

# Курс лекций по дисциплине «Начертательная геометрия»



лектор

**Каражанова Дарига Дюсеновна**

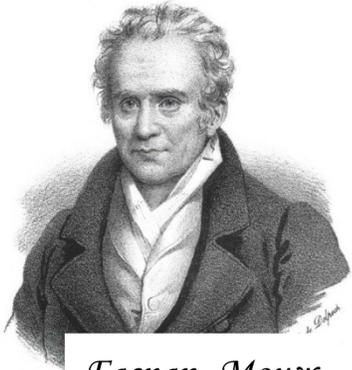
Кандидат педагогических наук  
ассоциированный профессор Satbayev University



## Лекция 3

# Эпюр Монжа. Эпюр точки и прямой.

- **Эпюр Монжа** – основной вид обратимого изображения. Французский математик и инженер *Гаспар Монж (1746-1818гг.)*, систематизировав и обобщив накопленные к тому времени знания по теории и практике построения изображений предметов пространства, предложил получать их изображения путем прямоугольного проецирования на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. В зависимости от этого также чертежи называют двухкартинными или трехкартинными.



*Гаспар Монж*

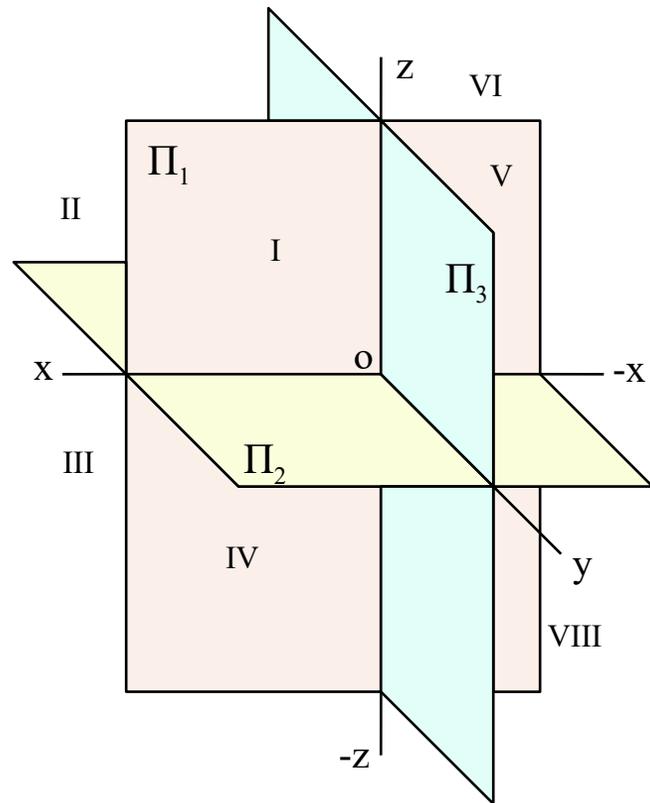
Совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций предмета, расположенных на одной плоскости, называют **комплексным чертежом (или ЭПЮРОМ МОНЖА)**.

Чертеж называется обратимым, если по изображению фигуры можно восстановить ее форму, размеры и положение в пространстве. В инженерной практике широко используются обратимые чертежи: - эпюр Монжа, аксонометрия, линейная перспектива, проекции с числовыми отметками.

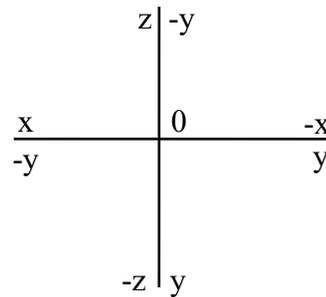
# Комплексный чертеж точки (эпюр точки)

Точка представляет собой самую элементарную часть пространства и геометрических тел.

Комплексный чертеж (эпюр) точки состоит из двух или трех ортогональных проекций. Эти проекции получают на взаимно перпендикулярных плоскостях проекций. Одна из плоскостей проекций  $\Pi_1$  называется *фронтальной* плоскостью проекций, вторая  $\Pi_2$  - *горизонтальной*, а третья  $\Pi_3$  - *профильной*.



Ок-тан-ты	Знаки координат		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-



Линии пересечения плоскостей проекций называются *осями координат* **x, y, z**.

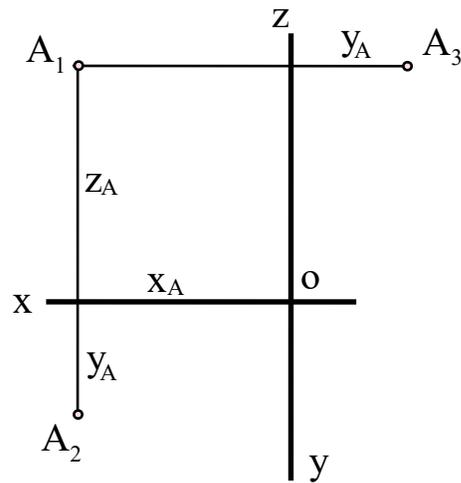
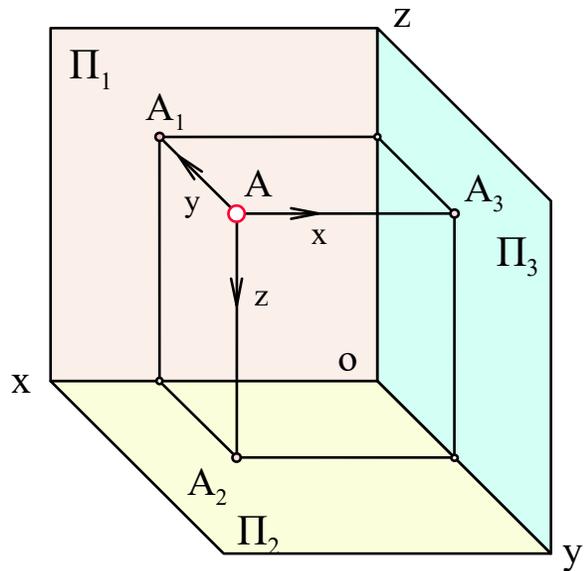
Плоскости проекций делят пространство на **8** трехгранных углов - *четверти* или *октанты*.

Система знаков соответствует "правой системе"

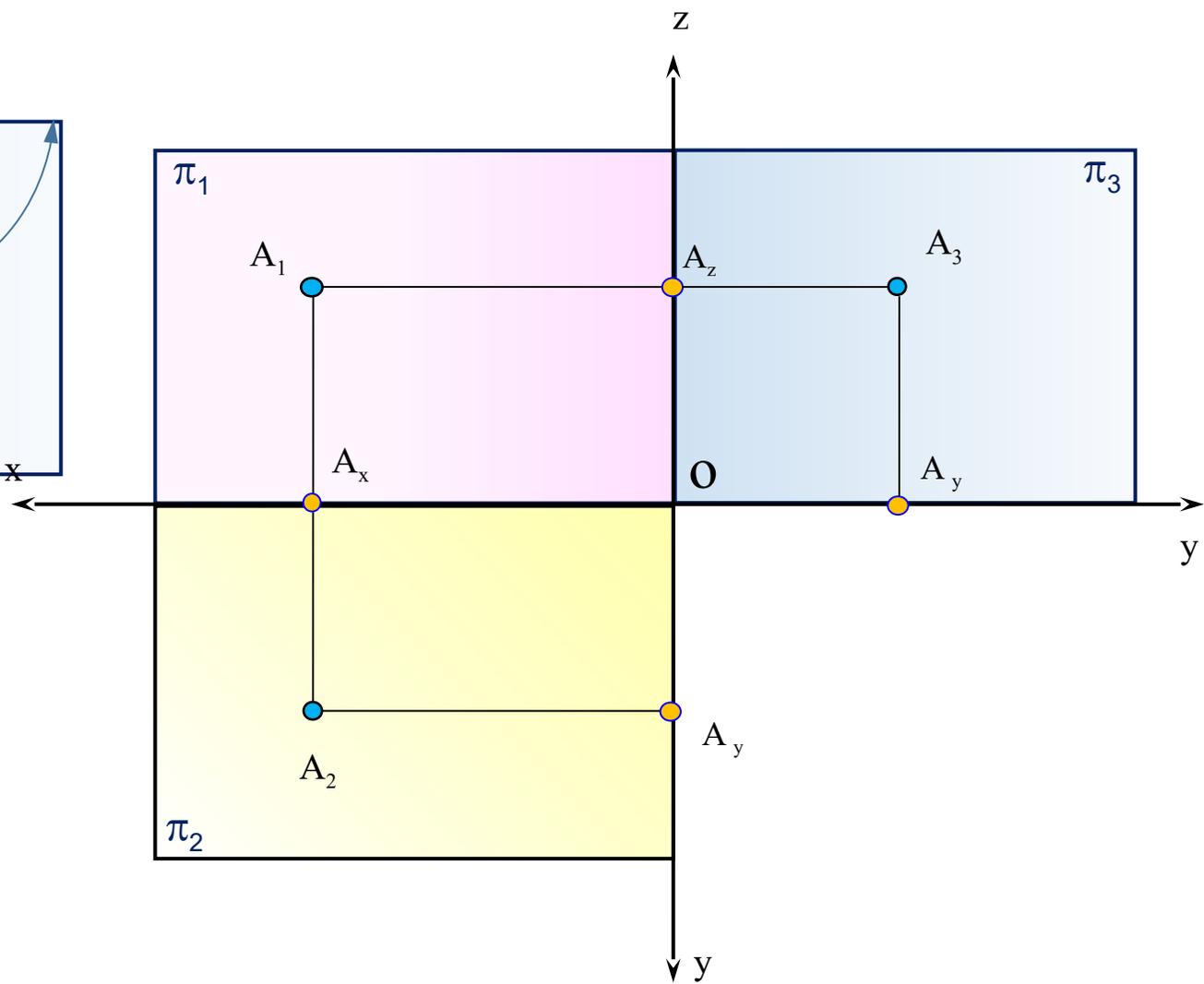
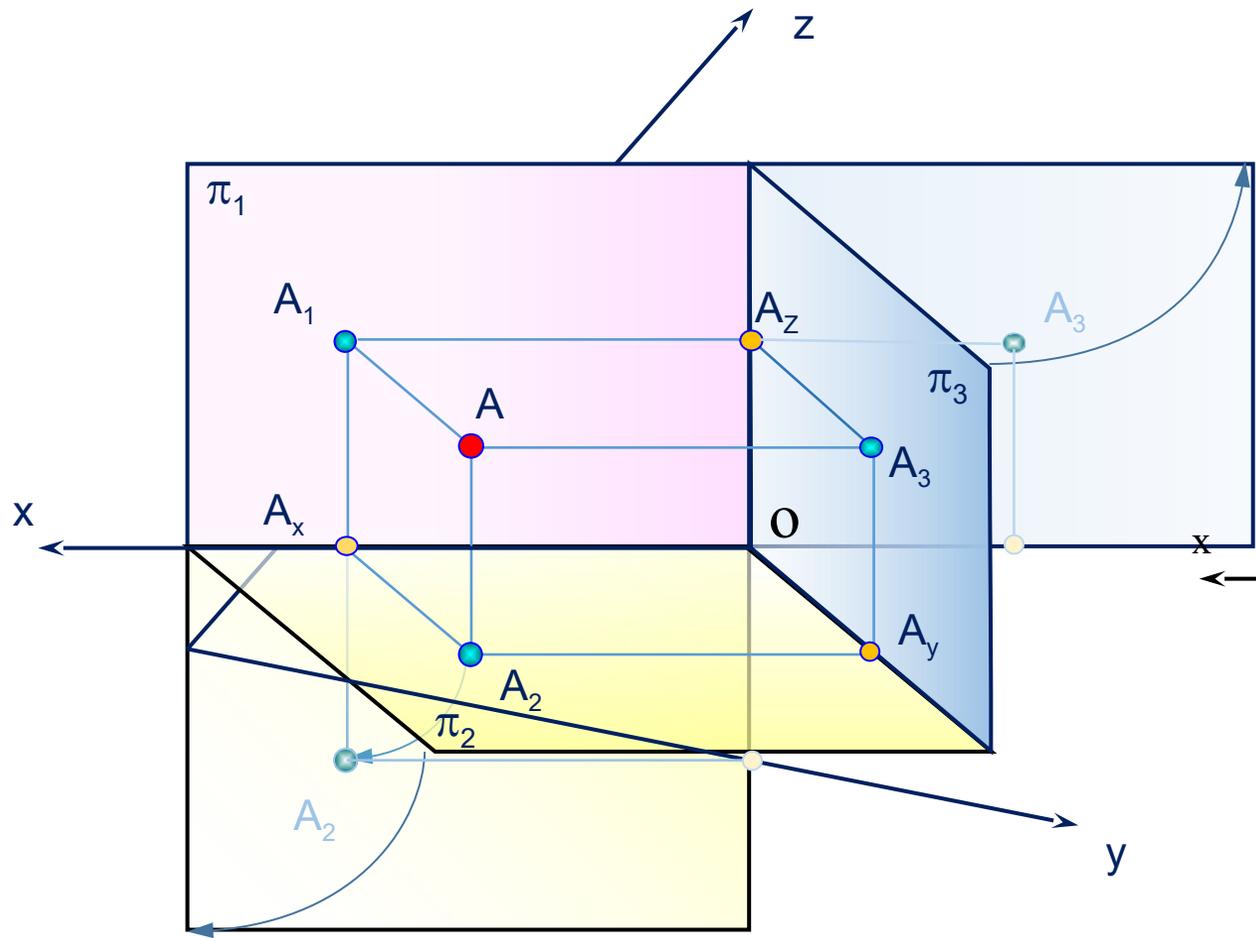
координат, принятой в большинстве европейских стран.

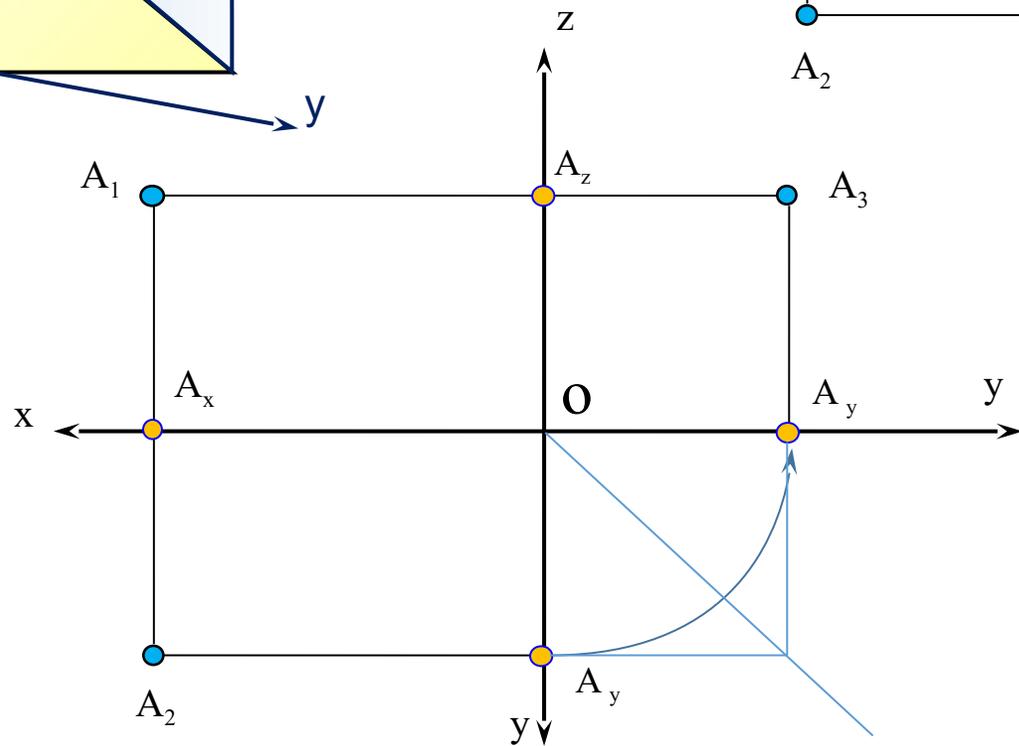
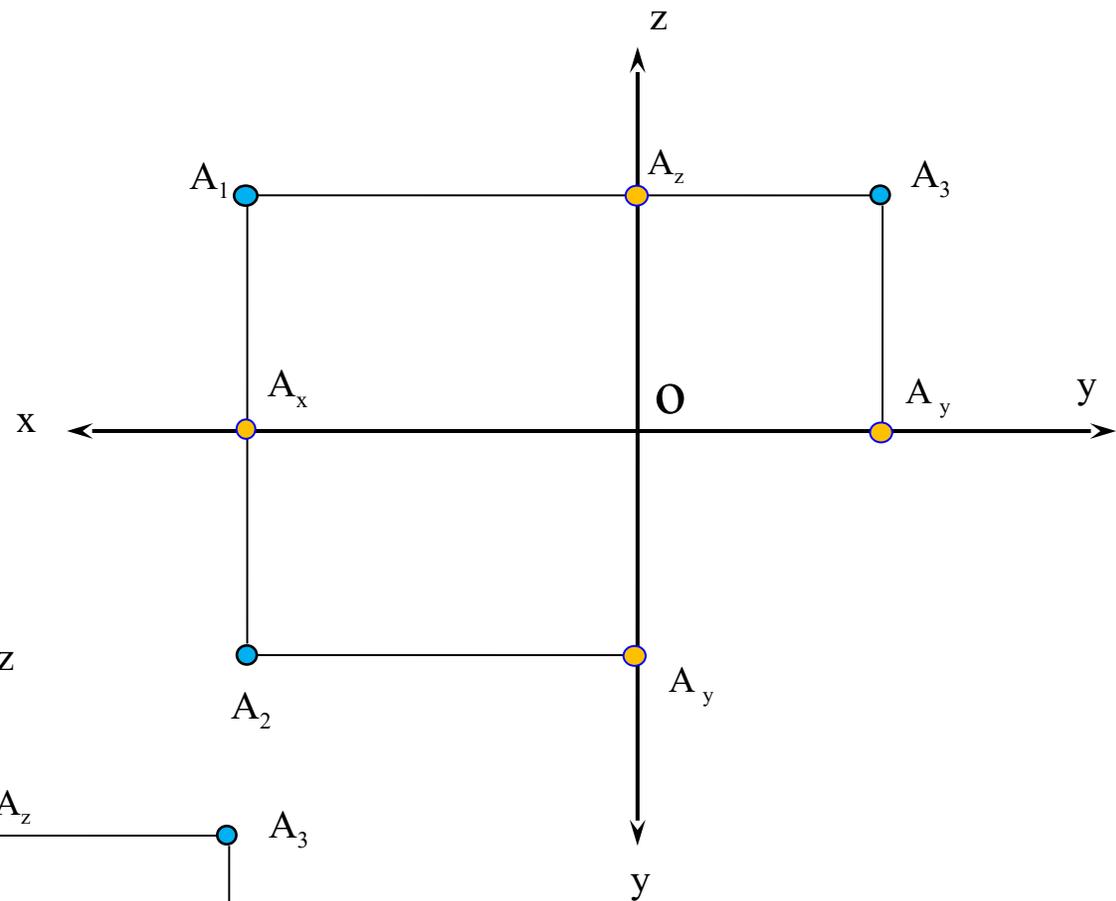
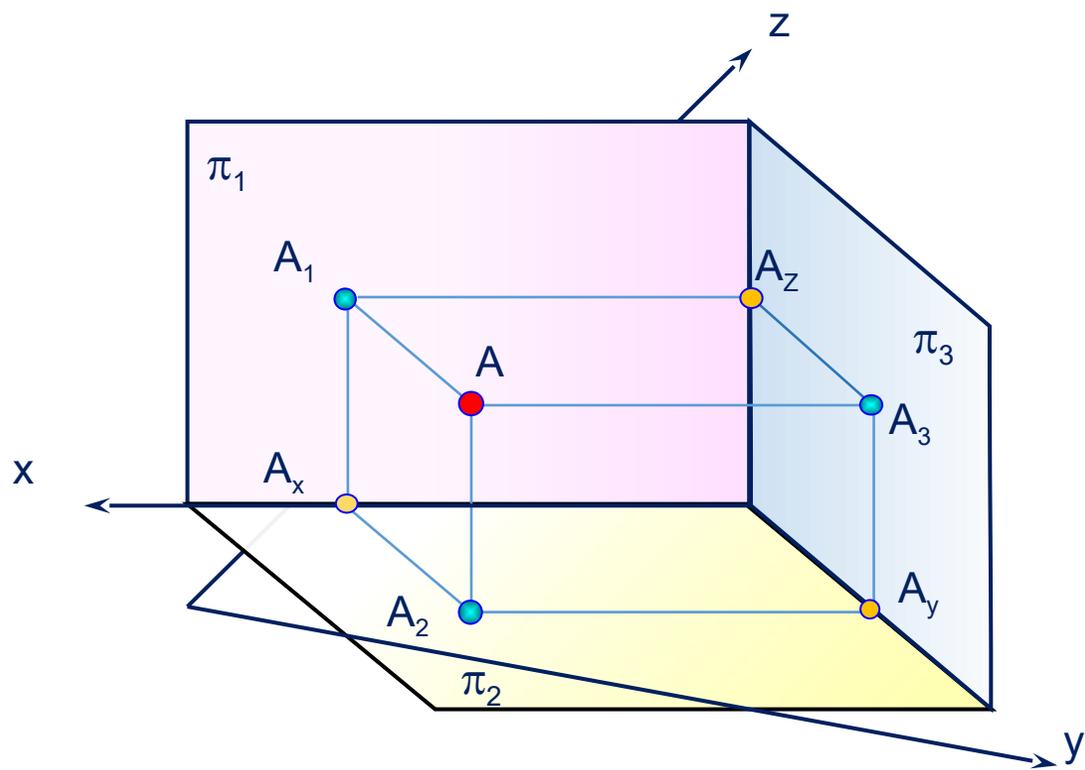
Зритель, рассматривающий оригинал, находится в первом октанте.

Спроецируем точку  $A$  на плоскости проекций  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ . Точка  $A_1$  называется *фронтальной проекцией* точки  $A$ , точка  $A_2$  - ее *горизонтальная проекция*, точка  $A_3$  - ее *профильная проекция*. Расстояние  $AA_2$  точки  $A$  от плоскости  $\Pi_2$  называется *высотой* точки  $A$  ( $z_a$  - аппликата), ее расстояние  $AA_1$  от плоскости  $\Pi_1$  - *глубиной* точки  $A$  ( $y_a$  - ордината), а расстояние  $AA_3$  от плоскости  $\Pi_3$  - *широтой* точки  $A$  ( $x_a$  - абсцисса). Таким образом, какая-либо точка пространства  $A$  будет определяться тремя ее координатами:  $A(x, y, z)$ .

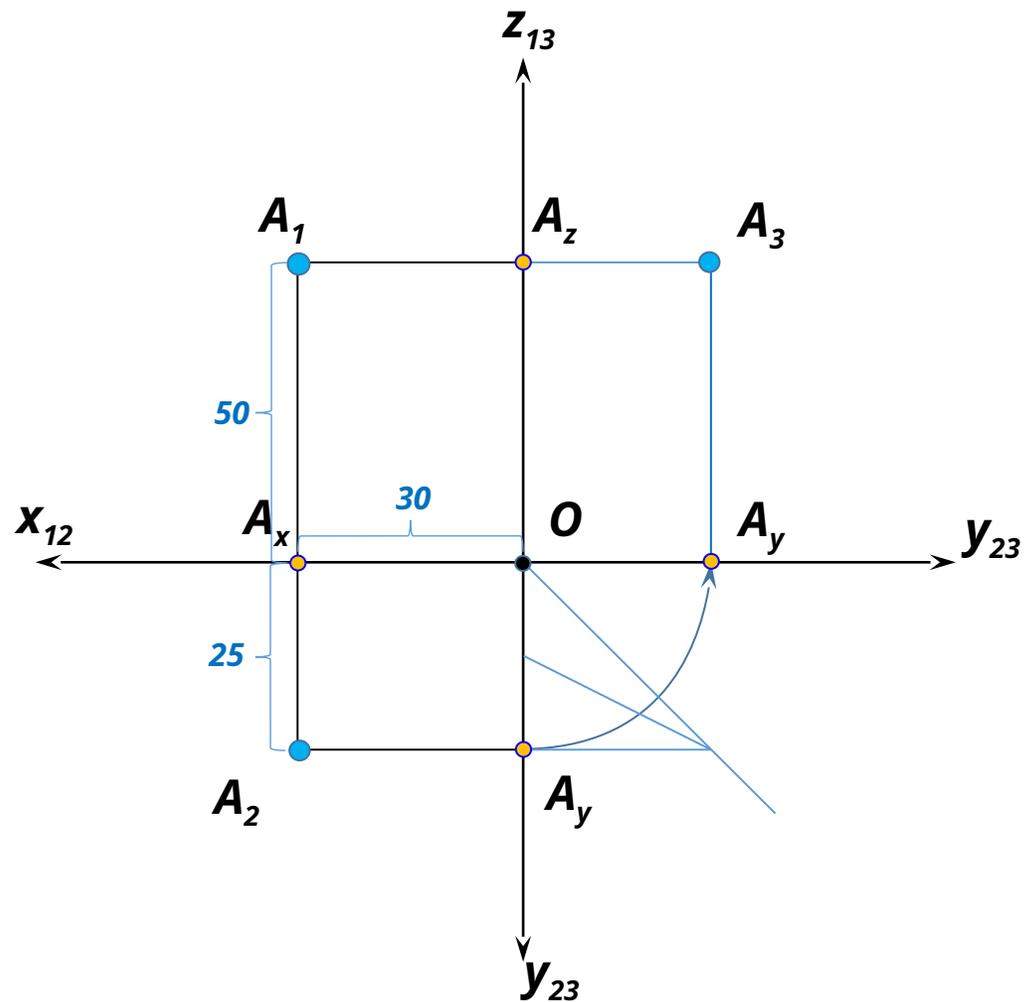


Чтобы получить плоский чертеж точки  $A$ , плоскости  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$  вращают до совмещения с плоскостью  $\Pi_1$ . Прямые  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ , соединяющие проекции точки  $A$ , называются *линиями связи* и соответственно перпендикулярны к осям  $x$  и  $z$ . Проекции точки  $A$  определяются координатами:  $A_2(x, y)$ ,  $A_1(x, z)$ ,  $A_3(y, z)$ . Полученный эпюр точки будет *обратимым чертежом*.

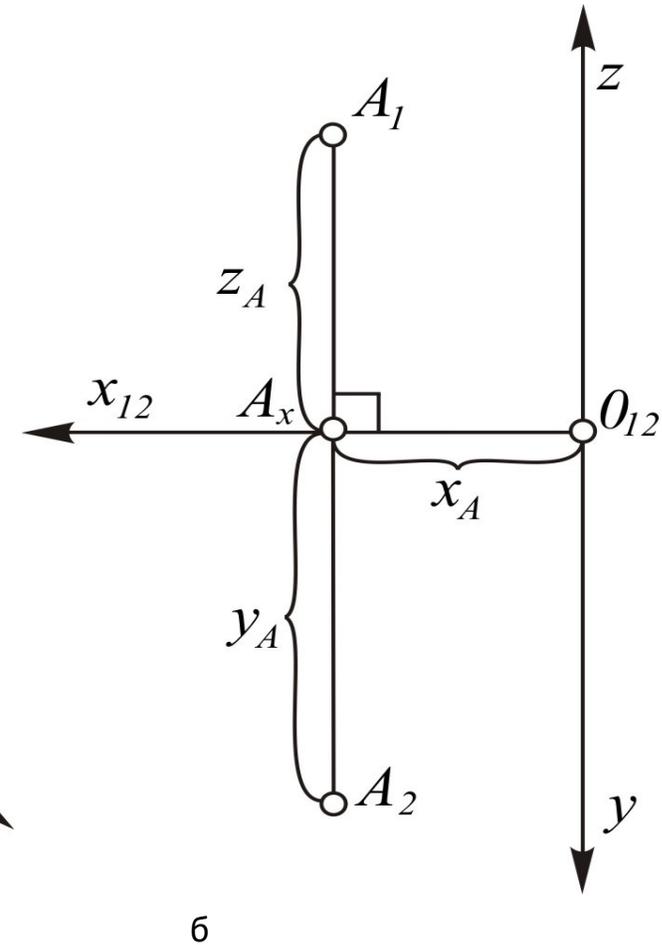
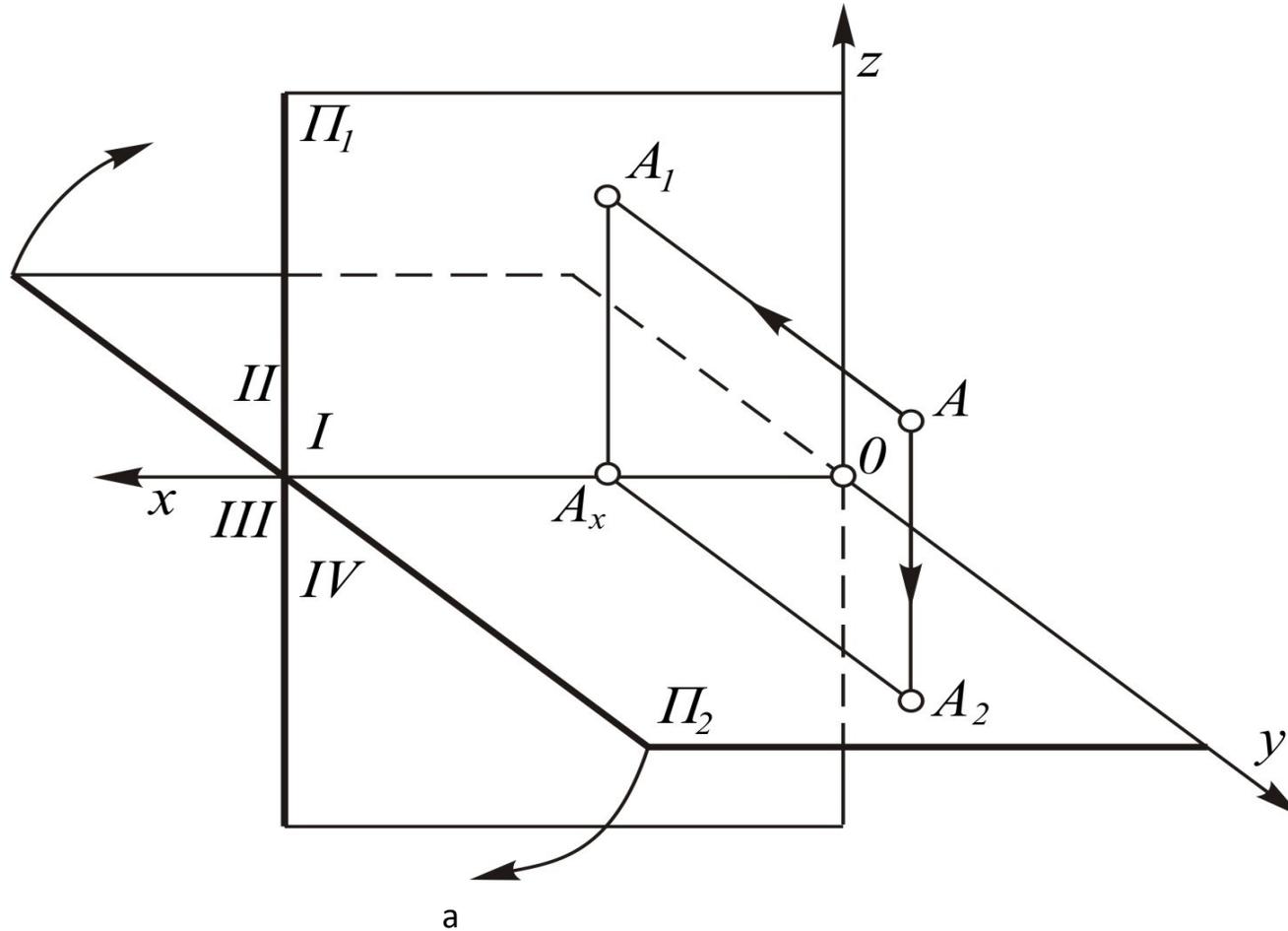




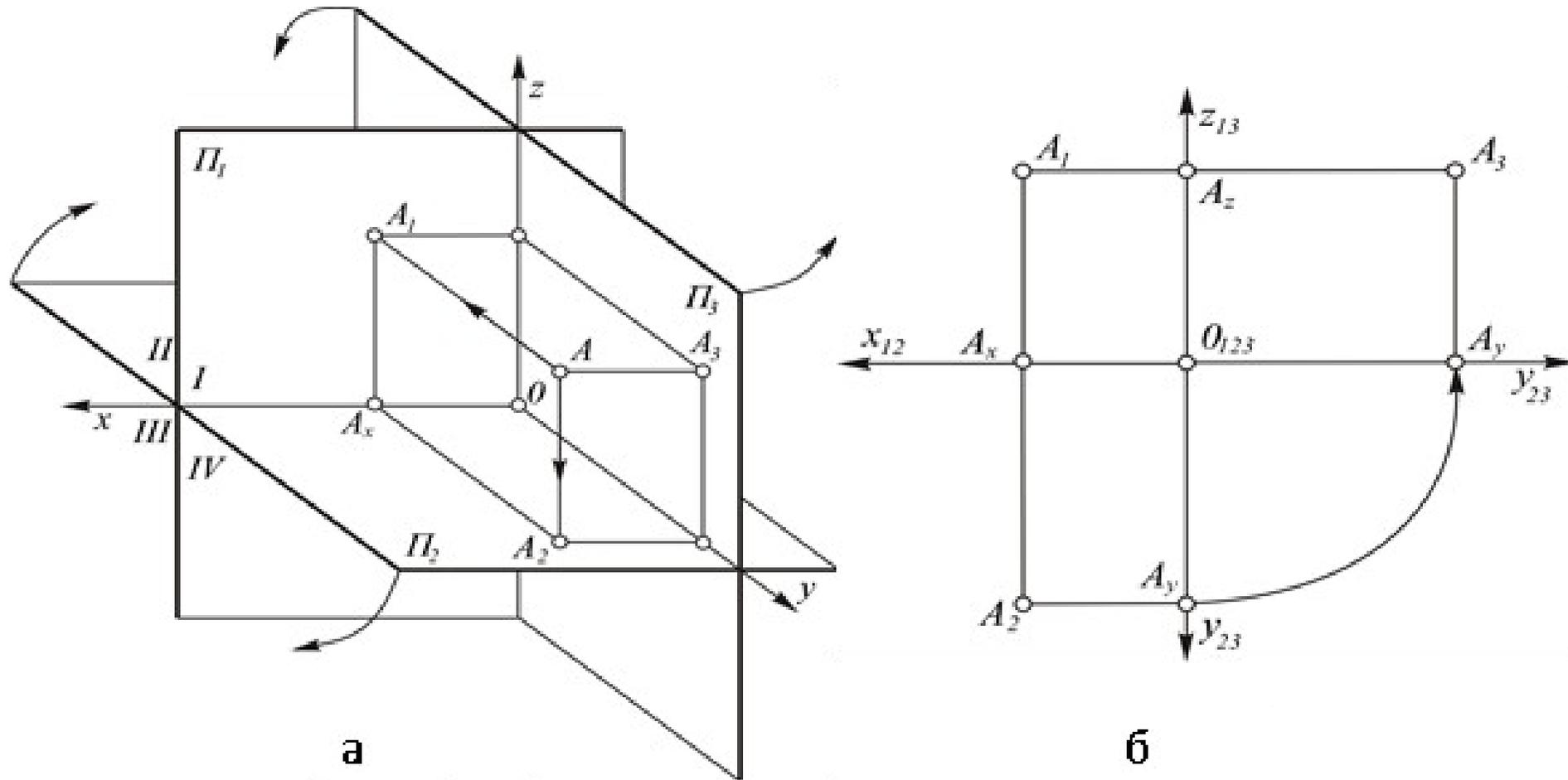
$A(30,25,50)$

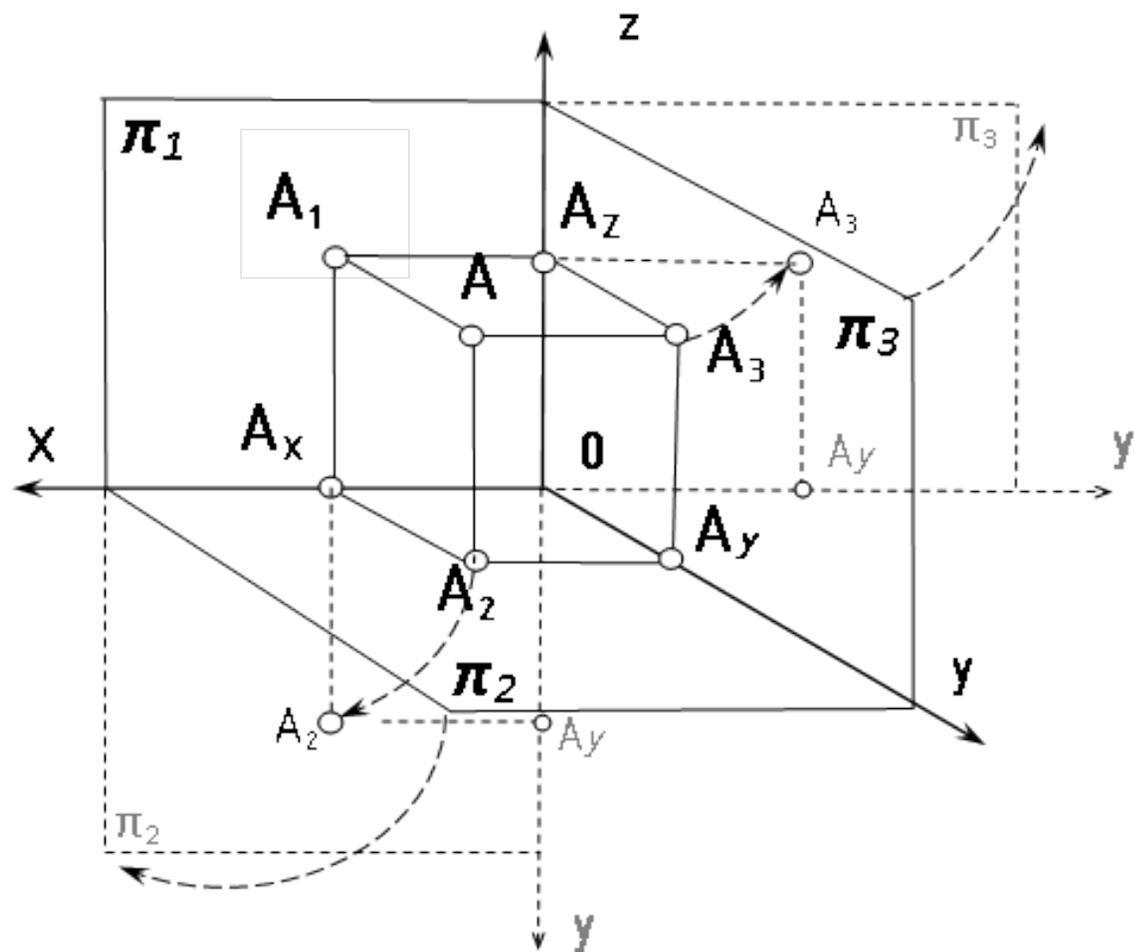


На рисунке 1 видно, что плоскости  $\Pi_1$  (фронтальная),  $\Pi_2$  (горизонтальная) делят пространство на четыре части, называемые четвертями. Полученный чертеж на рисунке 1б является обратимым, так как по нему можно определить координаты точки  $A$  в пространстве. Следовательно, на двухкартинном чертеже можно решать любые позиционные и метрические задачи.



**Трёхкартинный** чертёж Монжа получается из двухкартинного путем добавления третьей плоскости проекций  $\Pi_3$ , перпендикулярной оси  $Ox$ . Эта плоскость называется профильной плоскостью проекций. Плоскости  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  делят пространство на восемь частей, называемых октантами. Построение третьей проекции по двум заданным показано на рисунке (б). В ряде случаев на чертеже Монжа не указываются проекции осей координат. Такие чертежи принято называть **безосными**.





Пусть точка  $A$  ортогонально спроецирована на три взаимно перпендикулярные плоскости  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ , где:

$\pi_1$  – фронтальная плоскость проекций,

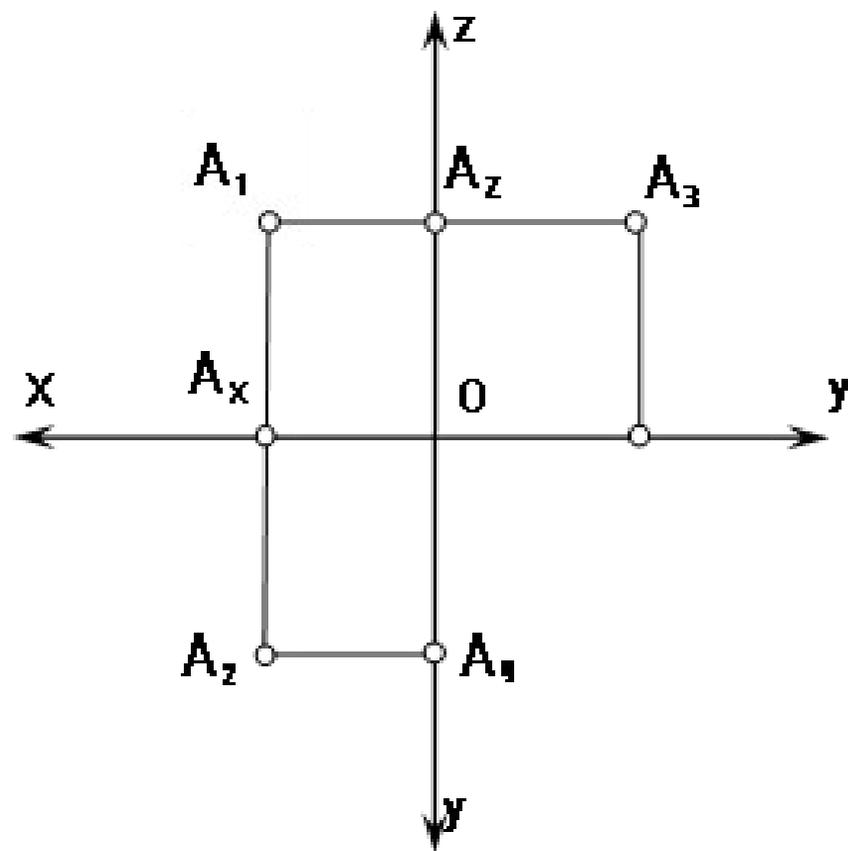
$\pi_2$  – горизонтальная плоскость проекций,

$\pi_3$  – профильная плоскость проекций,

$A_1$  – фронтальная проекция точки  $A$ ,

$A_2$  – горизонтальная проекция точки  $A$ ,

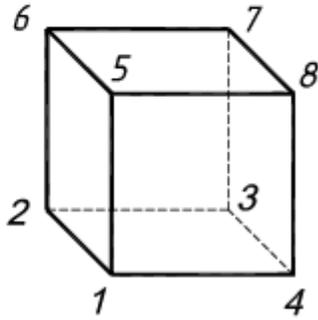
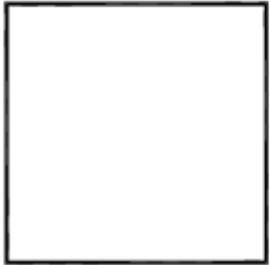
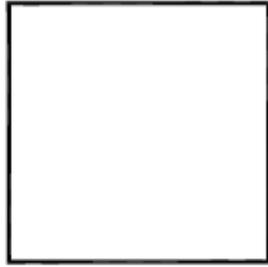
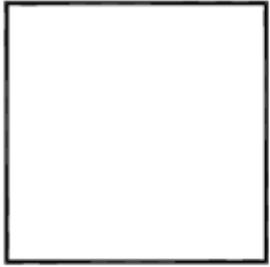
$A_3$  – профильная проекция точки  $A$ .



Развернем плоскость  $\pi_2$  вокруг оси  $x$  так, чтобы она совместилась с плоскостью проекций  $\pi_1$ , а плоскость проекций  $\pi_3$  – вокруг оси  $z$ , чтобы она также совместилась с плоскостью проекций  $\pi_1$ . Таким образом пространственный чертеж может быть представлен в плоском виде.

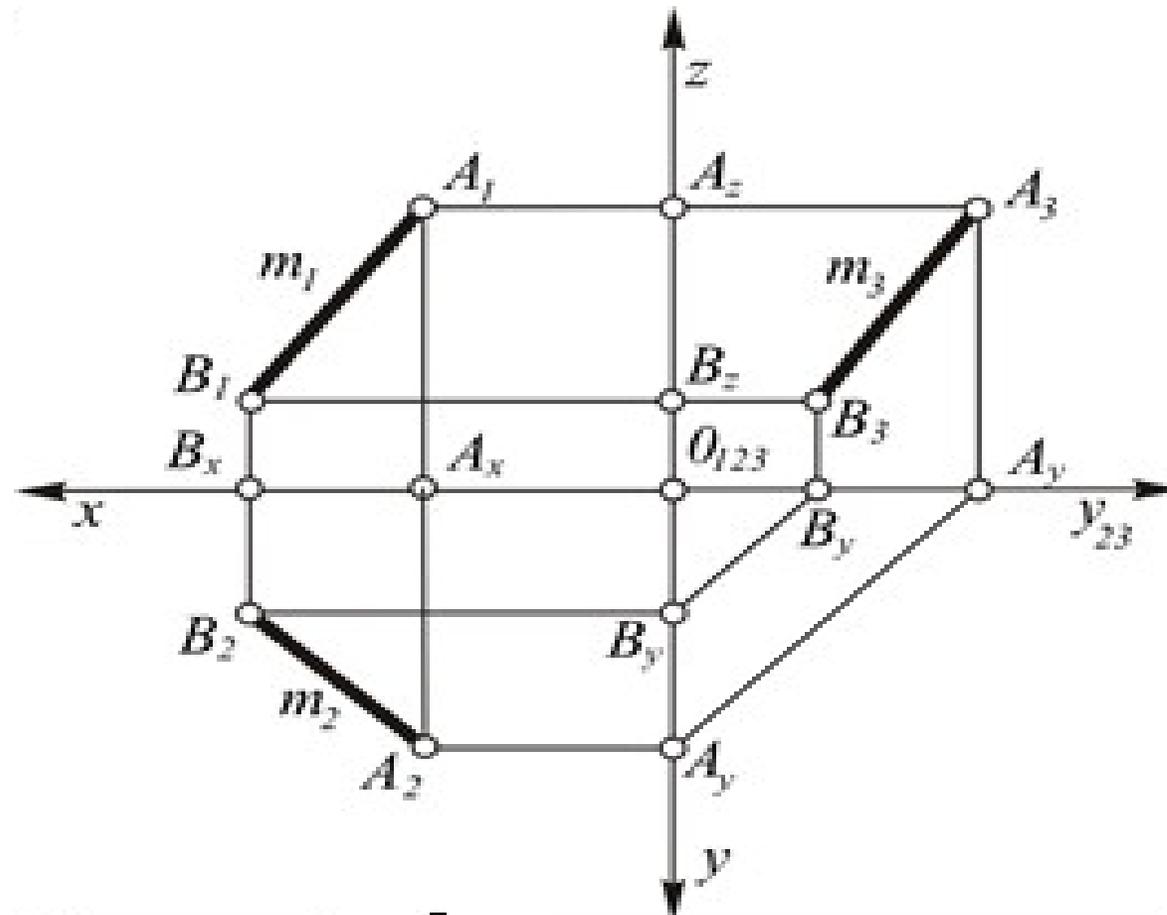
Обозначить вершины куба, показать их видимость

• Куб имеет 8 вершин. На каждой из плоскостей проекций они образуют 4 пары конкурирующих точек



Обозначим вершины куба на горизонтальной проекции. При проецировании на эту плоскость ближе к наблюдателю будет верхняя грань куба, поэтому ее вершины будут видимыми

# Прямые общего и частного положения на эпюре Монжа

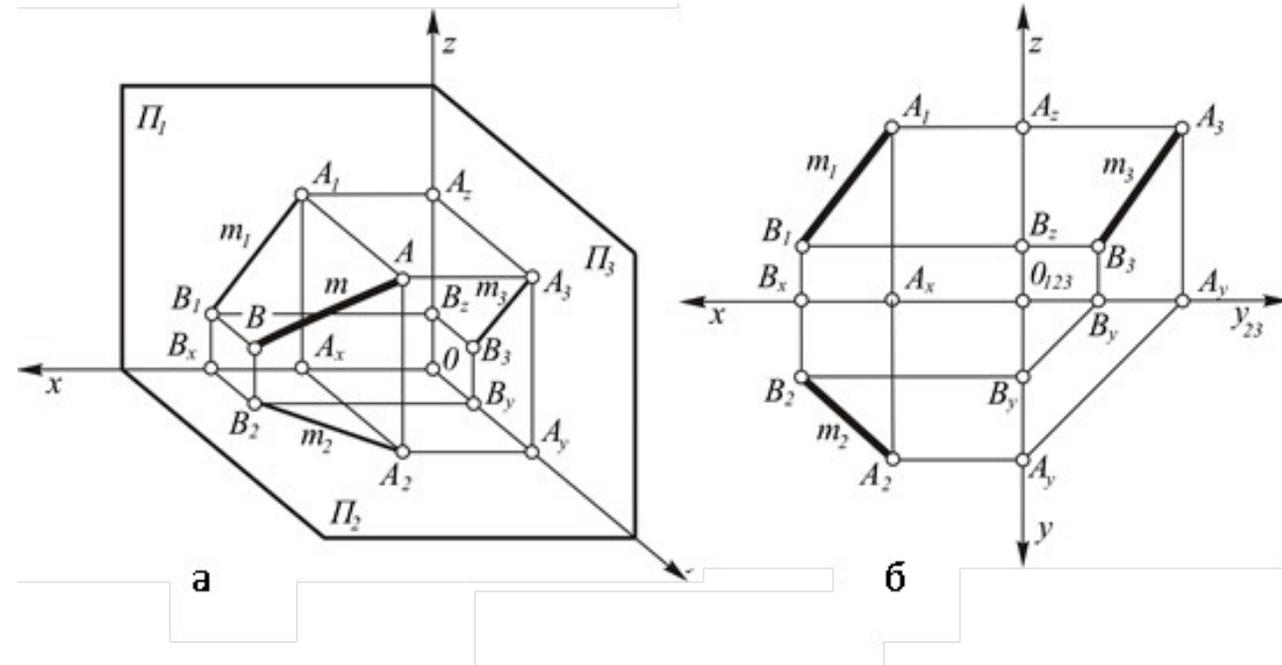


**Аксиома.** Через две различные точки пространства проходит единственная прямая линия.

**Следовательно, положение прямой в пространстве вполне определяется двумя ее точками**

Так как прямая  $m$  однозначно определяется двумя точками  $A$  и  $B$ , то ее проекции определяются проекциями этих точек. В силу сохранения свойства принадлежности при проецировании проекции прямой проходят через одноименные проекции точек:

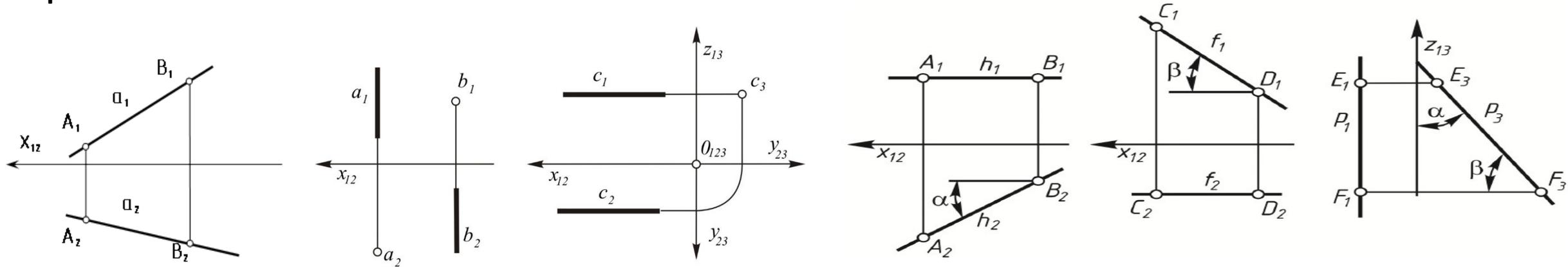
$$m_1(A_1, B_1); m_2(A_2, B_2); m_3(A_3, B_3).$$



Прямая линия может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций П1, П2, П3.

Если прямая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то ее называют **прямой общего положения**.

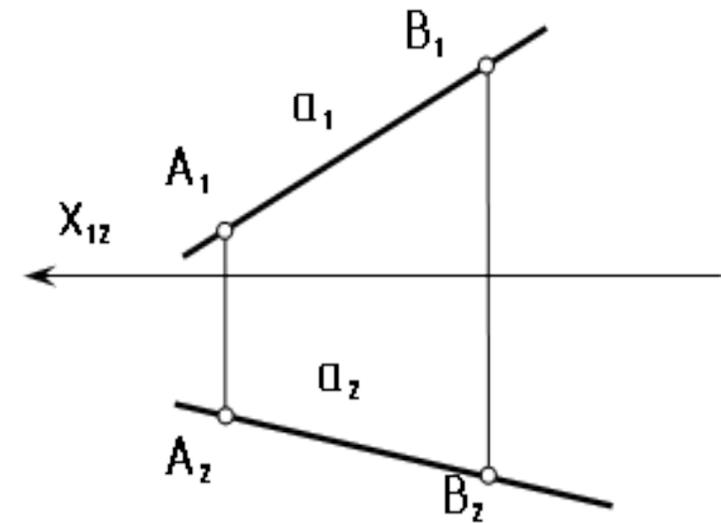
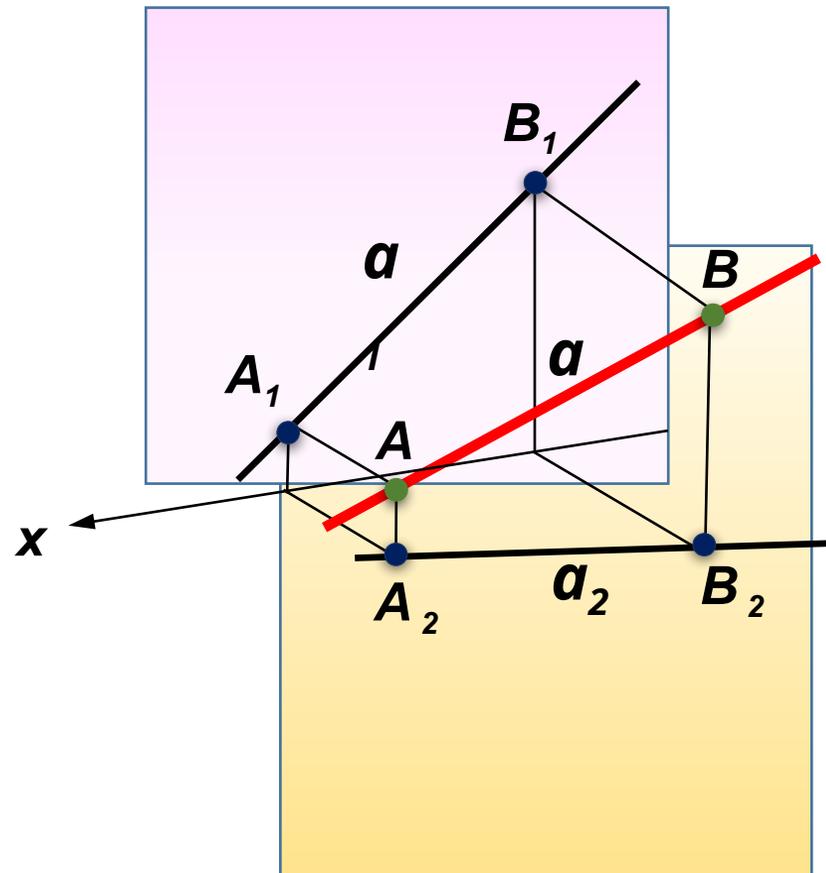
Если прямая параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую прямую называют **прямой частного положения**.



Подробнее все эти прямые рассмотрим далее

# Прямая общего положения

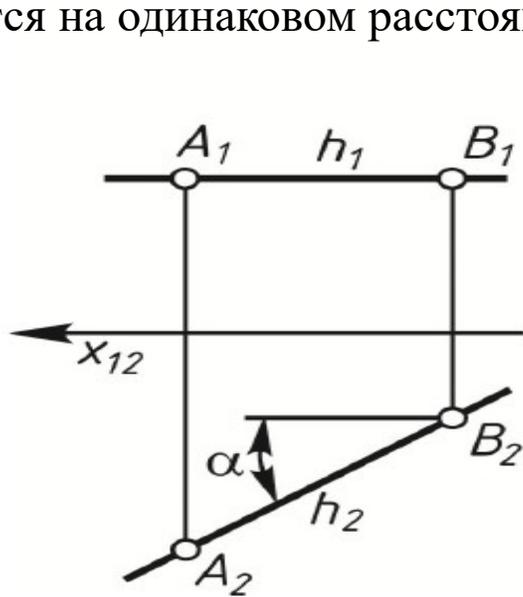
-это прямая, расположенная совершенно произвольно относительно плоскостей проекций.



# Прямые уровня

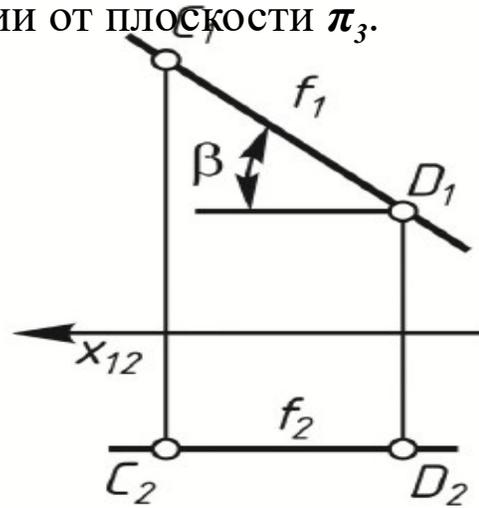
– это прямые, параллельные плоскостям проекций.

- Горизонтальная прямая (**Горизонталь**) –  $h$  – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_2$ ;
- Фронтальная прямая (**Фронталь**) –  $f$  – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_1$ ;
- Профильная прямая –  $p$  – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_3$ .



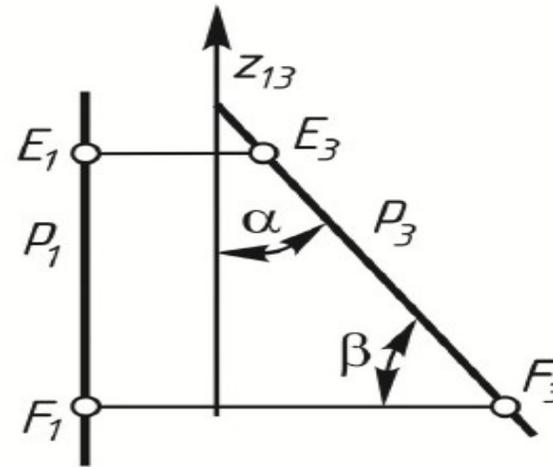
$$|AB| = |A_2B_2|$$

$$\alpha = \hat{h, \pi_1}$$



$$|CD| = |C_1D_1|$$

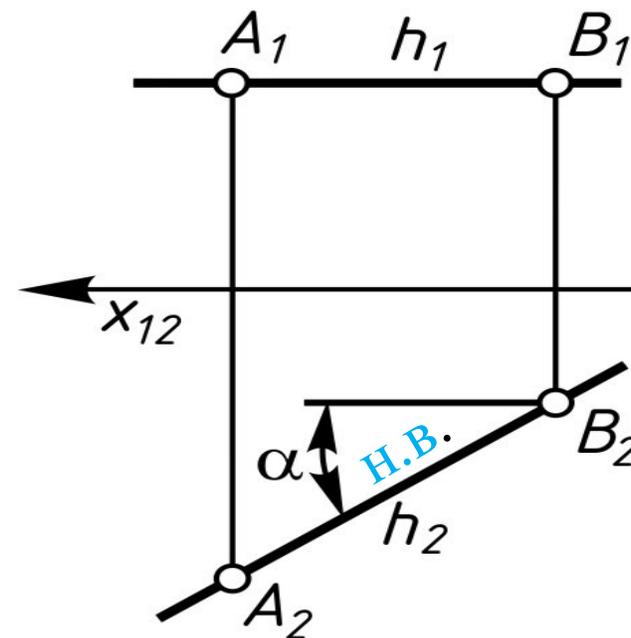
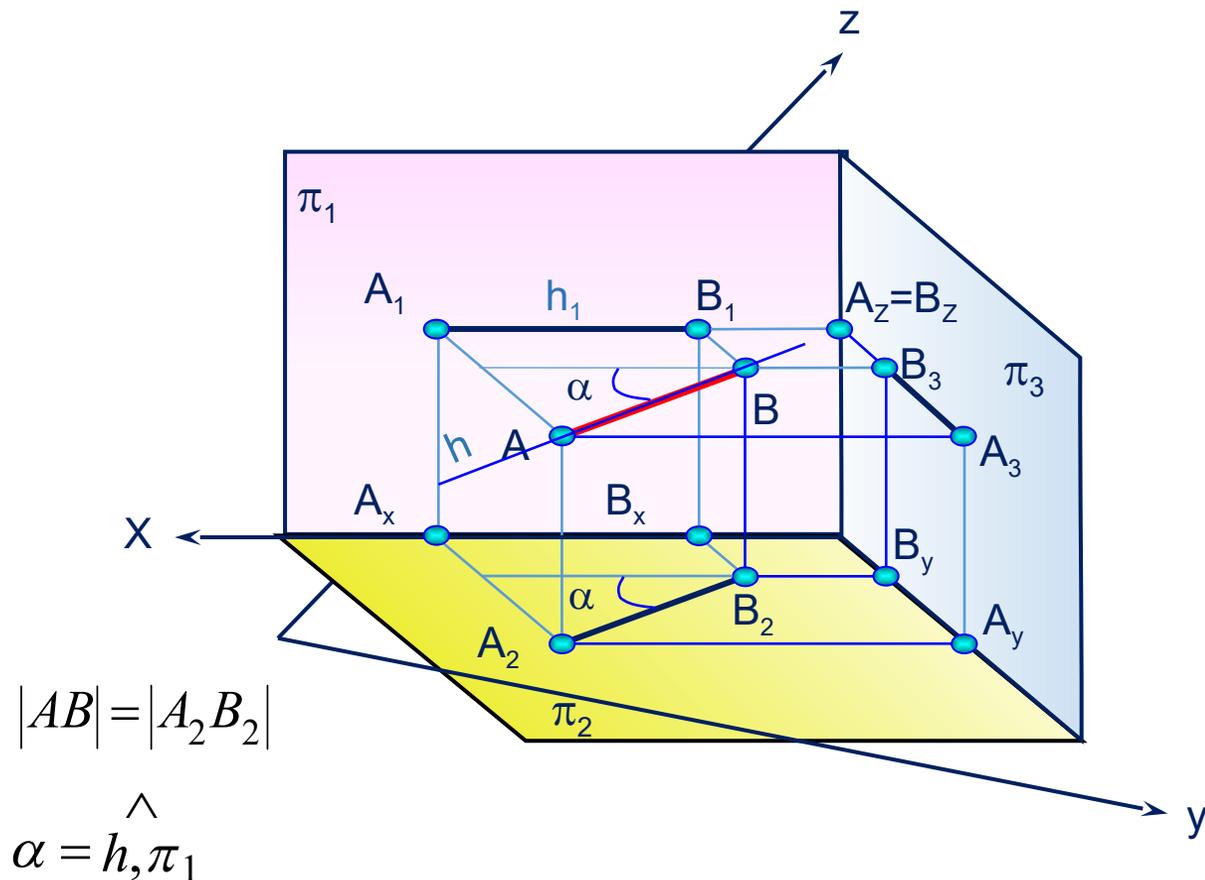
$$\beta = \hat{f, \pi_2}$$



$$|EF| = |E_3F_3|$$

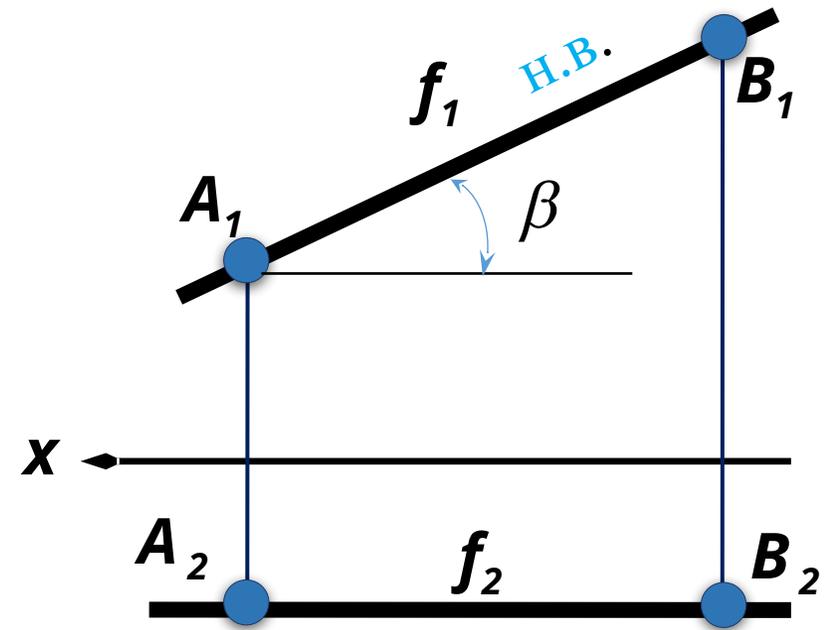
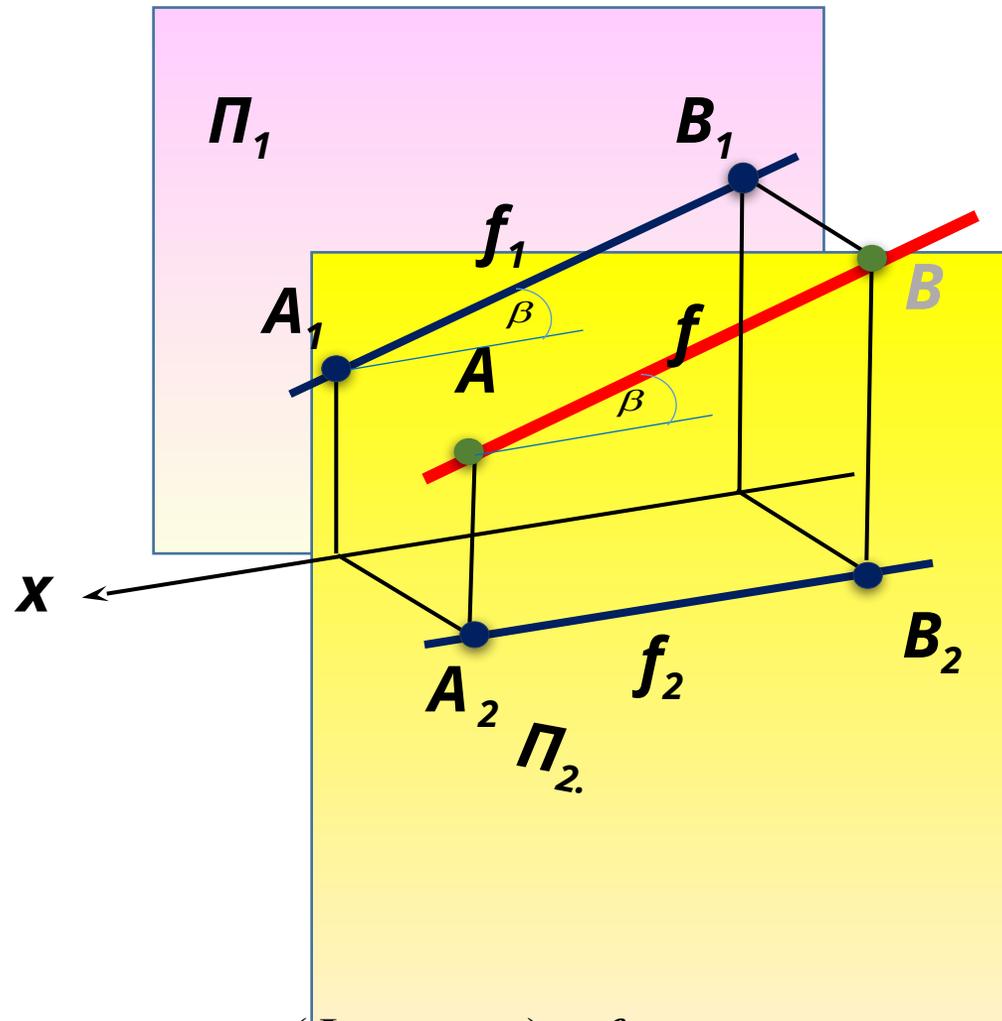
$$\alpha = \hat{p, \pi_1} \quad \beta = \hat{p, \pi_2}$$

## Горизонтальная прямая (Горизонталь) – $h$



- а) Горизонтальная прямая (Горизонталь) –  $h$  – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_2$ ;

# Фронтальная прямая (Фронталь) – $f$

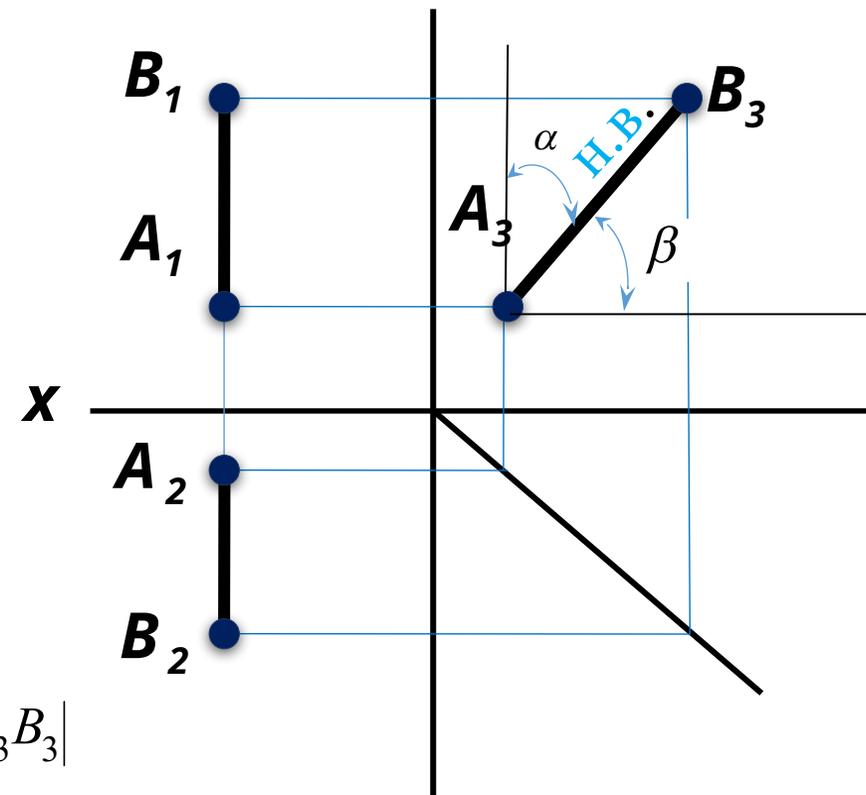
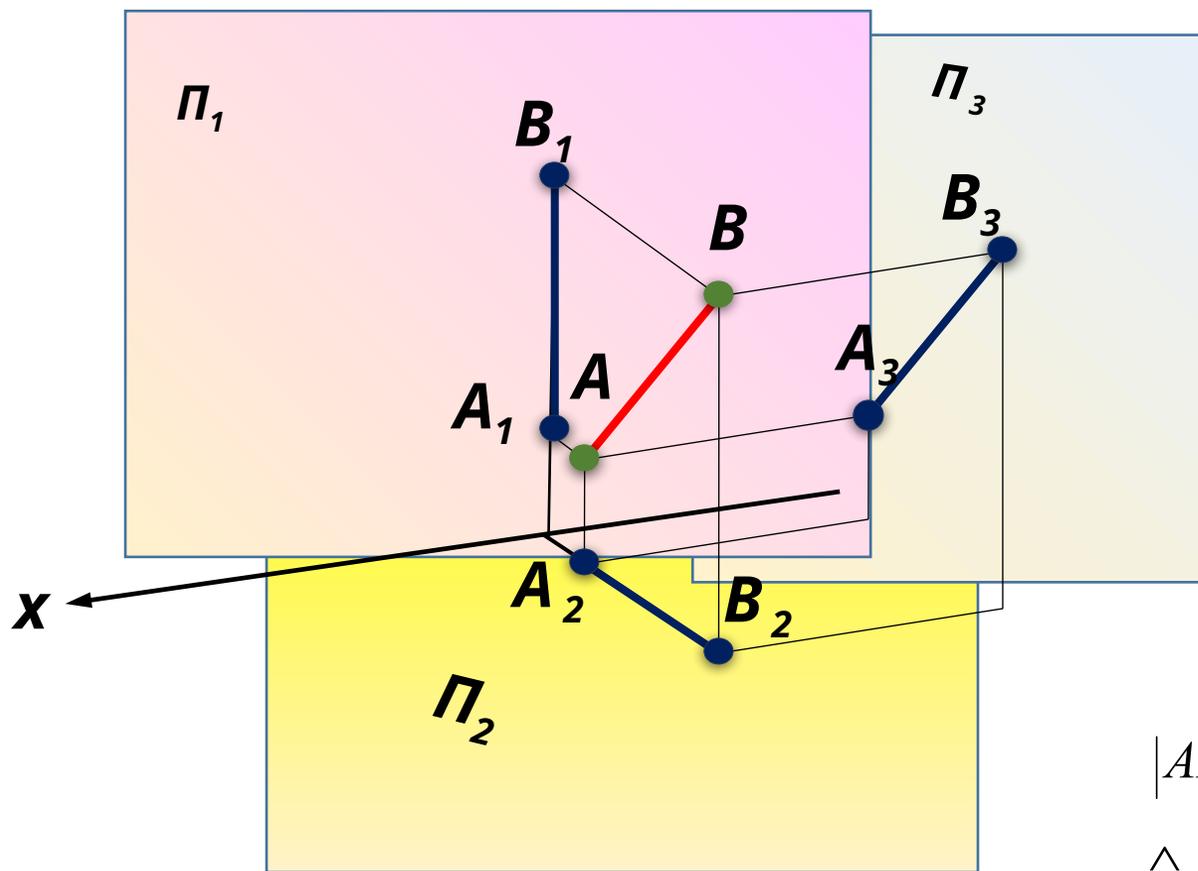


$$|AB| = |A_1B_1|$$

$$\beta = \hat{f, \pi_2}$$

а) Фронтальная прямая (Фронталь) –  $f$  – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_1$ ;

# Профильная прямая – $p$



$$|AB| = |A_3B_3|$$

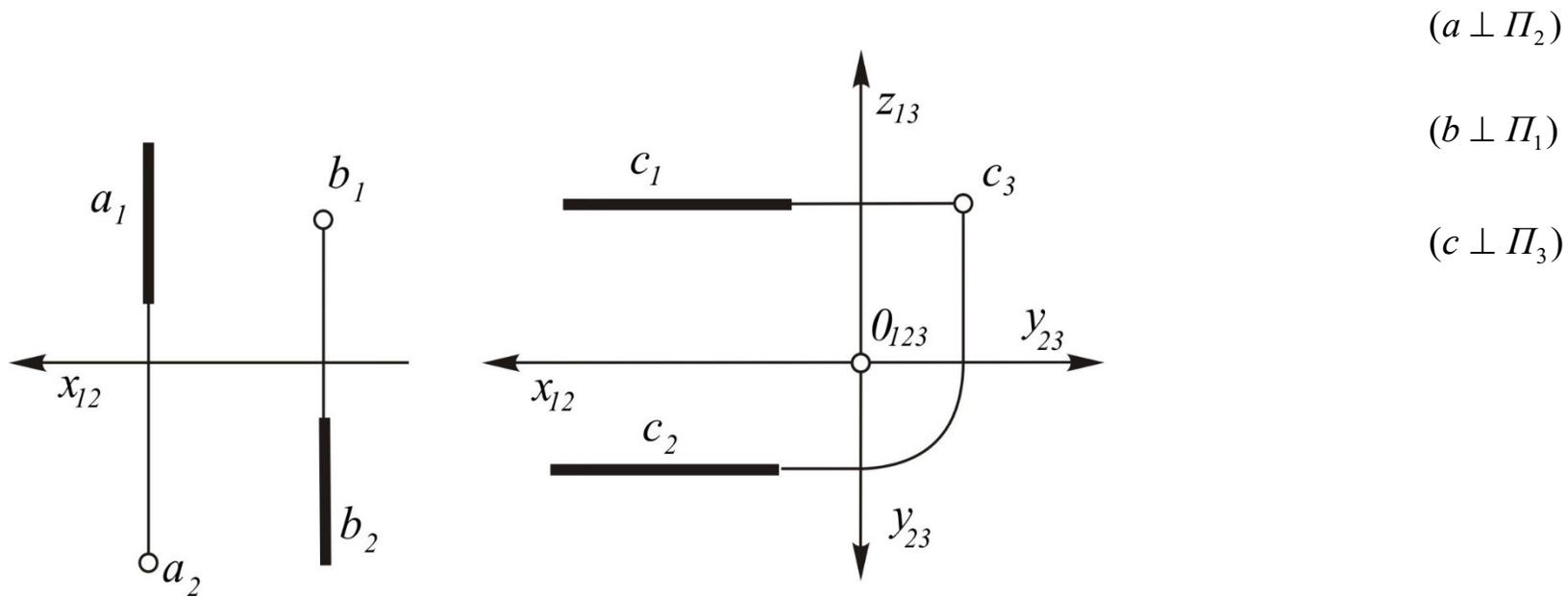
$$\alpha = \hat{p, \pi_1} \quad \beta = \hat{p, \pi_2}$$

Профильная прямая –  $p$  – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_3$ .

# Проецирующие прямые

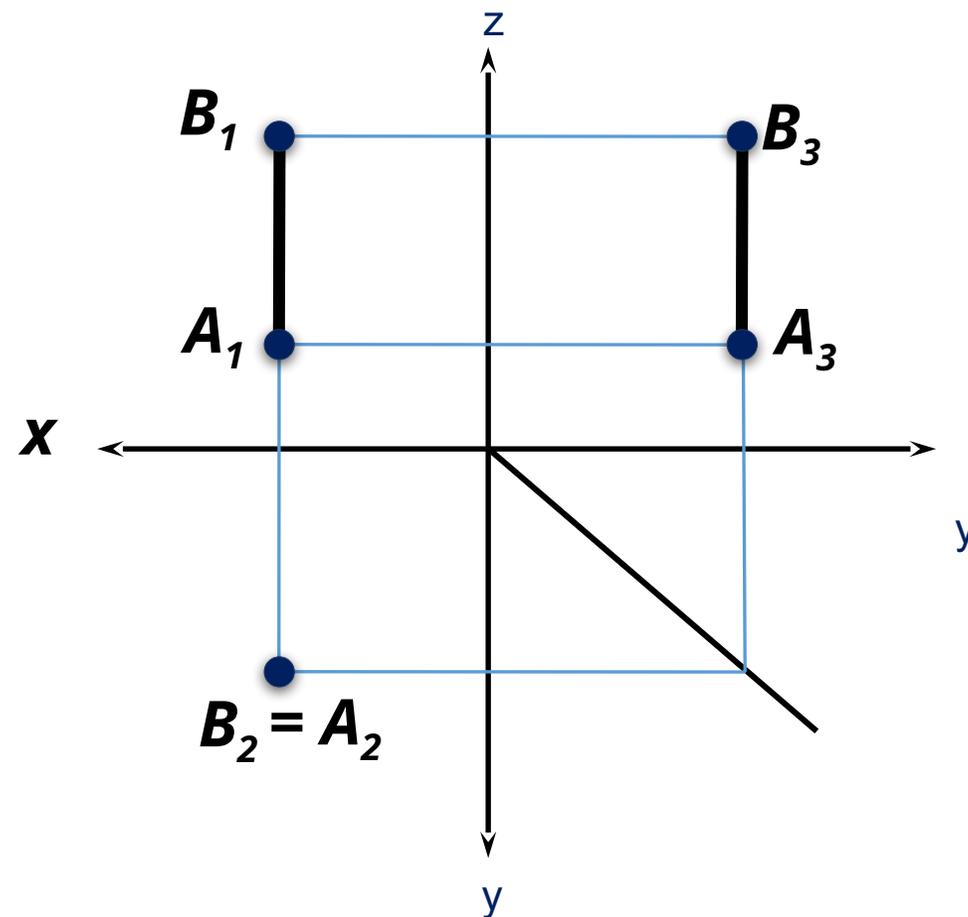
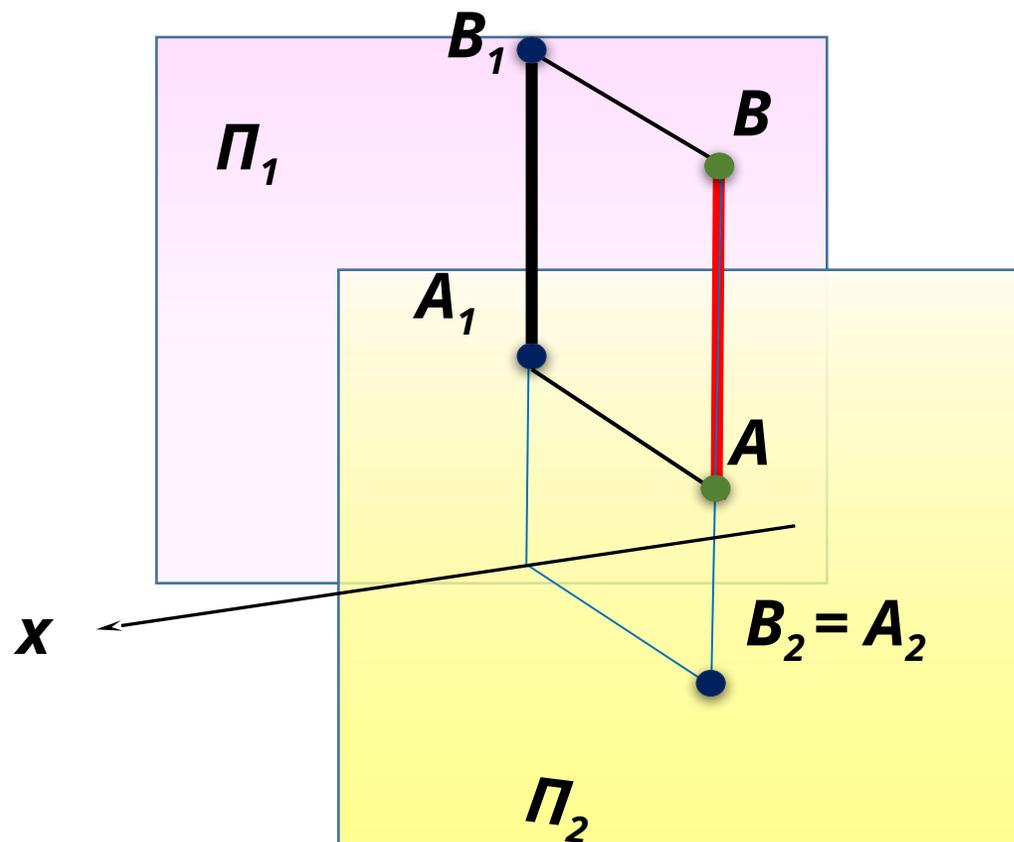
– это прямые, перпендикулярные плоскостям проекций.

- Фронтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Фронтальная проекция прямой является точкой.
- Горизонтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ . Горизонтальная проекция прямой является точкой.
- Профильно проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ . Профильная проекция прямой является точкой.



**Горизонтально проецирующая прямая** – это прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ .

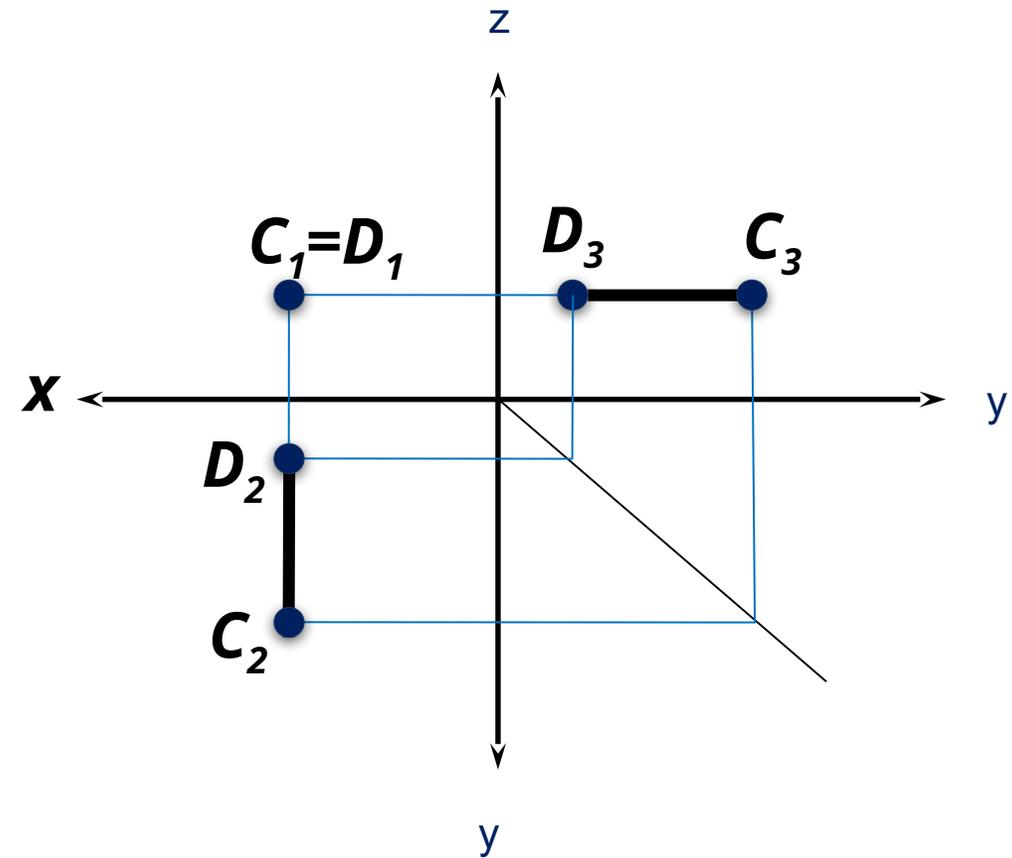
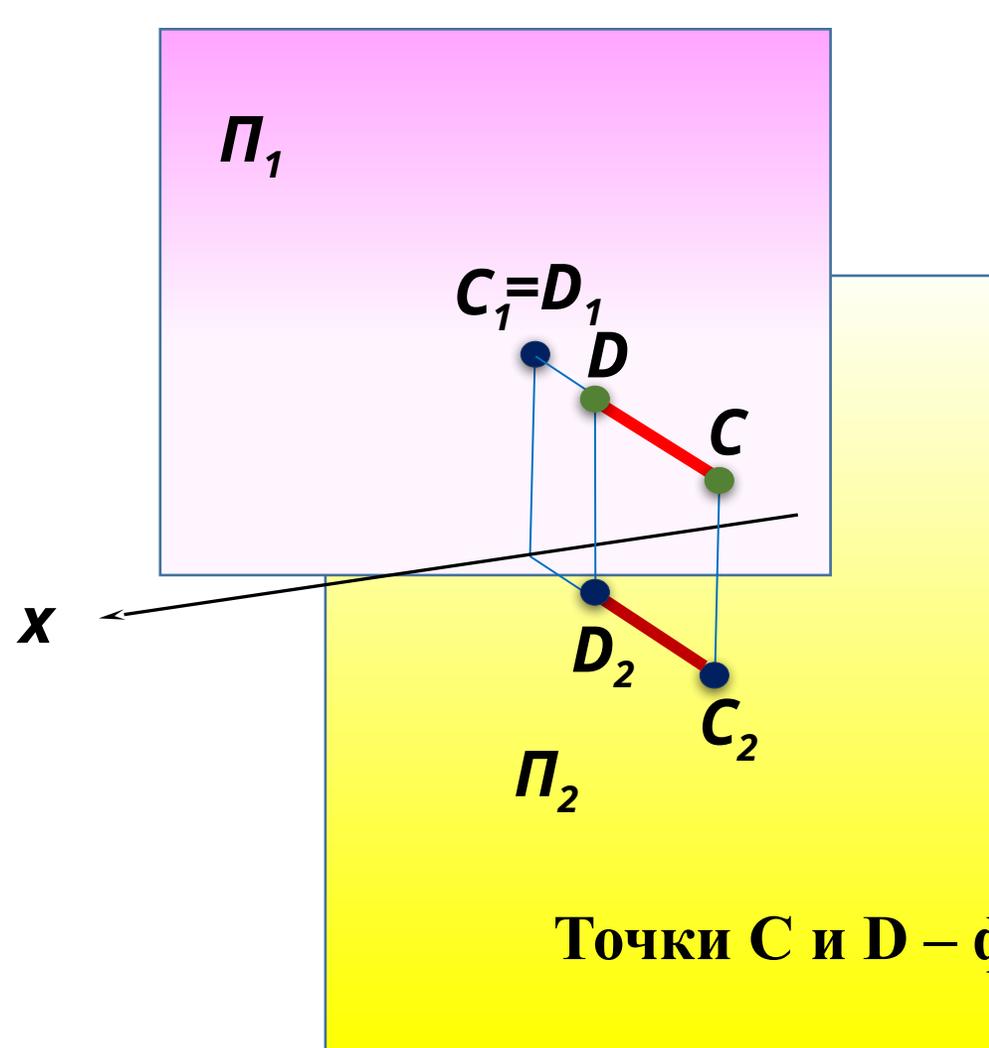
Горизонтальная проекция прямой является точкой



**Точки А и В – горизонтально конкурирующие точки** (расположены на одной горизонтально-проецирующей прямой)

**Конкурирующими** точками называются такие **точки** пространства, у которых совпадают какие-либо две одноименные проекции

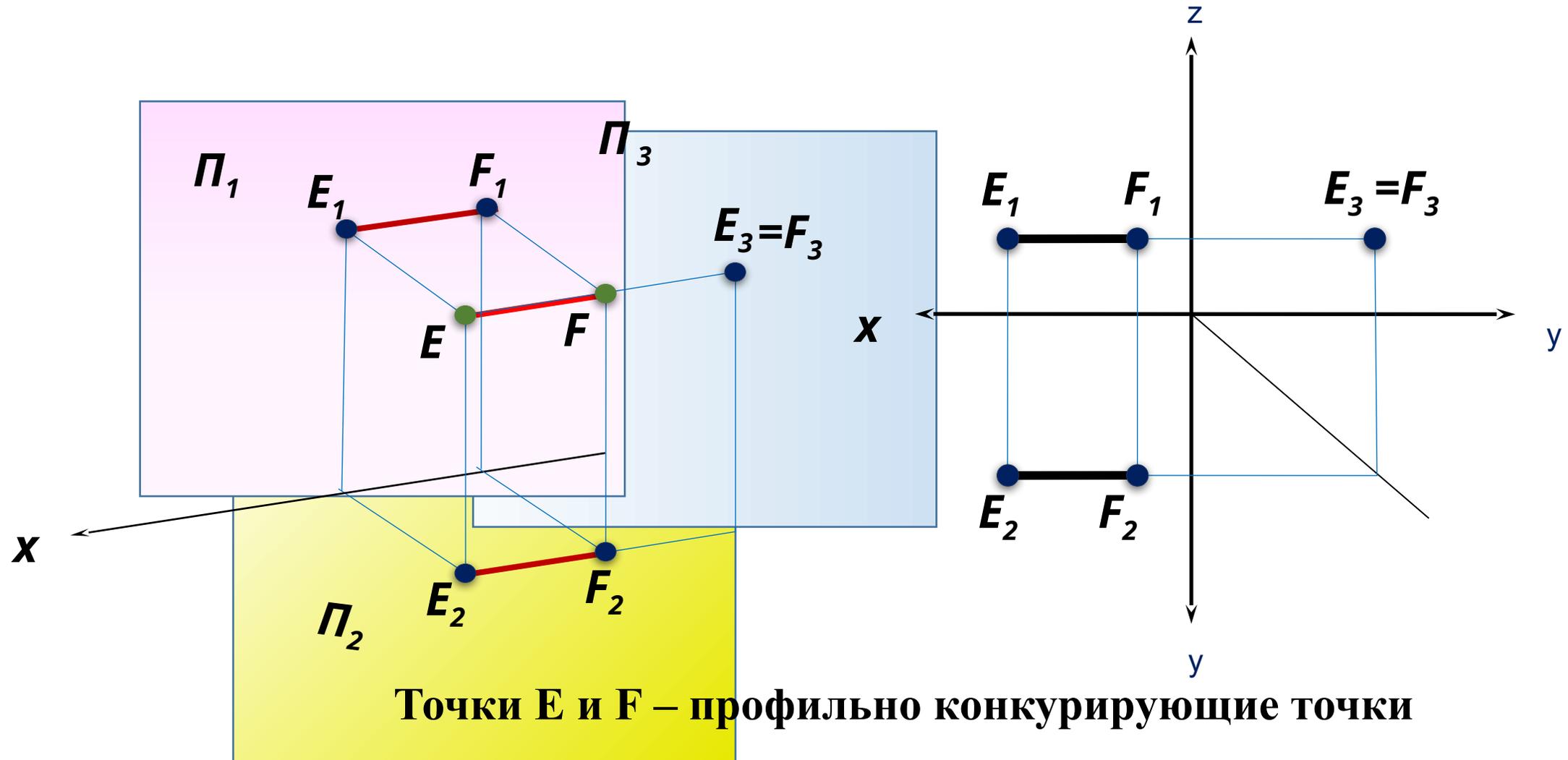
**Фронтально проецирующая прямая** – это прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Фронтальная проекция прямой является точкой.



**Точки  $C$  и  $D$  – фронтально конкурирующие точки**

**Профильно проецирующая прямая** – это прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ .

Профильная проекция прямой является точкой.

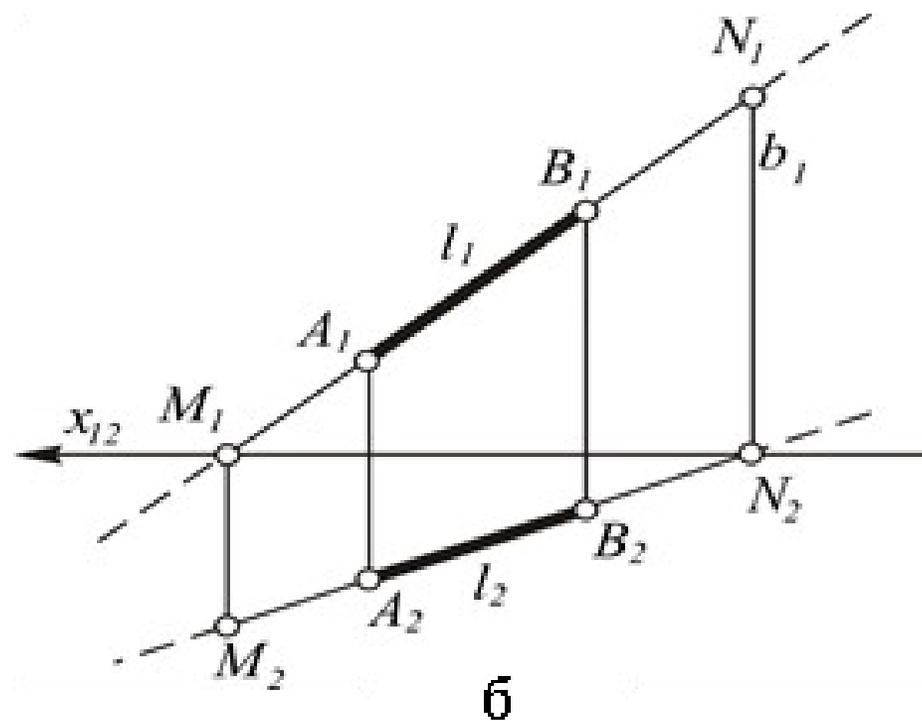
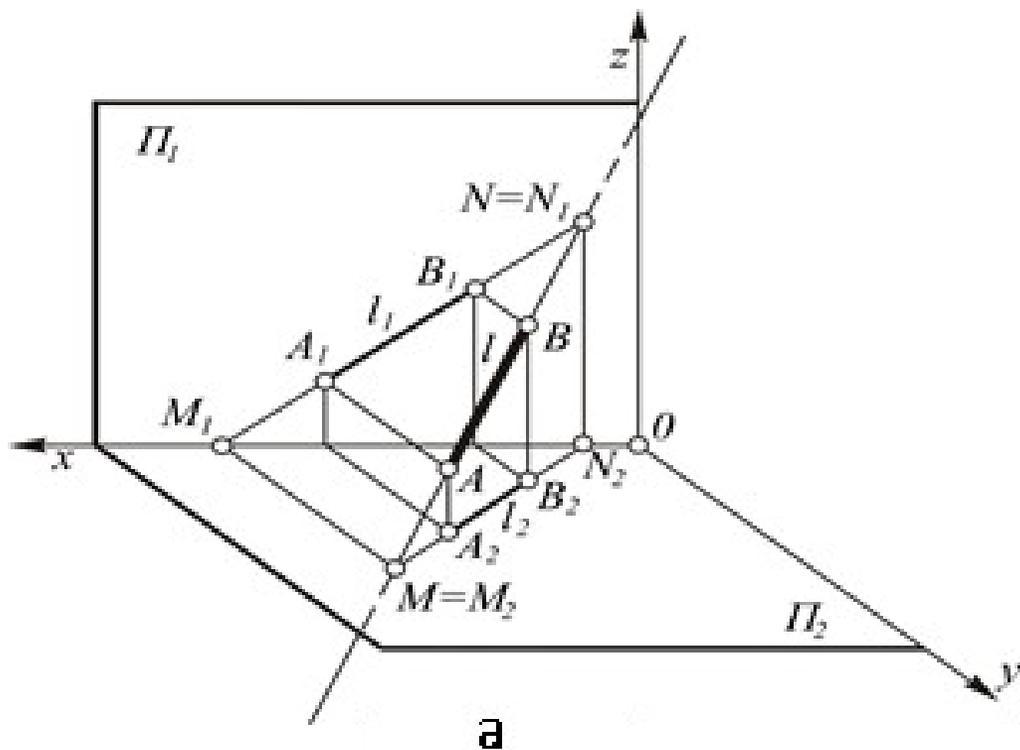


## Следы прямой

Точка пересечения прямой с какой-либо плоскостью проекций называется ее следом на этой плоскости проекций.

Апplikата горизонтального следа  $M = l \cap \Pi_2$  прямой  $a$  равна нулю, поэтому его фронтальная проекция  $M_1$  принадлежит оси  $x_{12}$ . Аналогично, фронтальный след  $N = l \cap \Pi_1$  имеет ординату, равную нулю, следовательно, его горизонтальная проекция  $N_2$  принадлежит оси  $x_{12}$ .

Для построения горизонтального следа  $M$  прямой  $l$  необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с осью  $x_{12}$  и в этой точке восставить к оси перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой. Для построения фронтального следа  $N$  прямой  $l$  нужно из точки пересечения горизонтальной проекции ее с осью  $x_{12}$  восставить к оси перпендикуляр до пересечения с фронтальной проекцией прямой.



**Спасибо за внимание !**