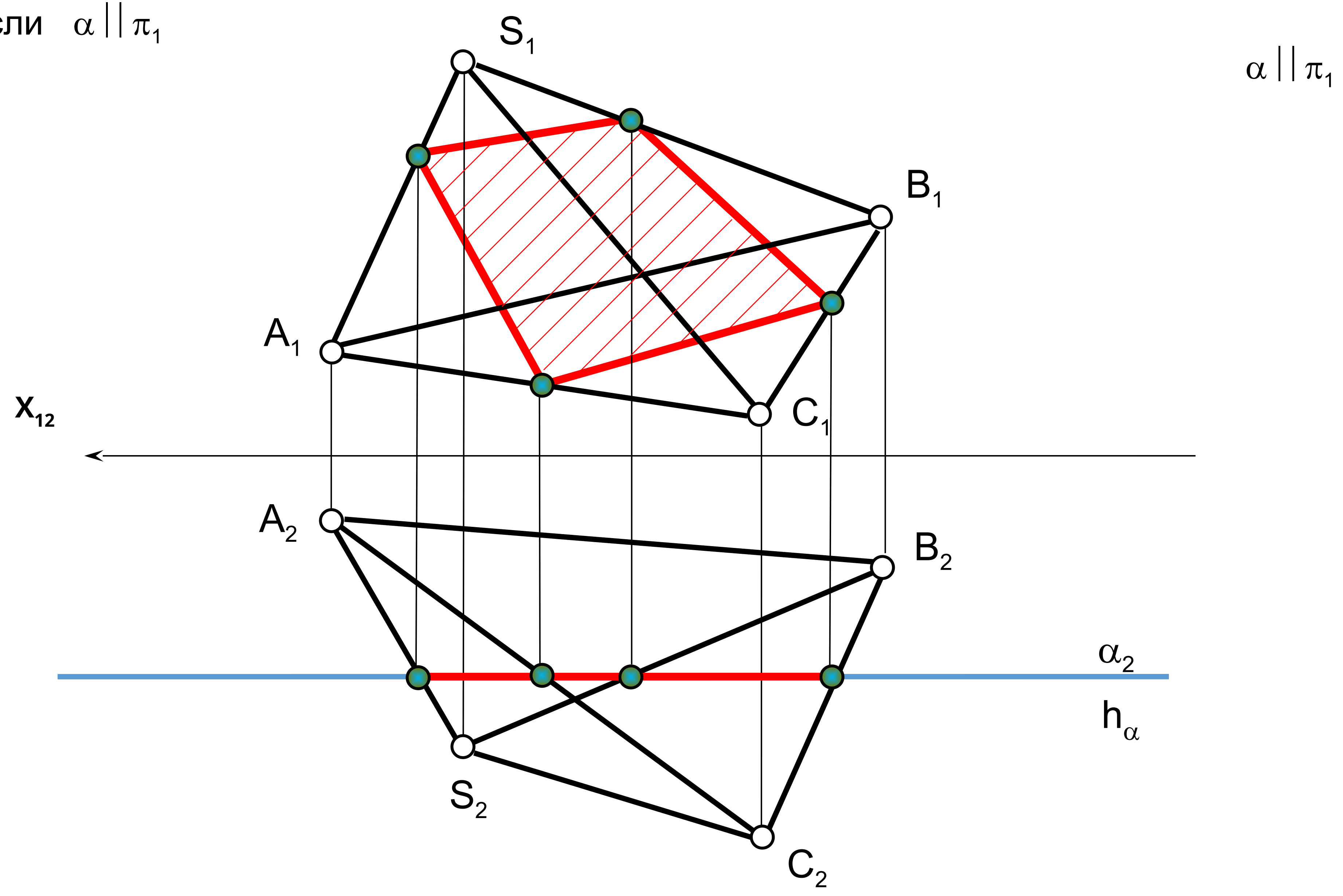
$\alpha \perp \pi_1$
$\alpha \wedge \pi_2 = 30°$

Задача. Построить сечение пирамиды плоскостью частного положения α, если $\alpha \perp \pi_1$ и $\alpha \wedge \pi_2 = 30°$

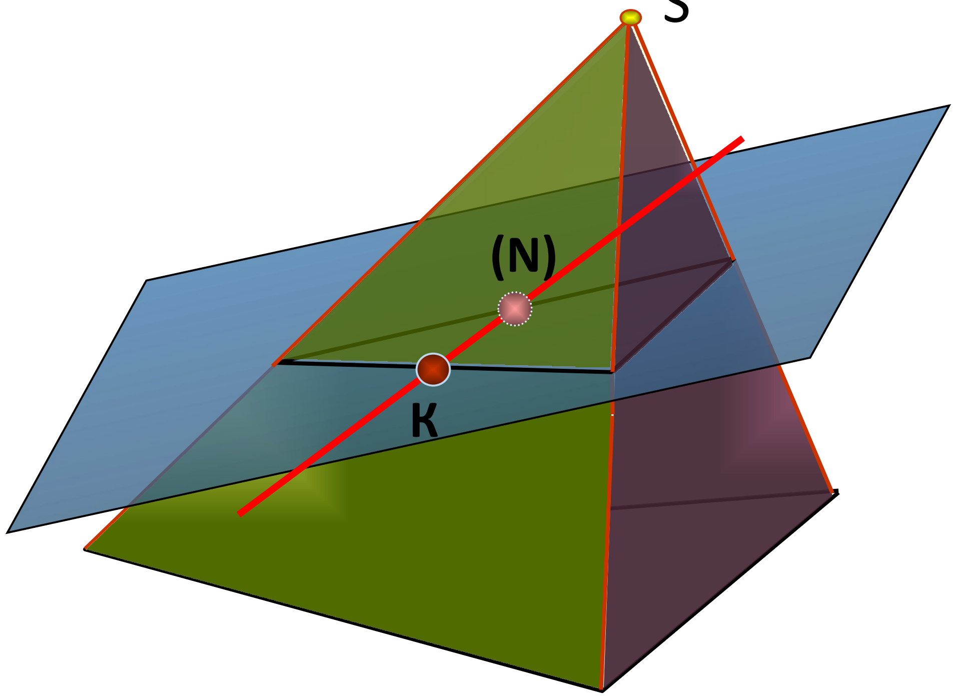
Достройте профильную и изометрическую проекции сечения.

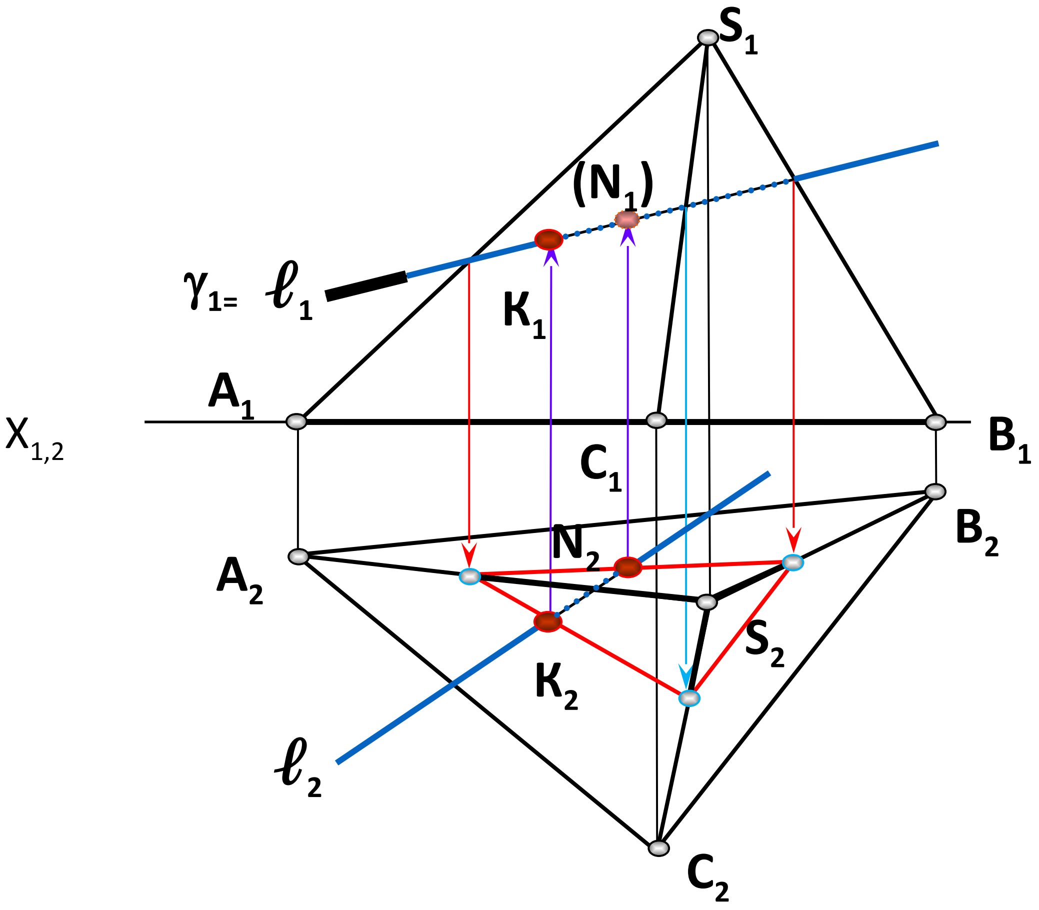


Задача. Построить сечение пирамиды плоскостью частного положения α, если $\alpha \parallel \pi_1$



Пересечение прямой с поверхностью





Алгоритм

1. Через прямую ℓ проводят вспомогательную плоскость-посредник α

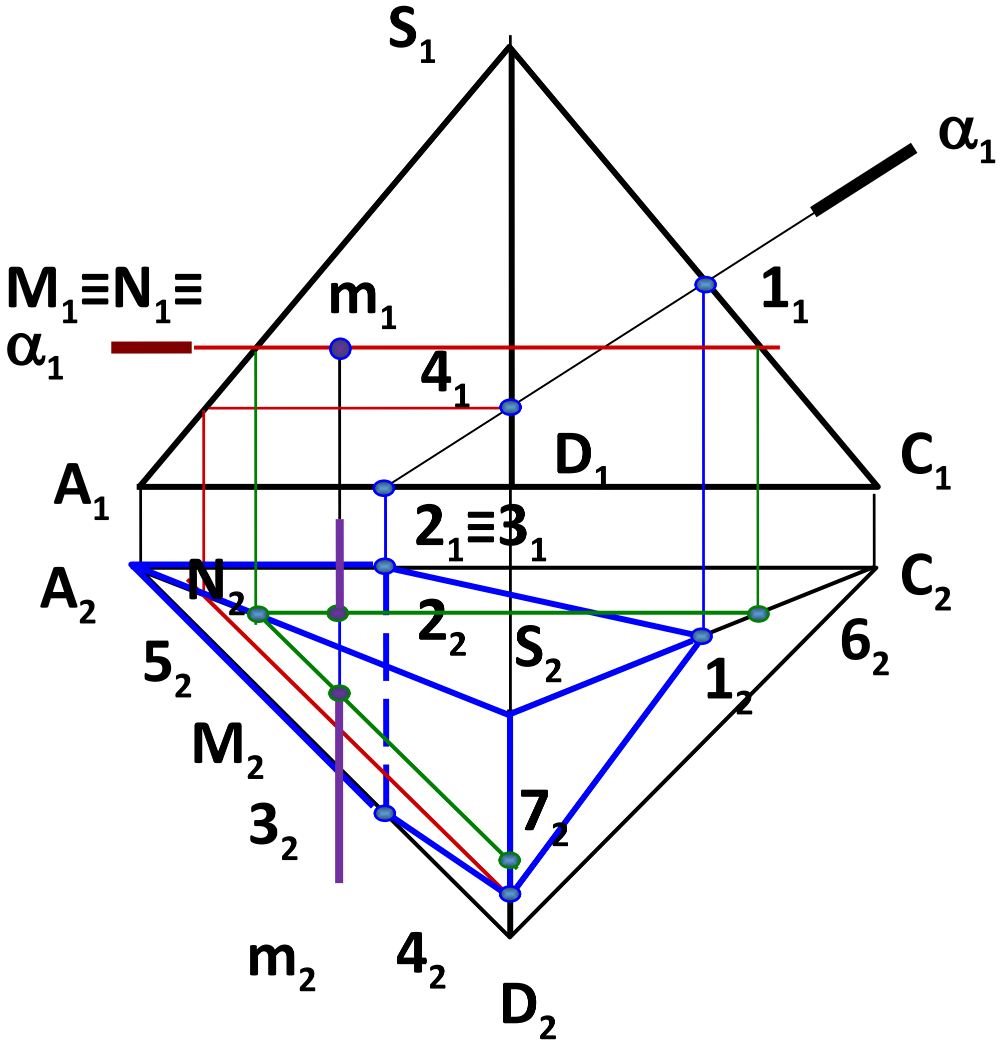
2. Находят линию пересечения поверхности с плоскостью α – k

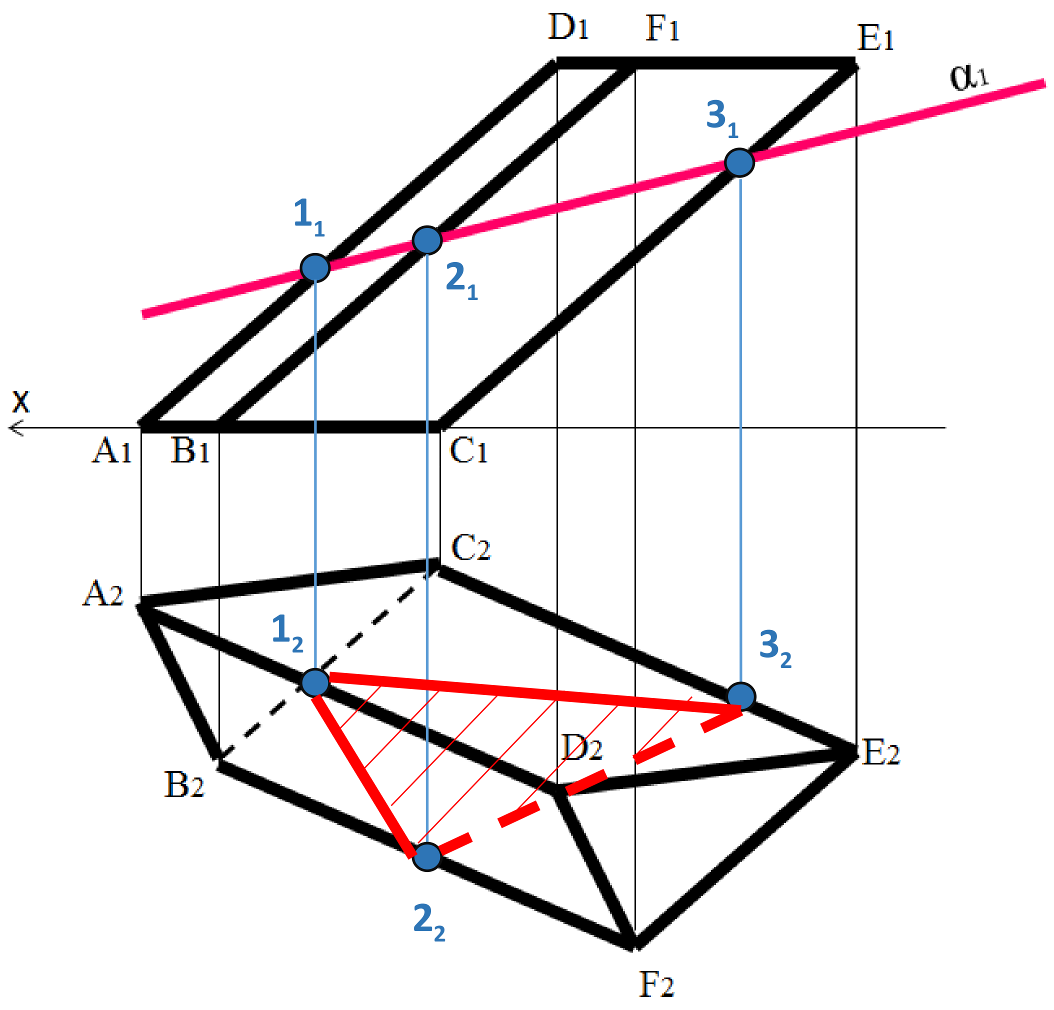
3. Отмечают точки пересечения прямой ℓ с линией k, точки 1 и 2

Количество точек пересечения прямой с поверхностью определяет порядок последней

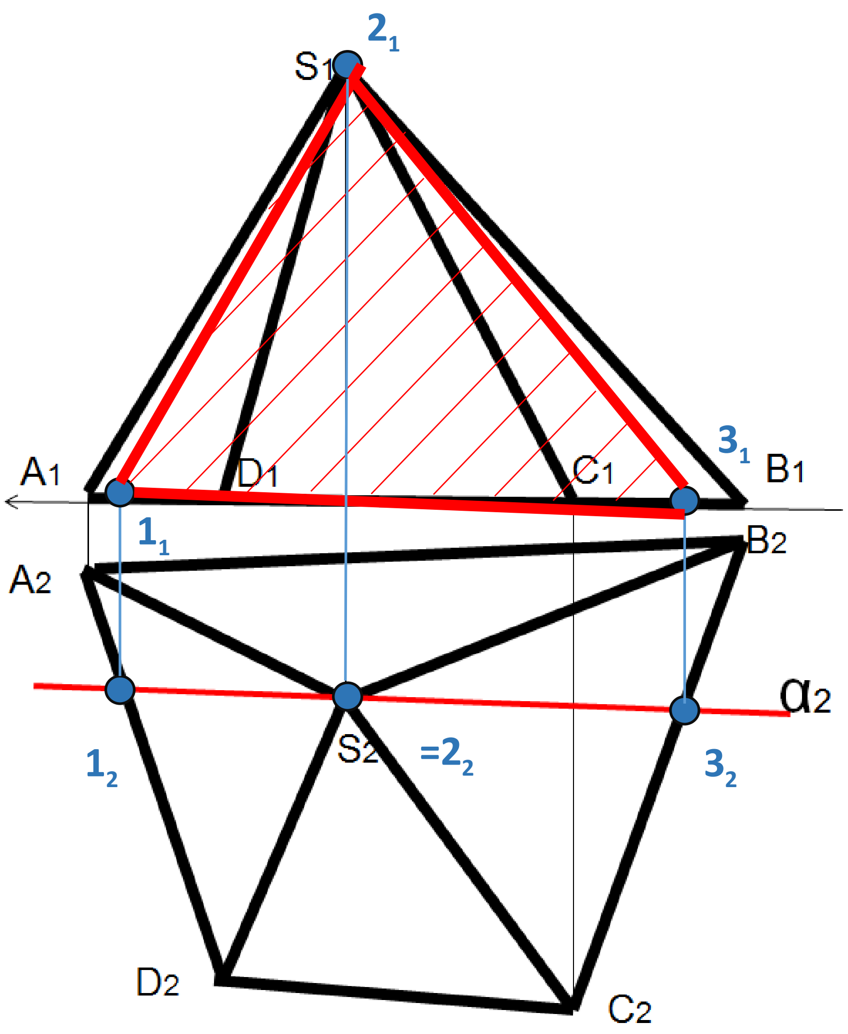
Задача

Построить точки пересечения прямой и плоскости с пирамидой

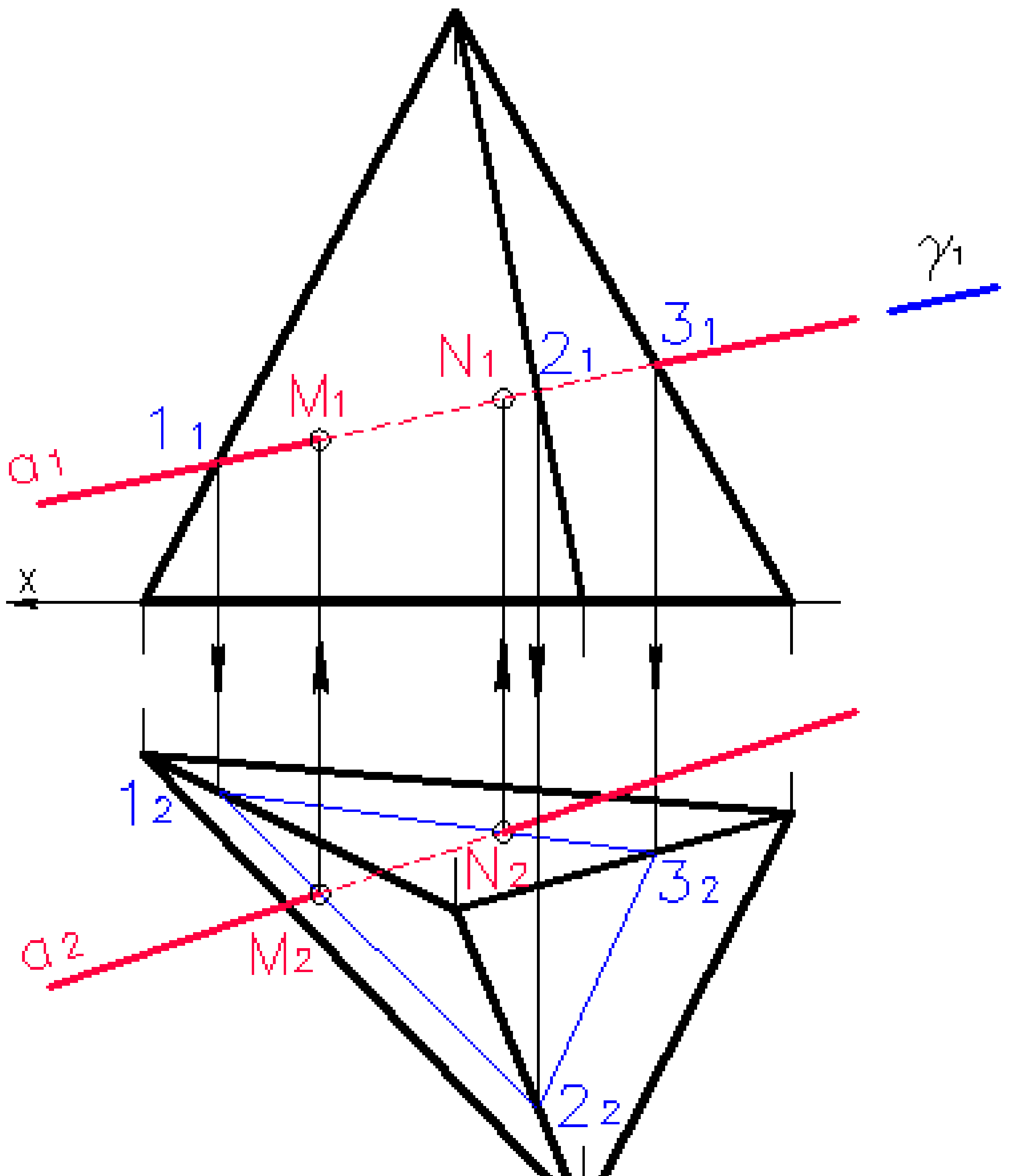




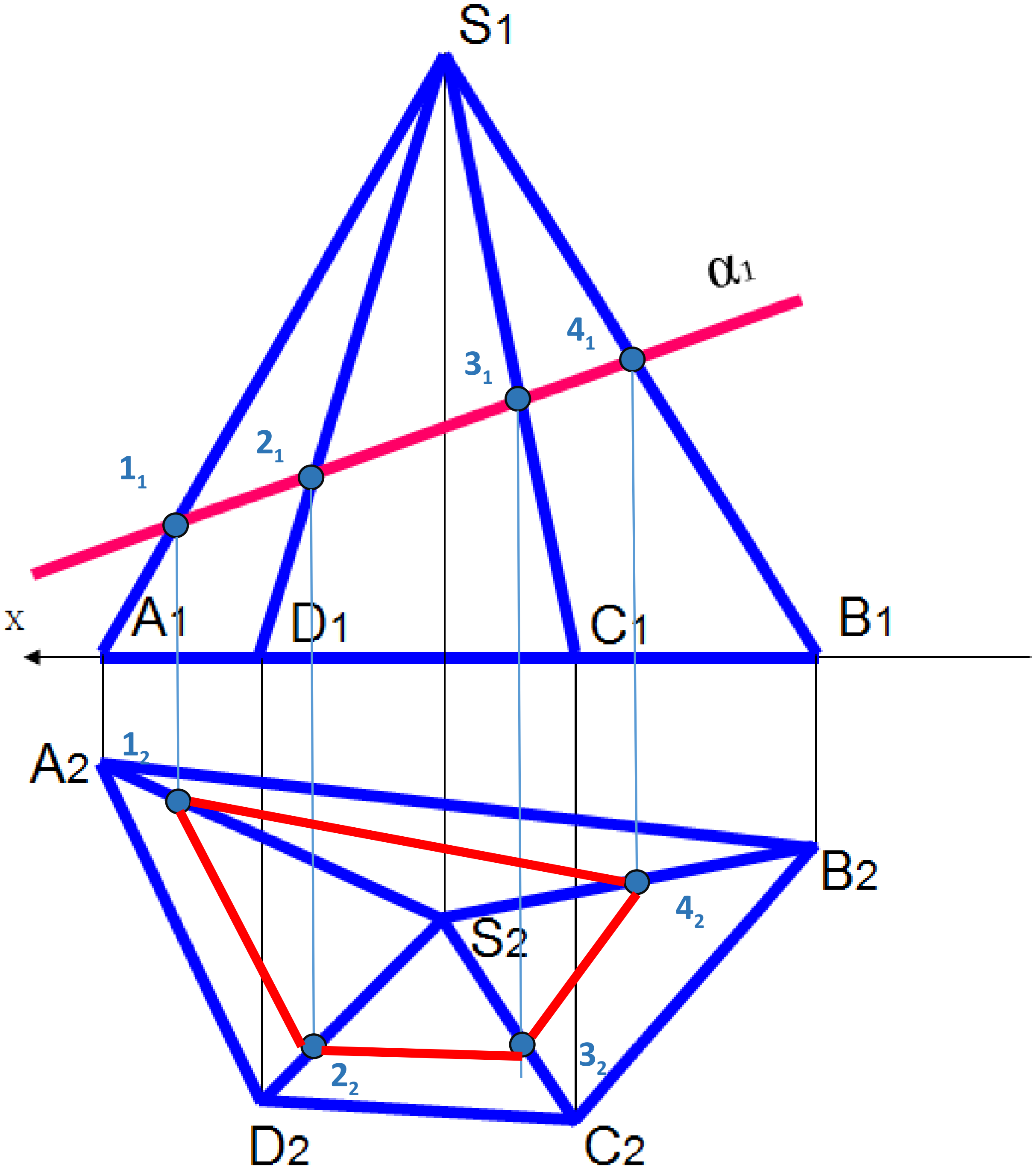
D1
F1
E1
α1
31
11
21
X
A1
B1
C1
C2
A2
12
32
D2
E2
B2
22
F2



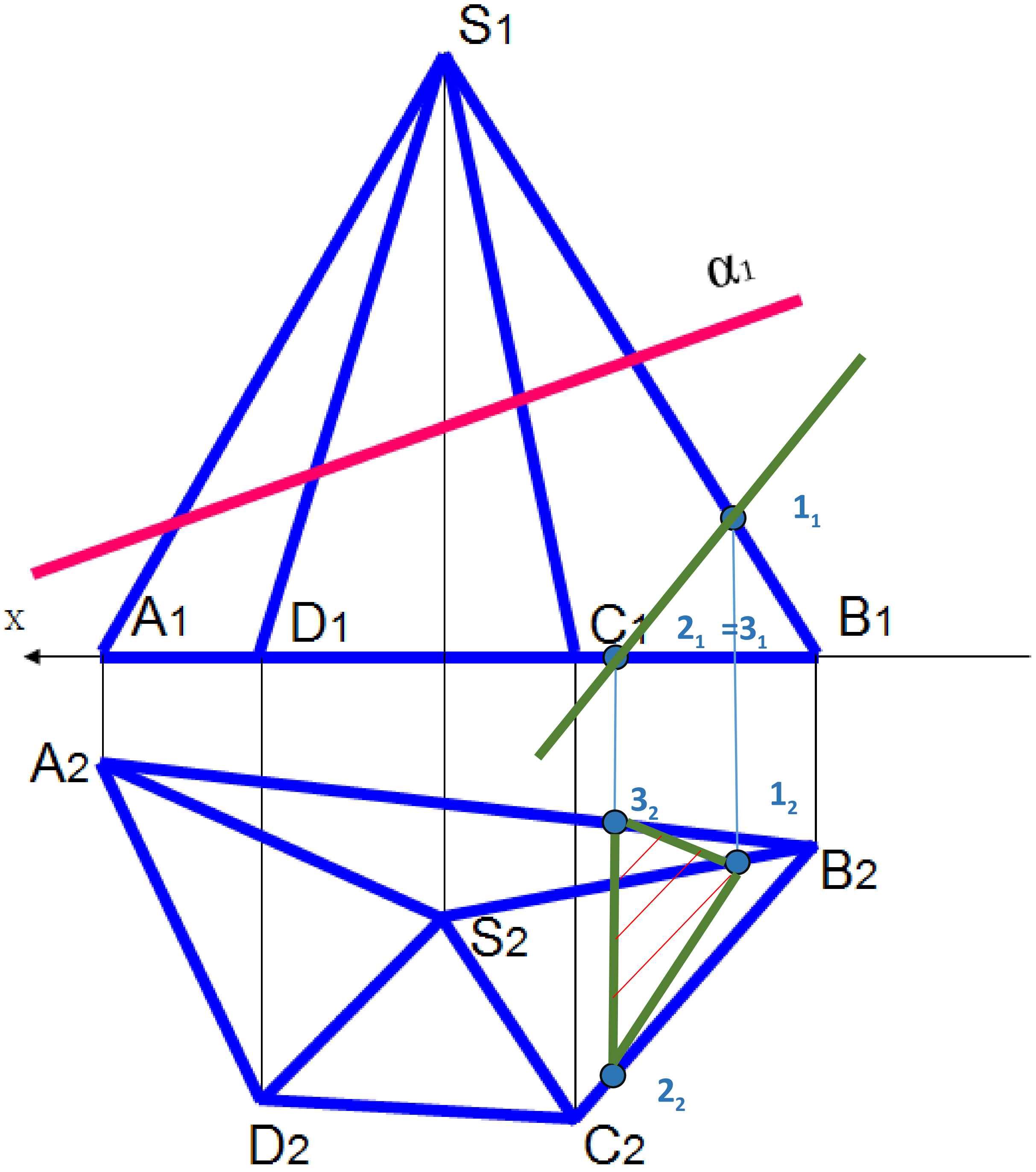
2_1
S_1
A_1
D_1
C_1
3_1
B_1
1_1
B_2
A_2
α_2
1_2
S_2
$=2_2$
3_2
D_2
C_2



γ1
3 1
N1
2 1
M1
1 1
a1
X
1 2
N2
3 2
a2
M2
2 2

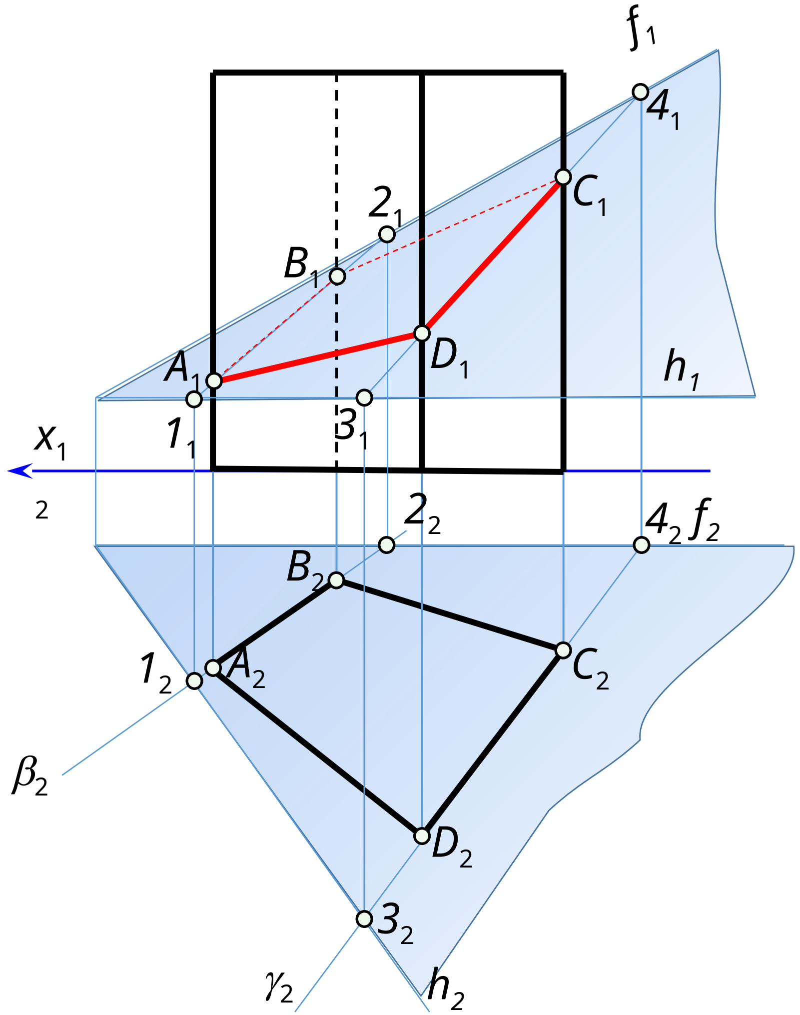


S1
α1
4₁
3₁
2₁
1₁
x
A1
D1
C1
B1
A2
1₂
B2
4₂
S2
3₂
2₂
D2
C2



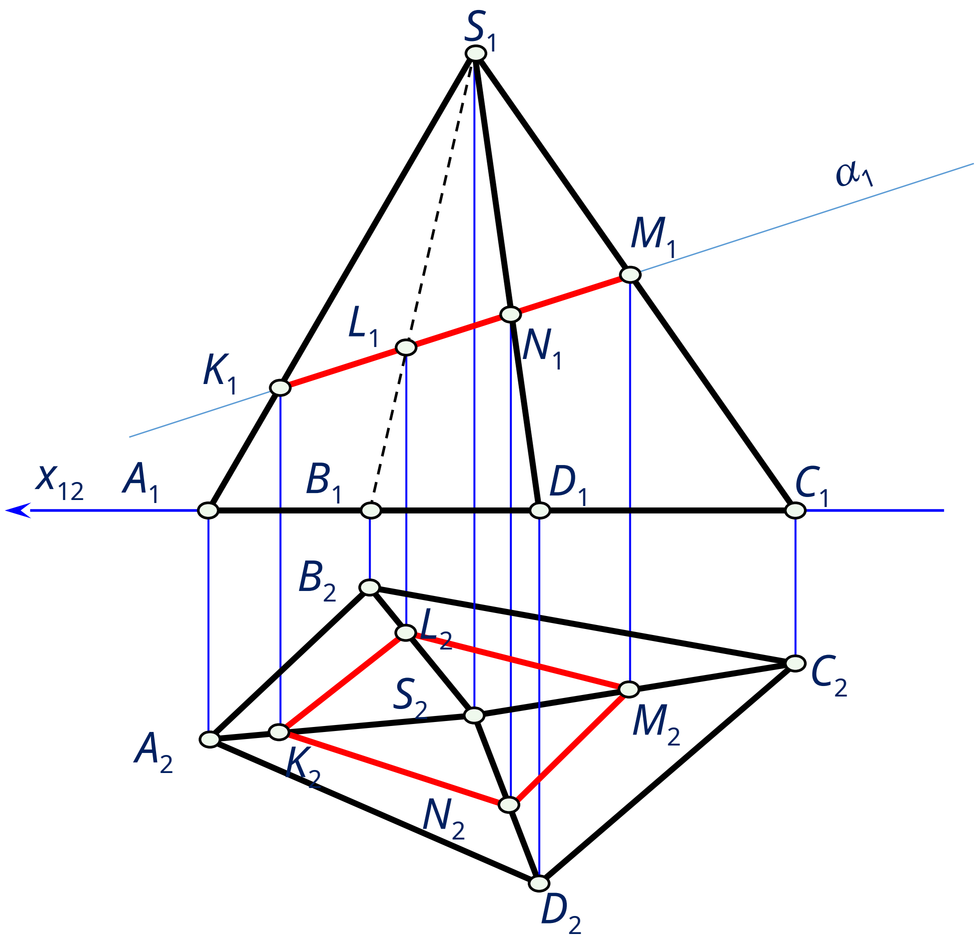
S1
α1
1₁
x
A1
D1
C1
2₁ =3₁
B1
A2
3₂
1₂
B2
S2
2₂
D2
C2

Сечение многогранника плоскостью.
Метод граней



Задача. Построить проекции линии пересечения прямой призмы плоскостью общего положения $\alpha(f \cap h)$

Пересечение многогранника плоскостью



Построение сечений значительно упрощается, если *секущая плоскость является проецирующей*. В этом случае одна проекция сечения совпадет с проецирующим следом плоскости.

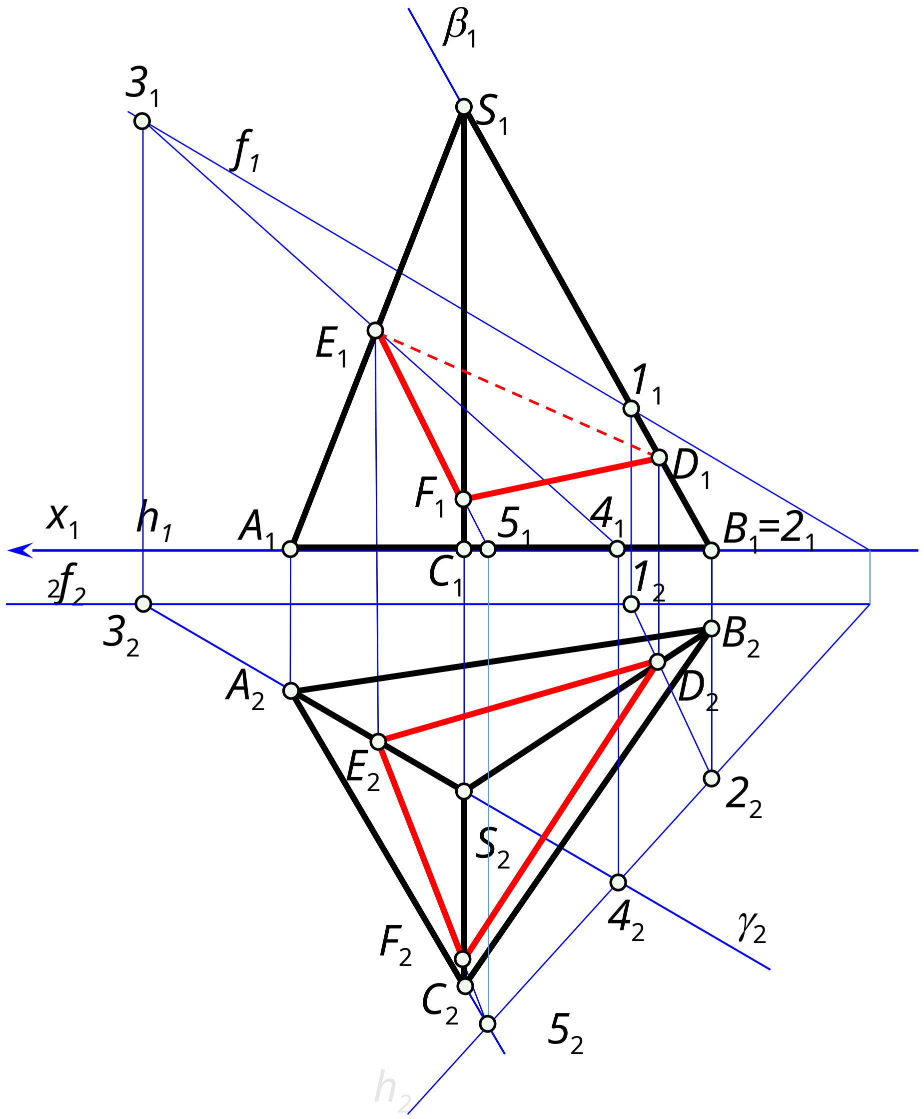
$$\alpha \perp \pi_1$$

На рисунке 2 фронтальная проекция $K_1L_1M_1\ N_1$ сечения совпадает с фронтальным следом α_1 секущей плоскости.

Проведя линии связи до горизонтальных проекций соответствующих ребер многогранника, получим горизонтальную проекцию сечения – $K_2L_2M_2N_2$.

Сечение пирамиды плоскостью общего положения
Метод ребер

Задача. Построить проекции линии пересечения прямой призмы плоскостью общего положения $\alpha(f \cap h)$



$(SB) \subset \beta$, $\beta \perp \pi_1$

$\beta \cap \alpha = (12)$

$(12) \cap (SB) = D$

$D = (SB) \cap \alpha$

$(SA) \subset \gamma$, $\gamma \perp \pi_2$

$\gamma \cap \alpha = (34)$

$(34) \cap (SA) = E$

$E = (SA) \cap \alpha$