

Курс лекций по дисциплине

# «Инженерная и компьютерная графика»

лектор

**Каражанова Дарига Дюсеновна**

Кандидат педагогических наук,  
ассоциированный профессор Satbayev University



## Лекция 2

# Методы и свойства ортогонального проецирования. Эпюр Монжа. Чертеж точки, прямой и плоскости на эпюре

К.п.н., ассоциированный профессор

Каражанова Дарига Дюсеновна

## Введение

Как любая наука «Начертательная геометрия» изучает объективные законы природы. С ее помощью познаются геометрические свойства предметов реального мира, характеризуемые понятиями «форма», «размеры», «положение в пространстве», «взаимное положение». Методы начертательной геометрии являются теоретической базой для решения задач технического черчения.



Гаспар Монж

В технике чертежи являются основным средством выражения человеческих идей. Они должны не только определять форму и размеры предметов, но и быть достаточно простыми и точными в графическом исполнении, помогать всесторонне исследовать предметы и их отдельные детали. Для того чтобы правильно выразить свои мысли с помощью рисунка, эскиза, чертежа требуется знание теоретических основ построения изображений геометрических объектов, их многообразия и отношения между ними, что и составляет предмет начертательной геометрии.

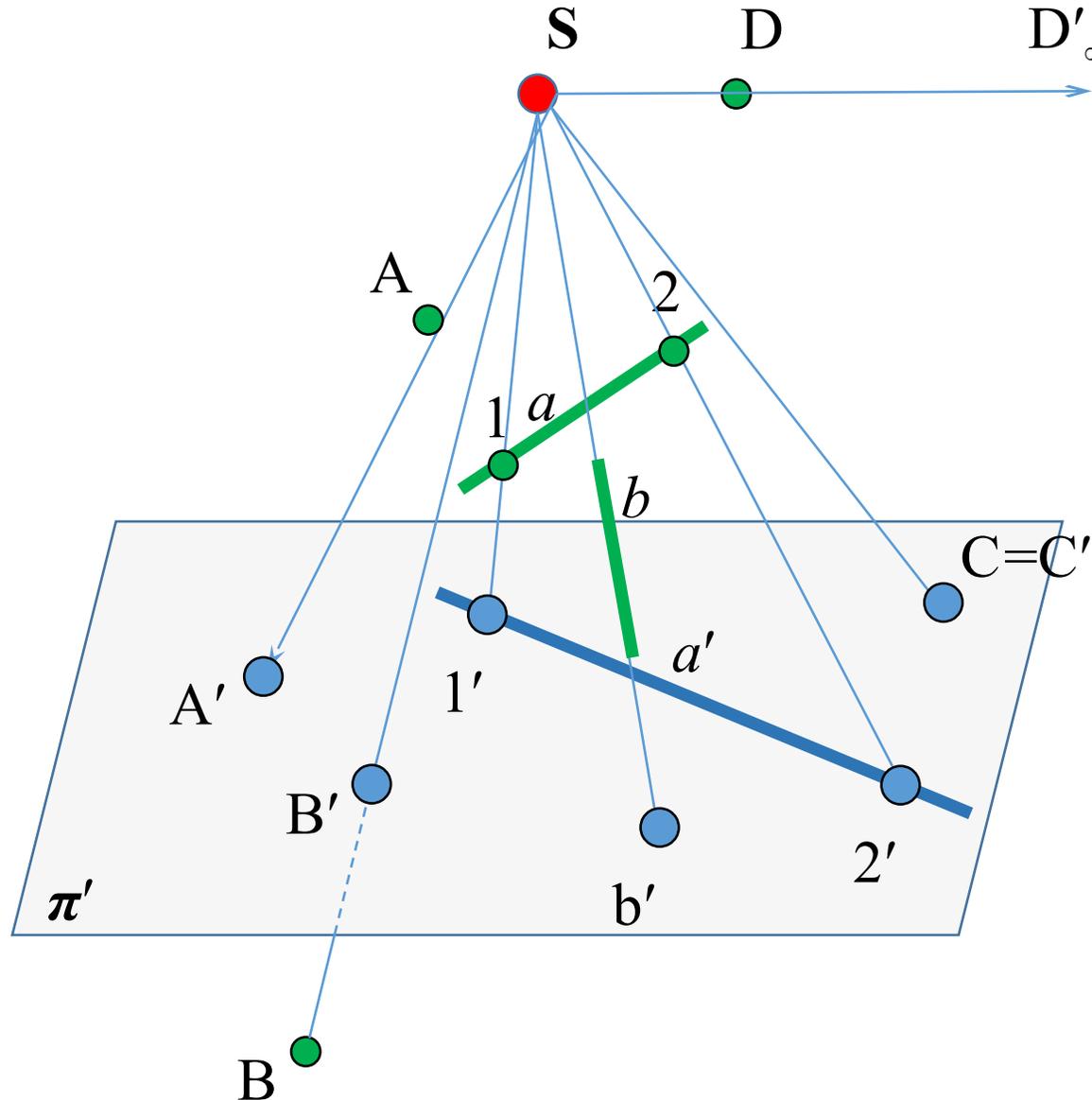
Изучение начертательной геометрии способствует развитию пространственного воображения и навыков правильного логического мышления, совершенствуя нашу способность – по плоскому изображению мысленно создавать представления о форме предмета и наоборот – создавать изображения мысленно созданных образов – визуализация мысли.

Зарождение начертательной геометрии связывается с именем Гаспара Монжа – французского математика, геометра (1746–1818), опубликовавшего в 1798 году книгу «Начертательная геометрия», в которой были сформулированы основные принципы комплексного проецирования.

## Методы проецирования.

В настоящее время изображения получают методом проекций.

При этом берут плоскость  $\pi'$  и точку  $S$ , расположенную вне этой плоскости.



Совокупность плоскости  $\pi'$  и точки  $S$  образует аппарат проецирования, где:

$\pi'$  – плоскость проекций,  
 $S$  – центр проецирования.

Для получения изображения точки  $A$  ее соединяют с центром проекций  $S$  прямой линией. Точку  $A'$  пересечения прямой  $(AS)$  и плоскости  $\pi'$  принимают за изображение точки  $A$  на плоскости  $\pi'$ :

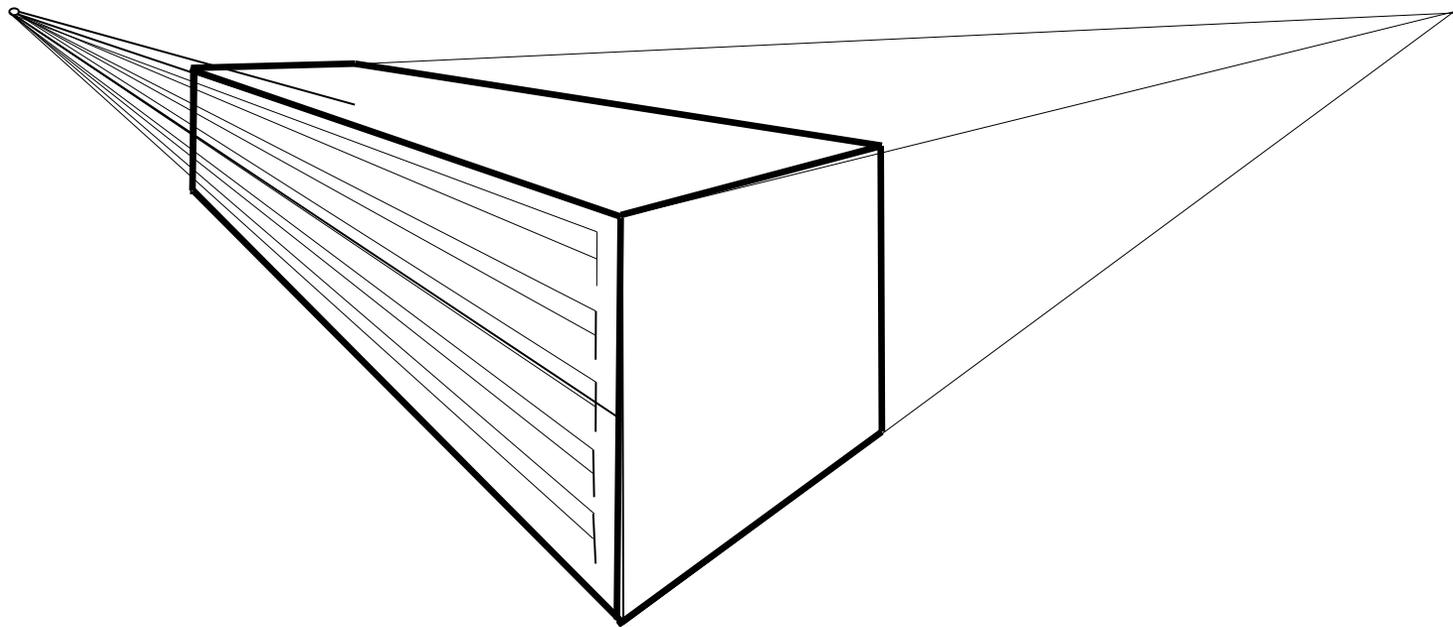
т. $A'$  – центральная проекция точки  $A$  на плоскость  $\pi'$ ,

$(AS)$  – проецирующая прямая (проецирующий луч).

Описанные построения выражают суть операции, называемой **центральным проецированием** точек пространства на плоскость.

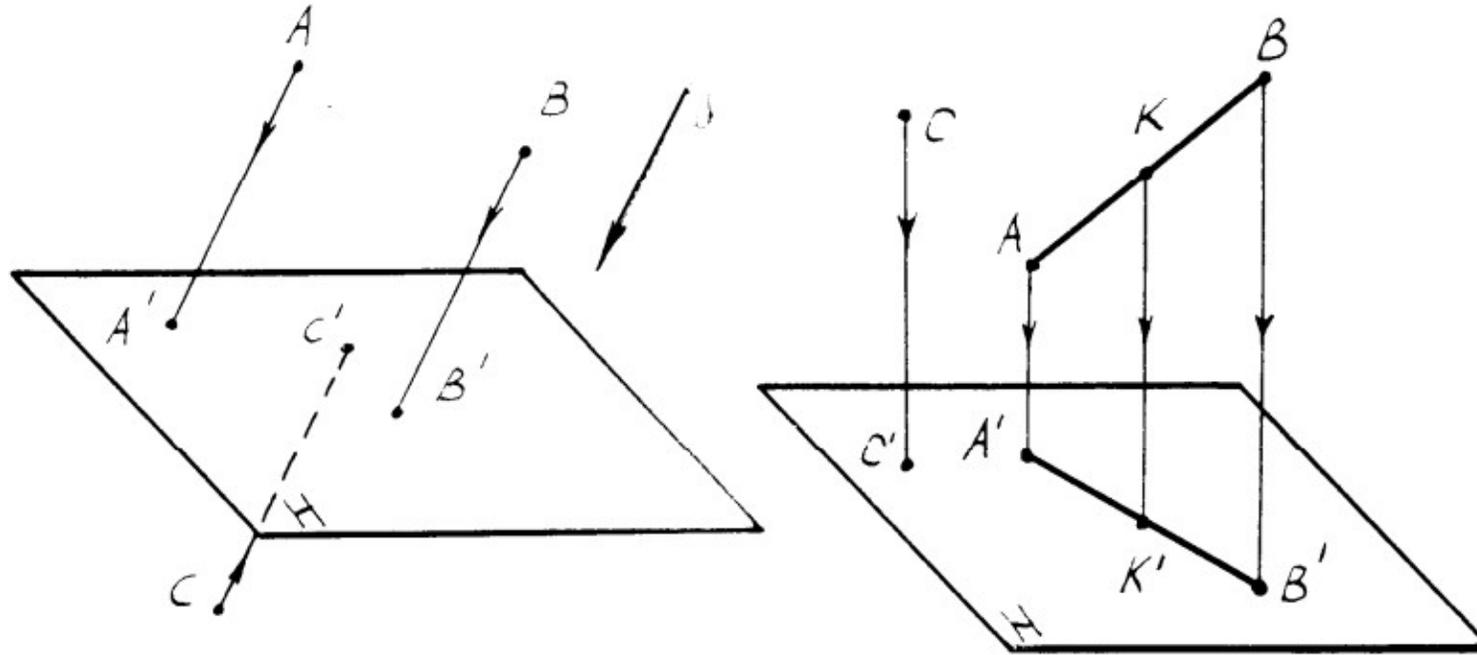
$$D'_{\infty} \in \pi'$$

На основе центрального проецирования выполняется линейная перспектива, наиболее наглядный вид графических изображений. Это достаточно сложный метод чаще всего используемый в архитектуре



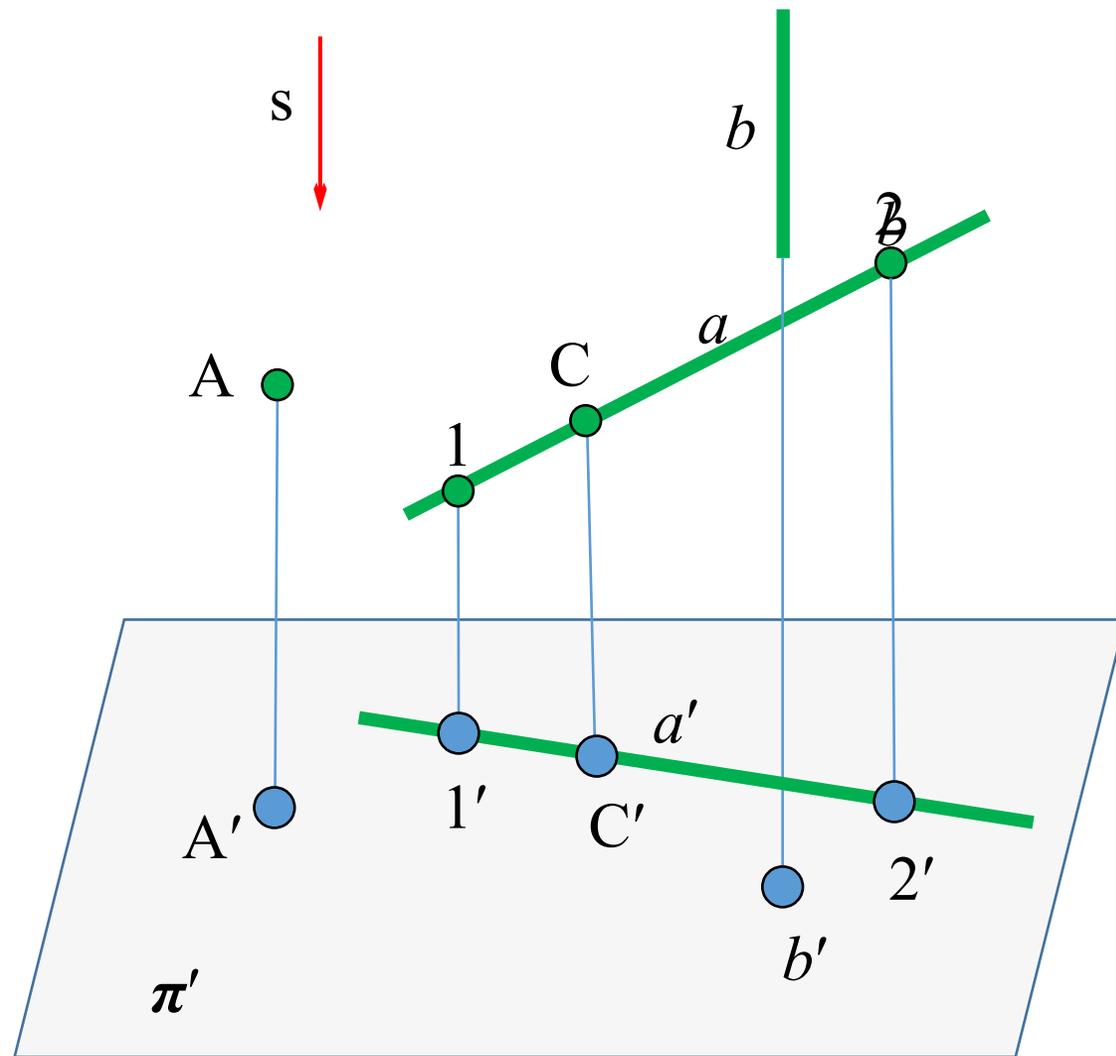
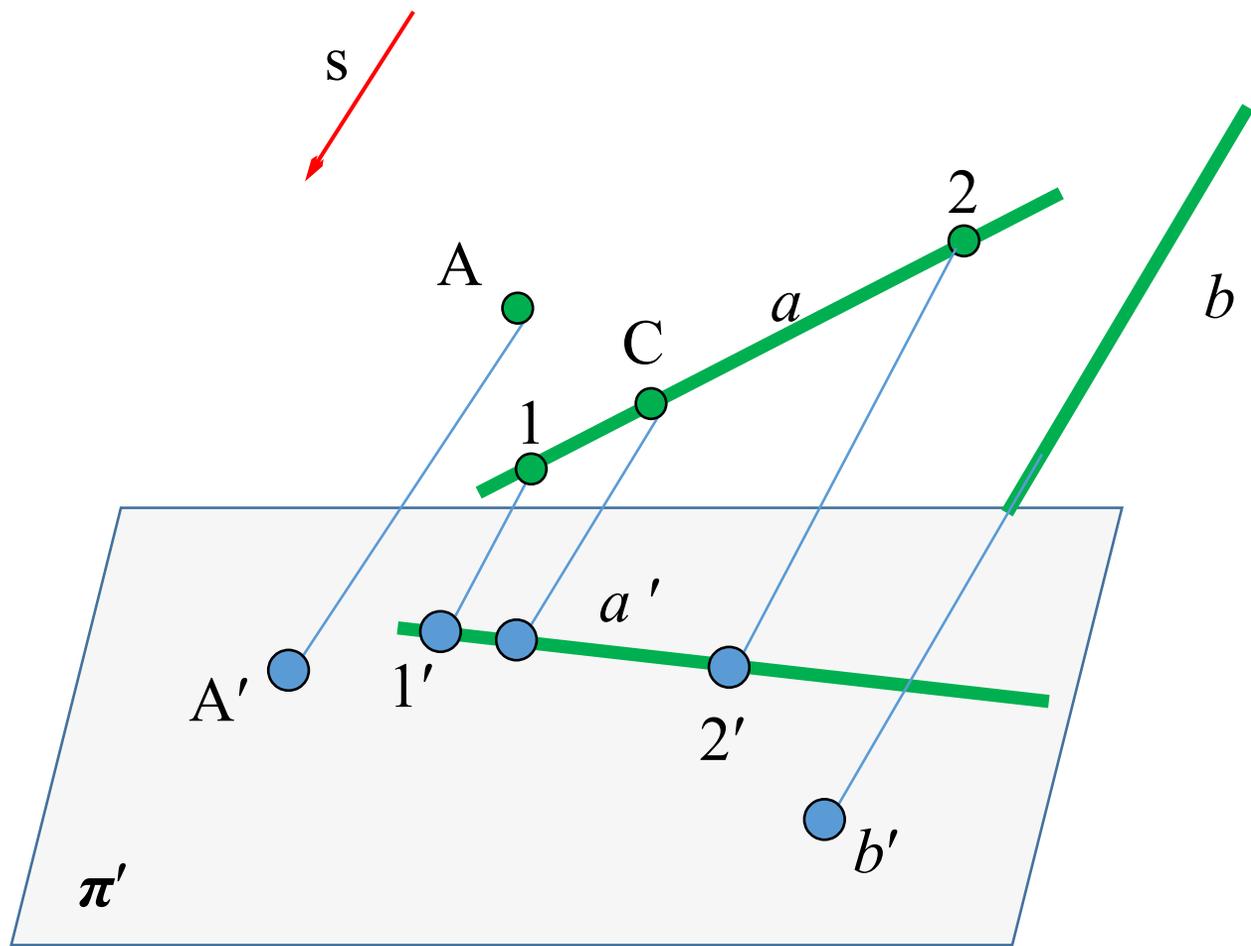
**Параллельное проецирование** является частным случаем центрального проецирования. При этом методе полагается, что центр проецирования  $S$  удален в бесконечность (бесконечно удаленная точка  $S_\infty$ ), в результате чего проецирующие лучи становятся взаимно параллельными, и проецирование всех точек осуществляется по единому направлению  $s$ . В зависимости от угла, под которым проецирующий луч падает на плоскость проекций различают проекции:

1. прямоугольные, или ортогональные (при угле, равном  $90^\circ$ ),
2. косоугольные (при угле, не равном  $90^\circ$ ).



а)

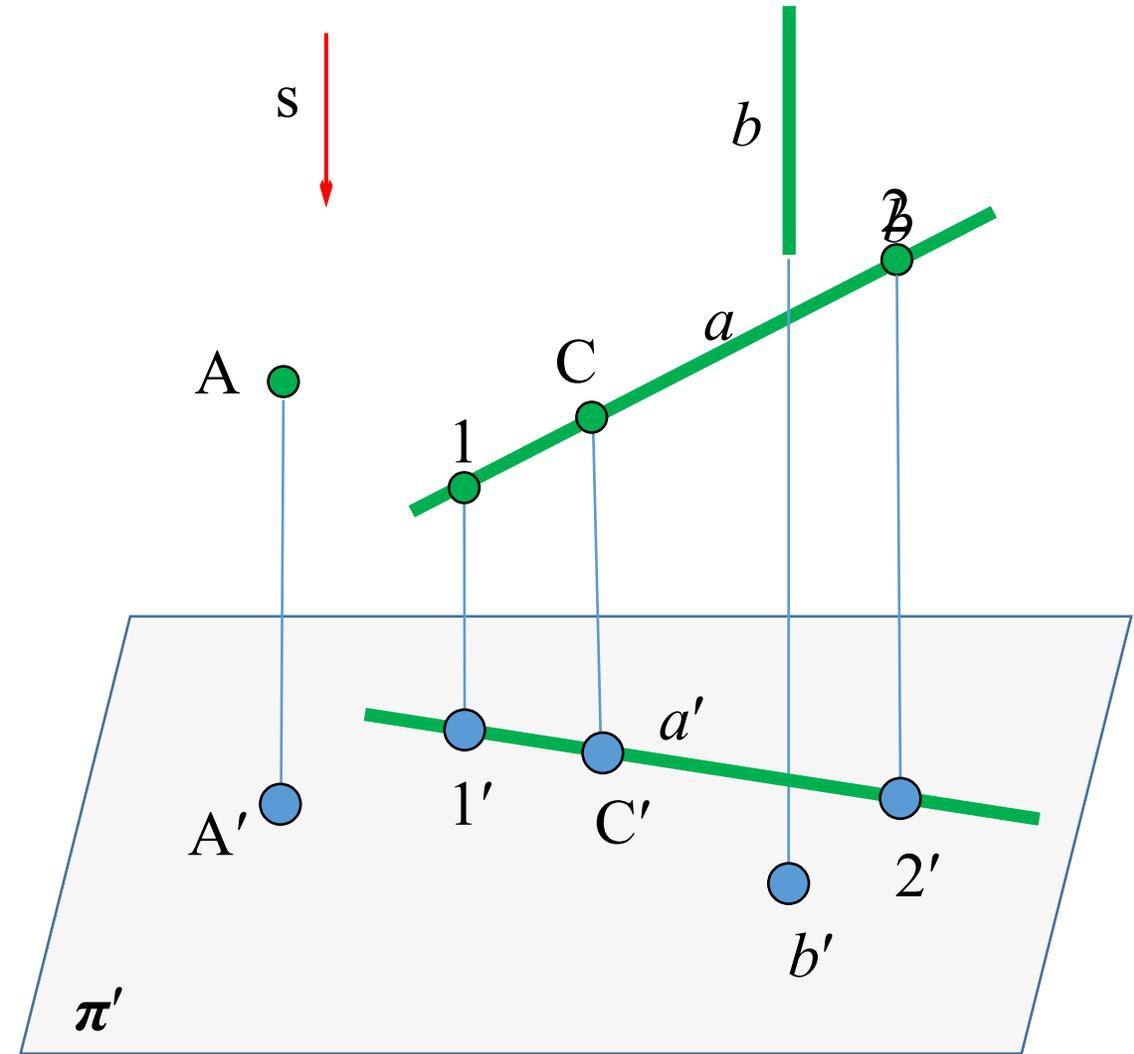
б)



## Центральные и параллельные проекции имеют ряд общих геометрических свойств:

- Точка проецируется в точку, прямая – в прямую (за исключением проецирующей прямой, проекция которой вырождается в точку), плоская фигура – в плоскую фигуру (за исключением того случая, когда эта фигура является проецирующей и отображается в виде отрезка прямой), объемные тела проецируются в плоскую фигуру.

- Свойство принадлежности. В обоих видах проекций сохраняется взаимная принадлежность геометрических элементов: если точка принадлежит прямой, то проекция этой точки принадлежит проекции этой прямой ( $C \in a \Rightarrow (C' \in a')$ )



## Свойства параллельного проецирования

- сохраняется параллельность:  $a \parallel b \rightarrow a_i \parallel b_i$ ;

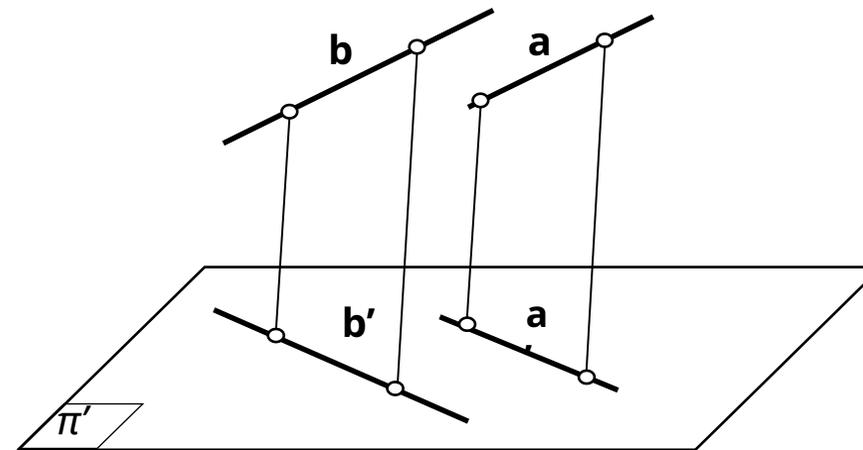
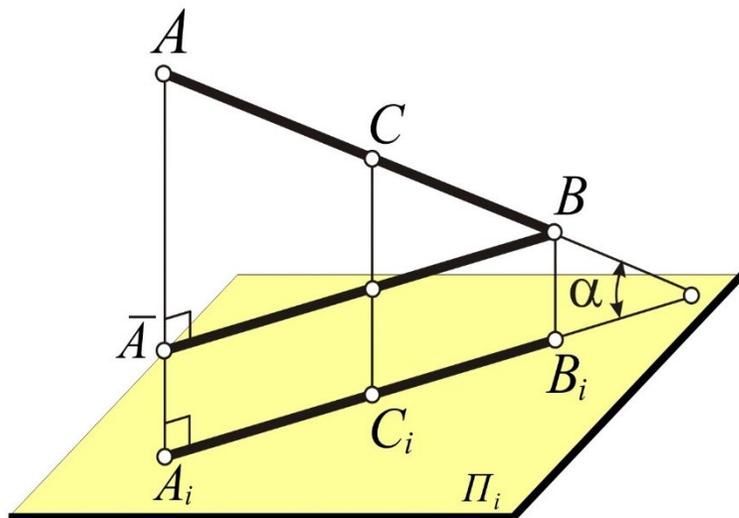
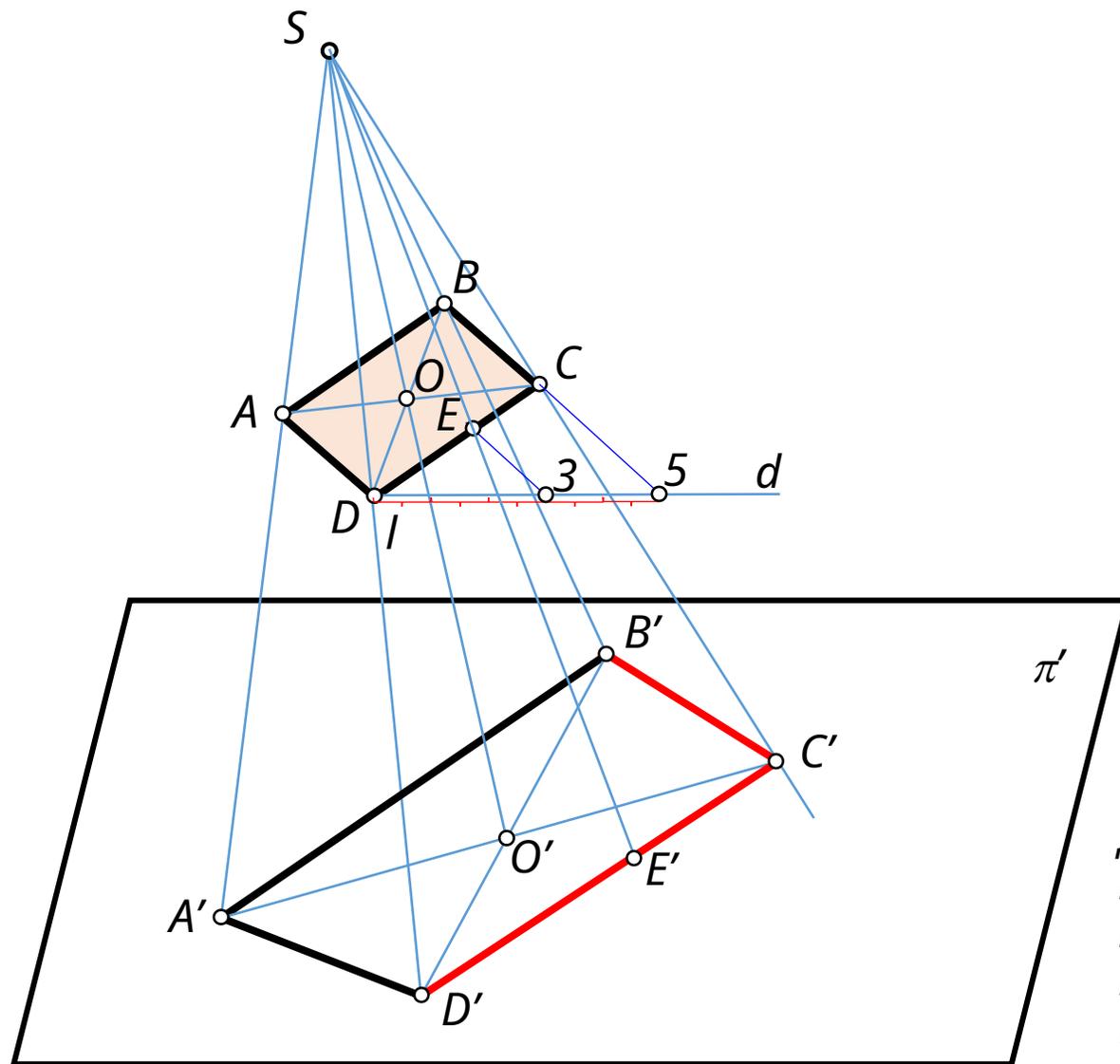


Рисунок 3 – Свойство параллельности

- отношения длин проекций отрезков параллельных прямых к длинам самих отрезков постоянны;
- Отрезки прямых, плоские фигуры, параллельные плоскости проекции, проецируются без искажения (в натуральную величину).

**Требования, предъявляемые к чертежу.** К чертежу предъявляются следующие требования: обратимость, точность, простота, наглядность. Чертеж называется обратимым, если по изображению фигуры можно восстановить ее форму, размеры и положение в пространстве. В инженерной практике широко используются обратимые чертежи: - эюр Монжа, аксонометрия, линейная перспектива, проекции с числовыми отметками

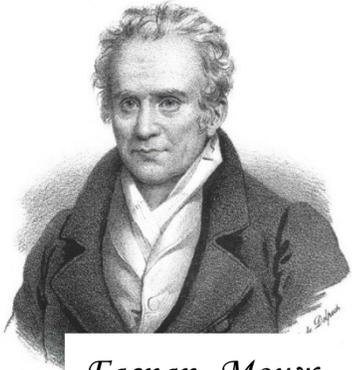


1.  $AC \cap BD = O$
2.  $SO \cap B'D' = O'$
3.  $SC \cap A'O' = C'$
4.  $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$
5.  $D \in d$
6.  $[D5] = 5I, D5 \in d$
7.  $[D3] = 3I, D3 \in d$
8.  $3E \parallel 5C, 3E \cap CD = E$
9.  $SE \cap C'D' = E'$

Достройте центральную проекцию параллелограмма  $ABCD$  на плоскость  $\pi'$ .  
 Постройте центральную проекцию точки  $E$  ( $E'$ ), которая делит сторону  $CD$  в следующем соотношении - 2:3



- **Эпюр Монжа** – основной вид обратимого изображения. Французский математик и инженер *Гаспар Монж (1746-1818гг.)*, систематизировав и обобщив накопленные к тому времени знания по теории и практике построения изображений предметов пространства, предложил получать их изображения путем прямоугольного проецирования на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. В зависимости от этого также чертежи называют двухкартинными или трехкартинными.



*Гаспар Монж*

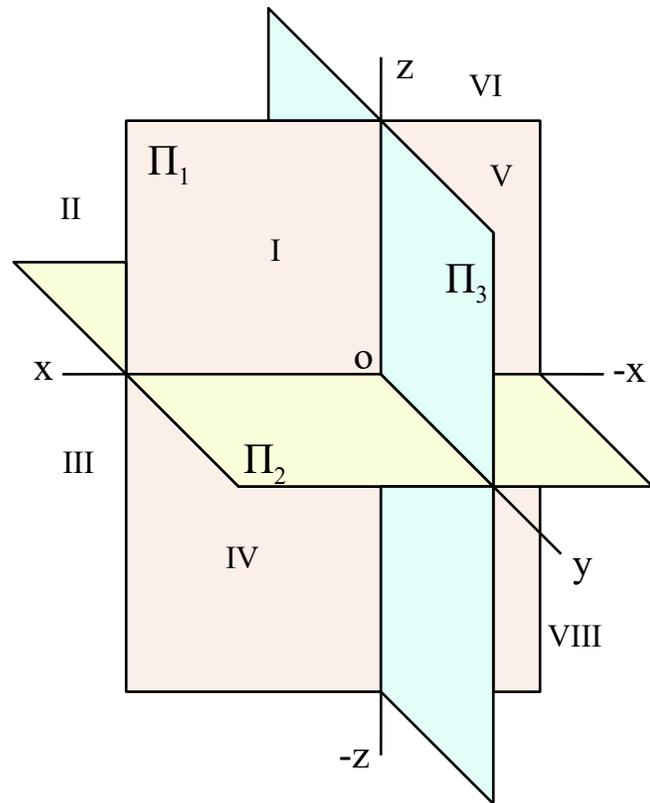
Совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций предмета, расположенных на одной плоскости, называют **комплексным чертежом** (или **ЭПЮРОМ МОНЖА**).

Чертеж называется обратимым, если по изображению фигуры можно восстановить ее форму, размеры и положение в пространстве. В инженерной практике широко используются обратимые чертежи: - эпюр Монжа, аксонометрия, линейная перспектива, проекции с числовыми отметками.

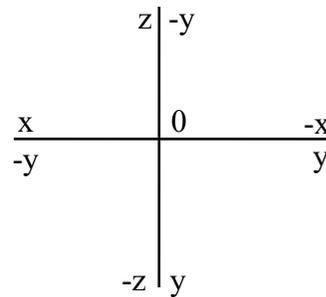
# Комплексный чертеж точки (эпюр точки)

Точка представляет собой самую элементарную часть пространства и геометрических тел.

Комплексный чертеж (эпюр) точки состоит из двух или трех ортогональных проекций. Эти проекции получают на взаимно перпендикулярных плоскостях проекций. Одна из плоскостей проекций  $\Pi_1$  называется *фронтальной* плоскостью проекций, вторая  $\Pi_2$  - *горизонтальной*, а третья  $\Pi_3$  - *профильной*.



Ок-тан-ты	Знаки координат		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-



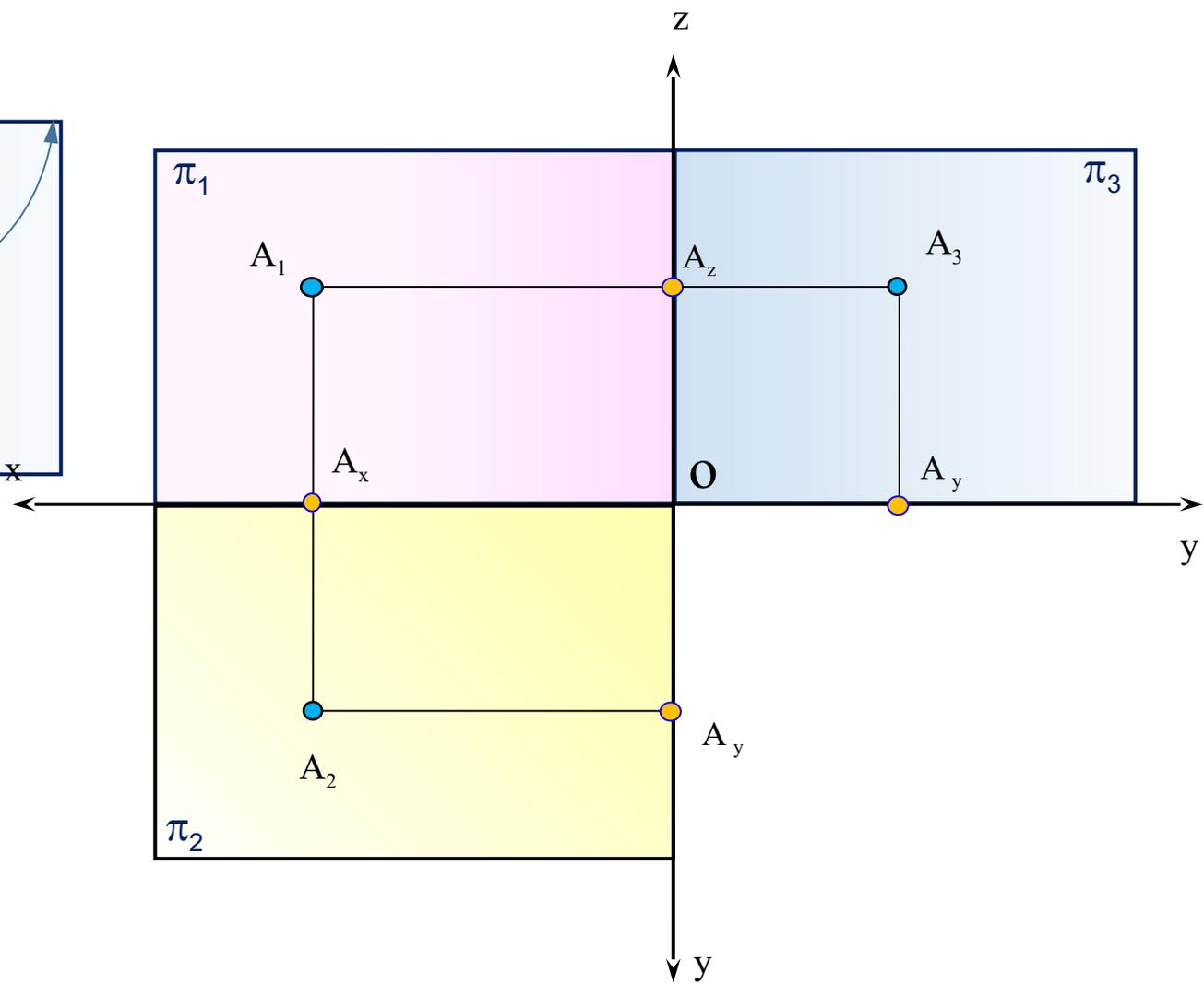
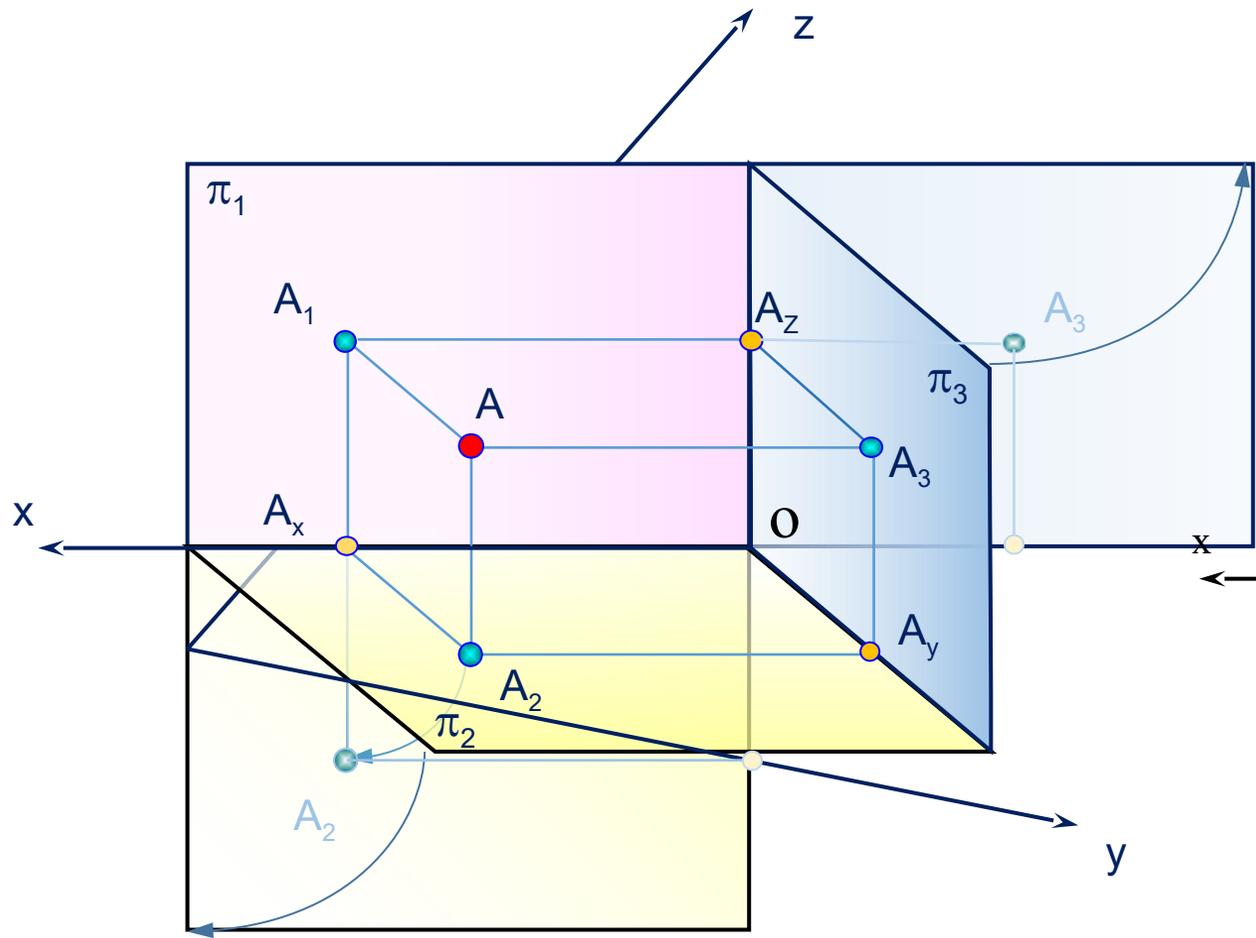
Линии пересечения плоскостей проекций называются *осями координат* **x, y, z**.

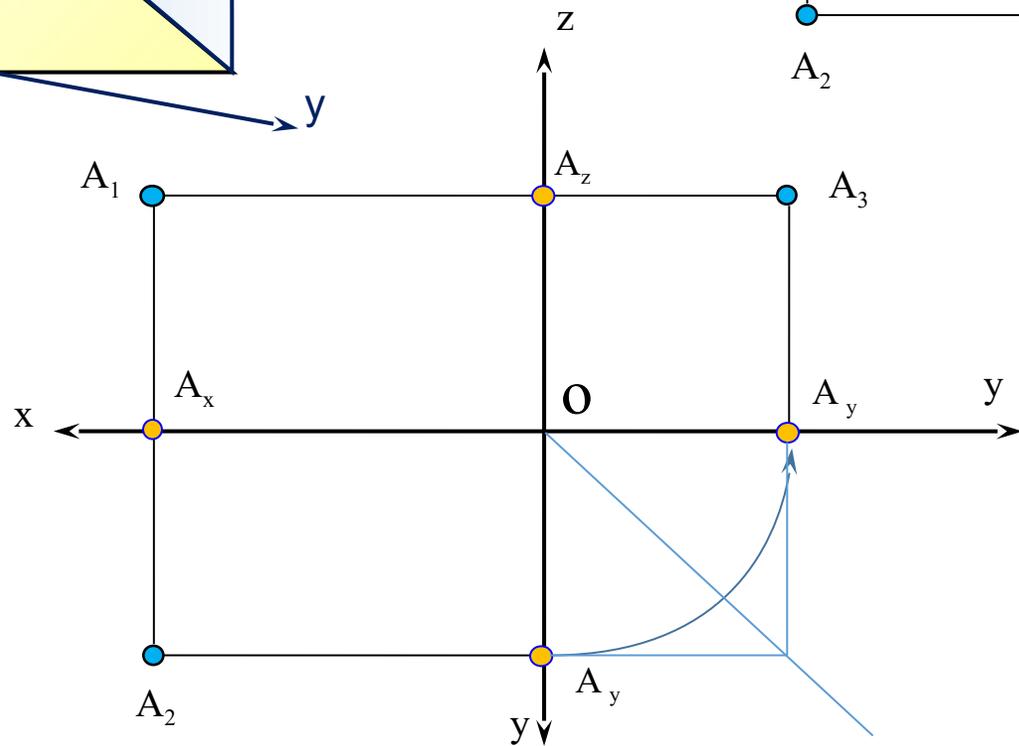
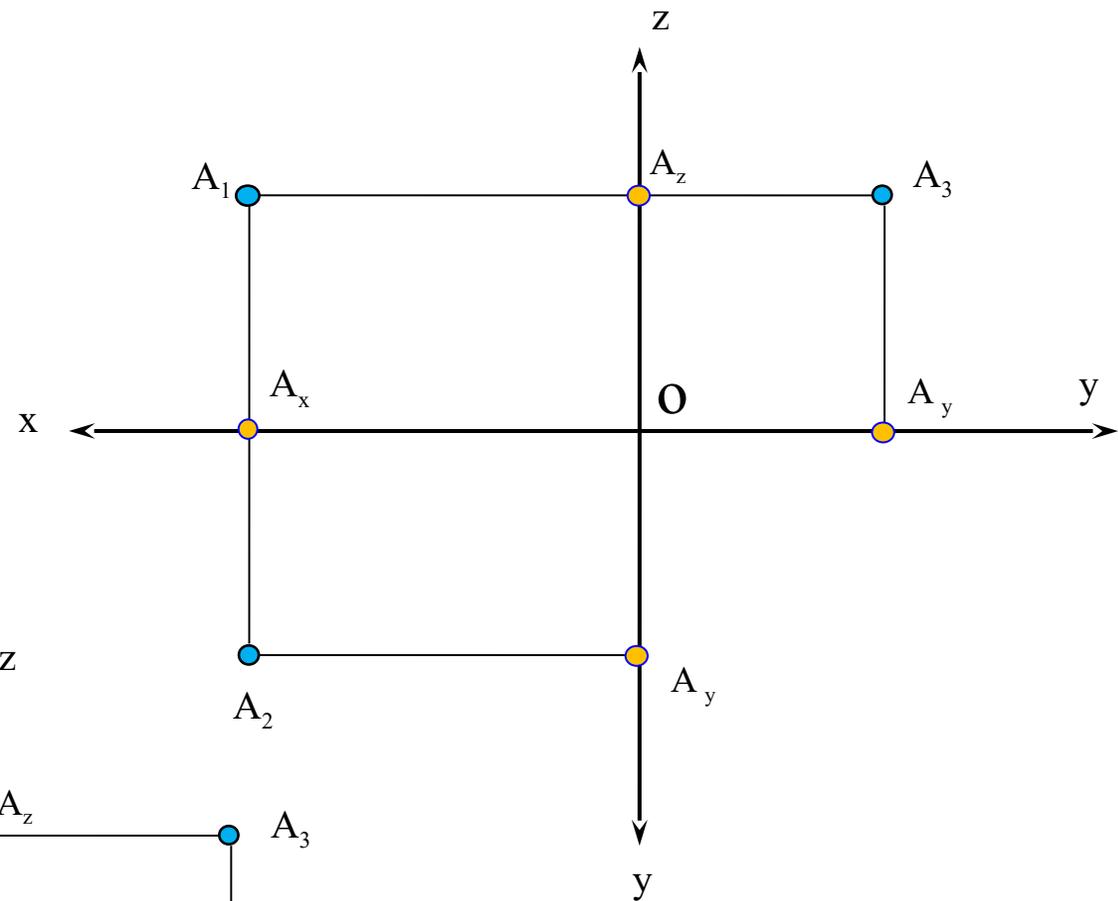
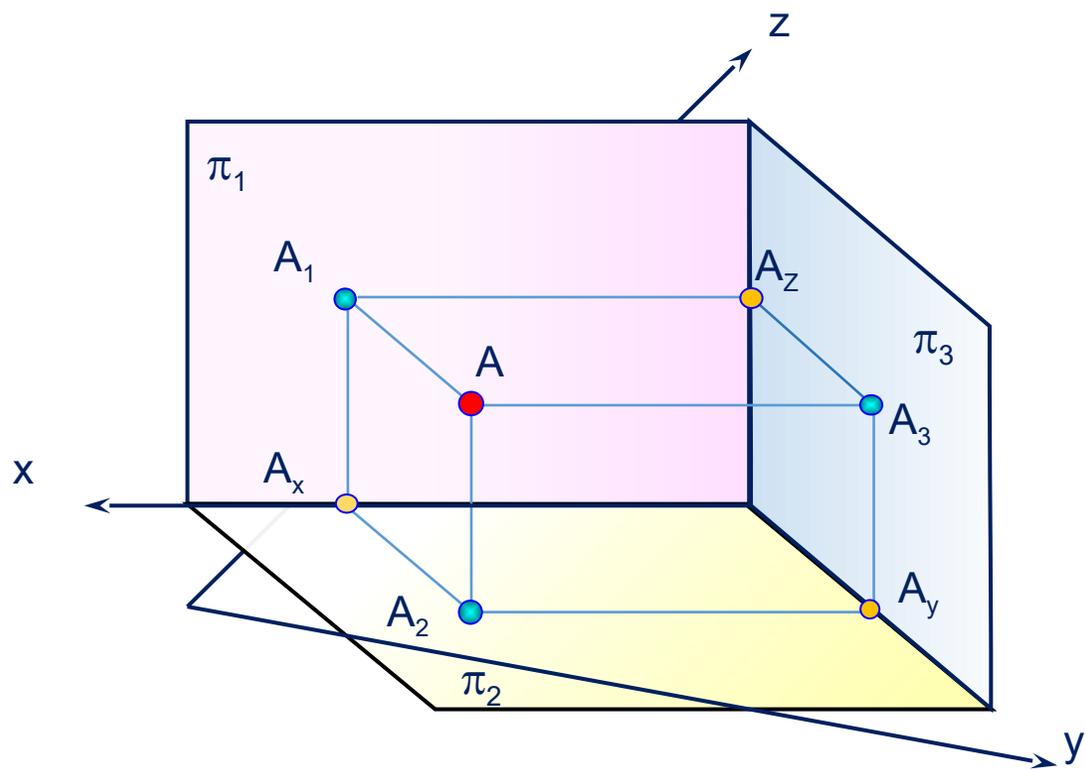
Плоскости проекций делят пространство на **8** трехгранных углов - *четверти* или *октанты*.

Система знаков соответствует "правой системе"

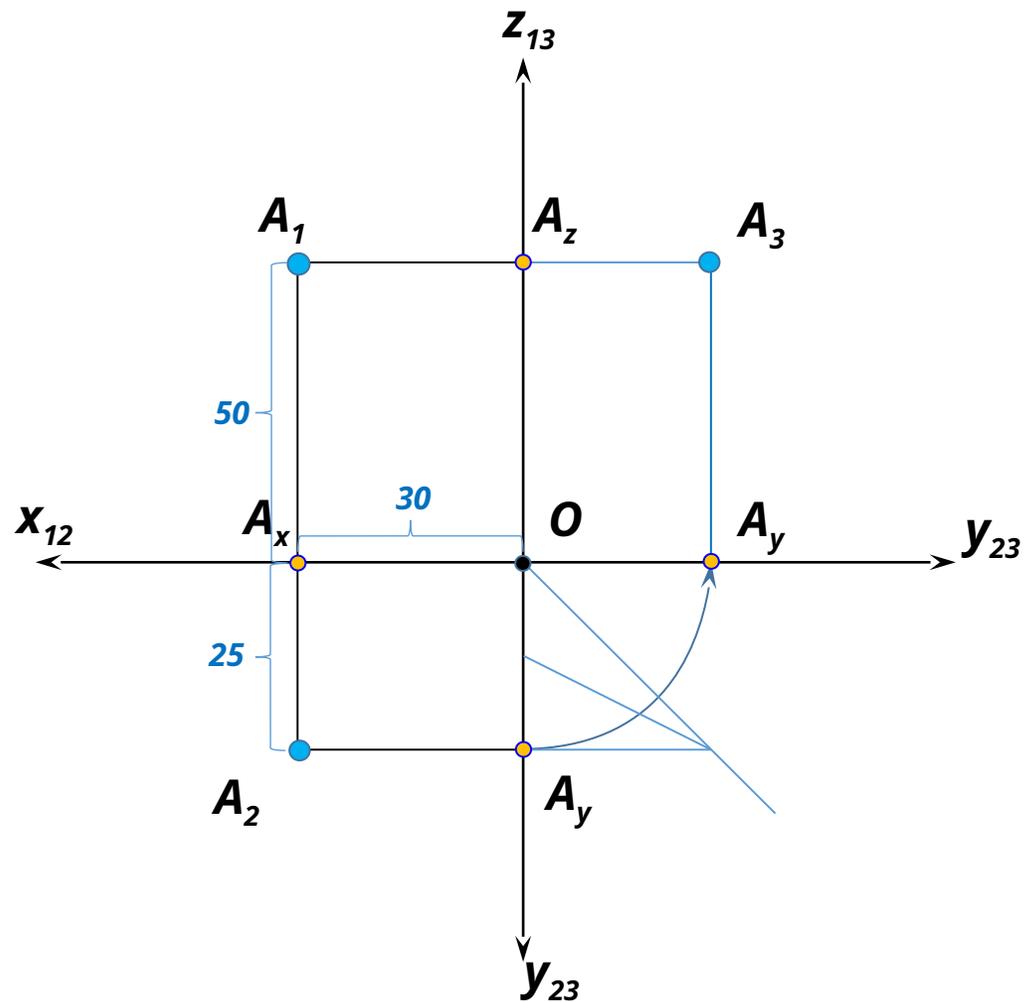
координат, принятой в большинстве европейских стран.

Зритель, рассматривающий оригинал, находится в первом октанте.

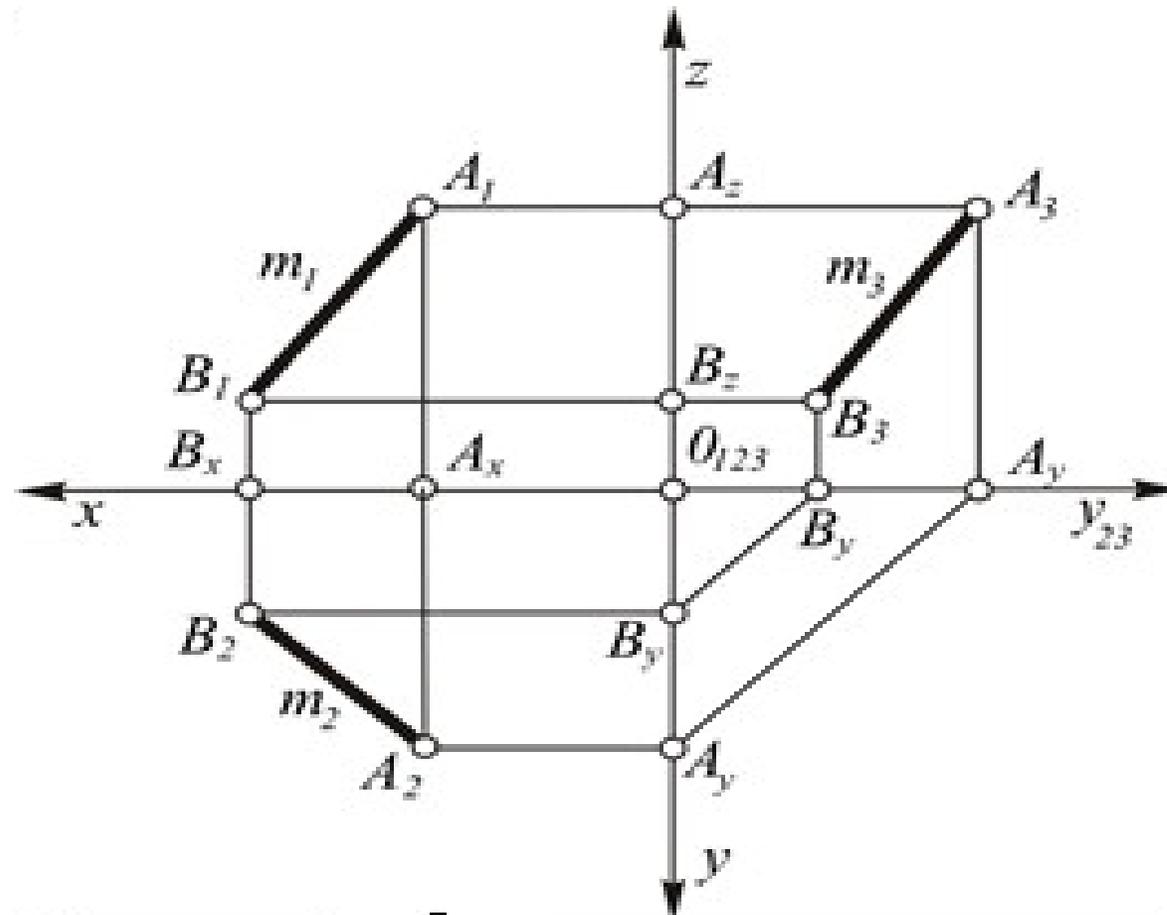




$A(30,25,50)$



# Прямые общего и частного положения на эпюре Монжа

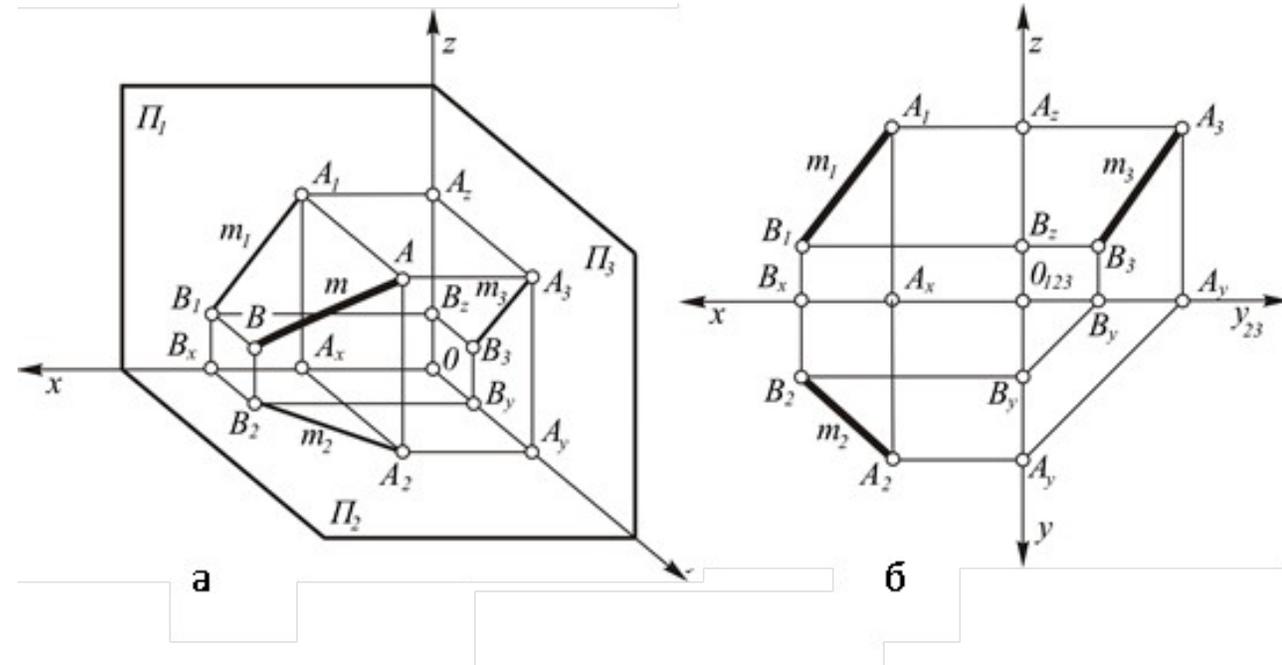


**Аксиома.** Через две различные точки пространства проходит единственная прямая линия.

**Следовательно, положение прямой в пространстве вполне определяется двумя ее точками**

Так как прямая  $m$  однозначно определяется двумя точками  $A$  и  $B$ , то ее проекции определяются проекциями этих точек. В силу сохранения свойства принадлежности при проецировании проекции прямой проходят через одноименные проекции точек:

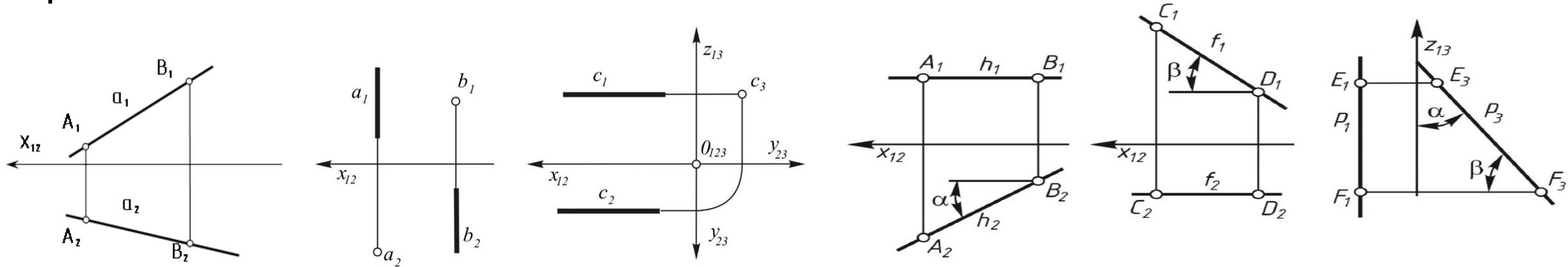
$$m_1(A_1, B_1); m_2(A_2, B_2); m_3(A_3, B_3).$$



Прямая линия может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций П1, П2, П3.

Если прямая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то ее называют **прямой общего положения**.

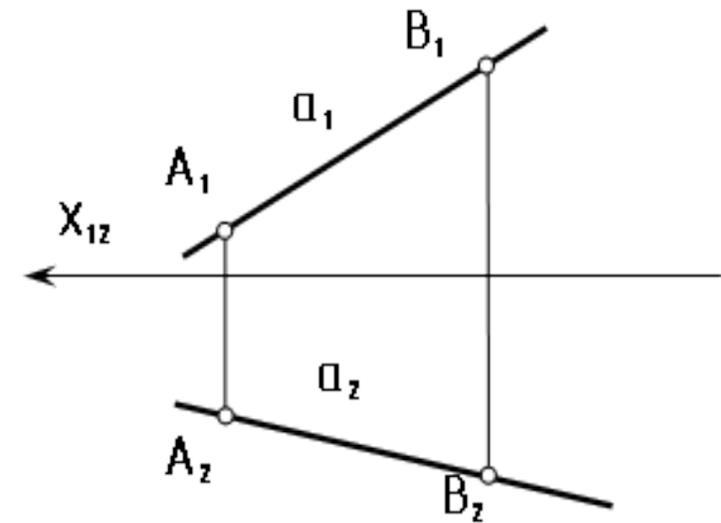
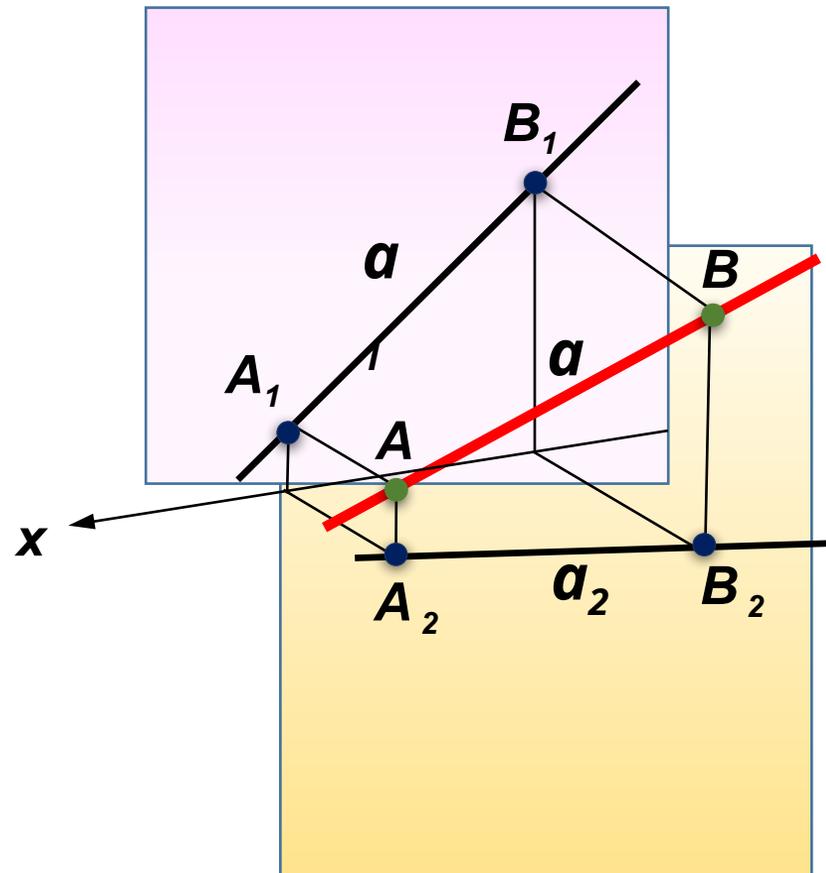
Если прямая параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую прямую называют **прямой частного положения**.



Подробнее все эти прямые рассмотрим далее

# Прямая общего положения

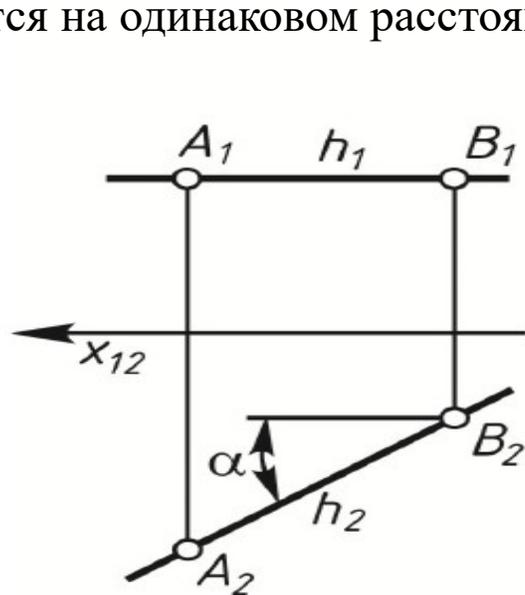
-это прямая, расположенная совершенно произвольно относительно плоскостей проекций.



# Прямые уровня

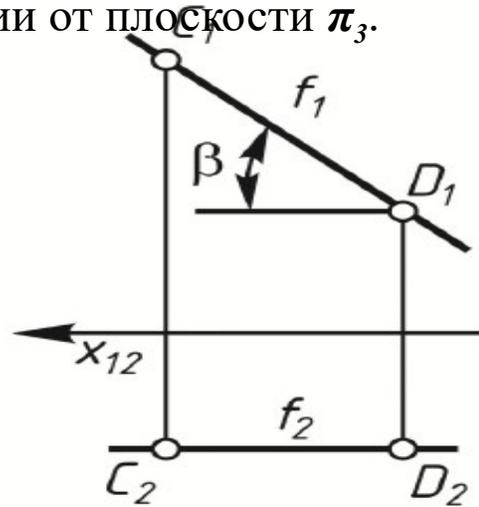
– это прямые, параллельные плоскостям проекций.

- a) Горизонтальная прямая (**Горизонталь**) –  $h$  – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_2$ ;
- b) Фронтальная прямая (**Фронталь**) –  $f$  – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_1$ ;
- c) Профильная прямая –  $p$  – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_3$ .



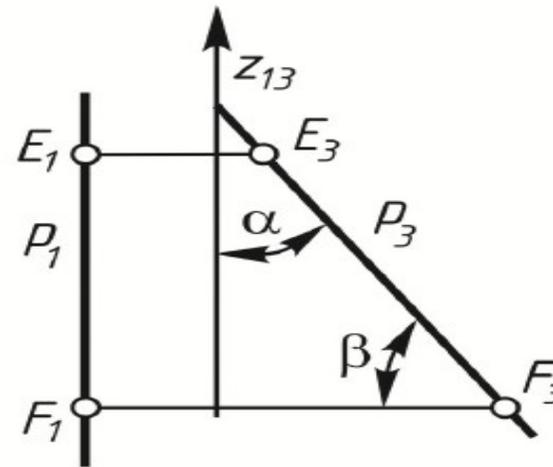
$$|AB| = |A_2B_2|$$

$$\alpha = \hat{h, \pi_1}$$



$$|CD| = |C_1D_1|$$

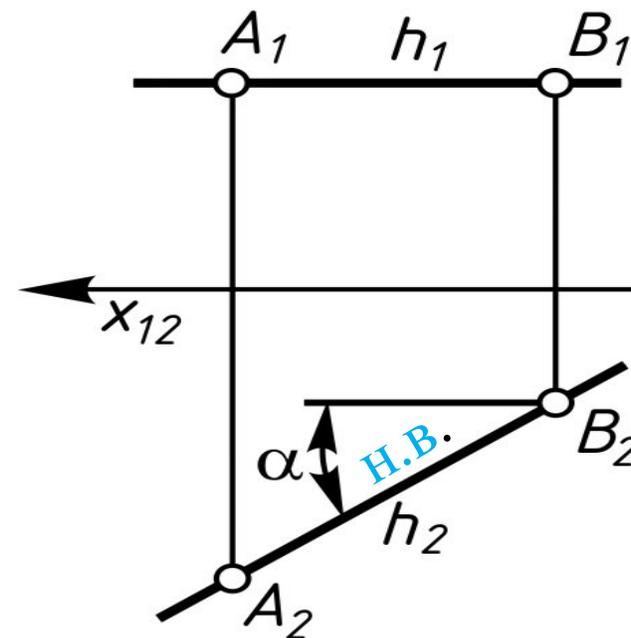
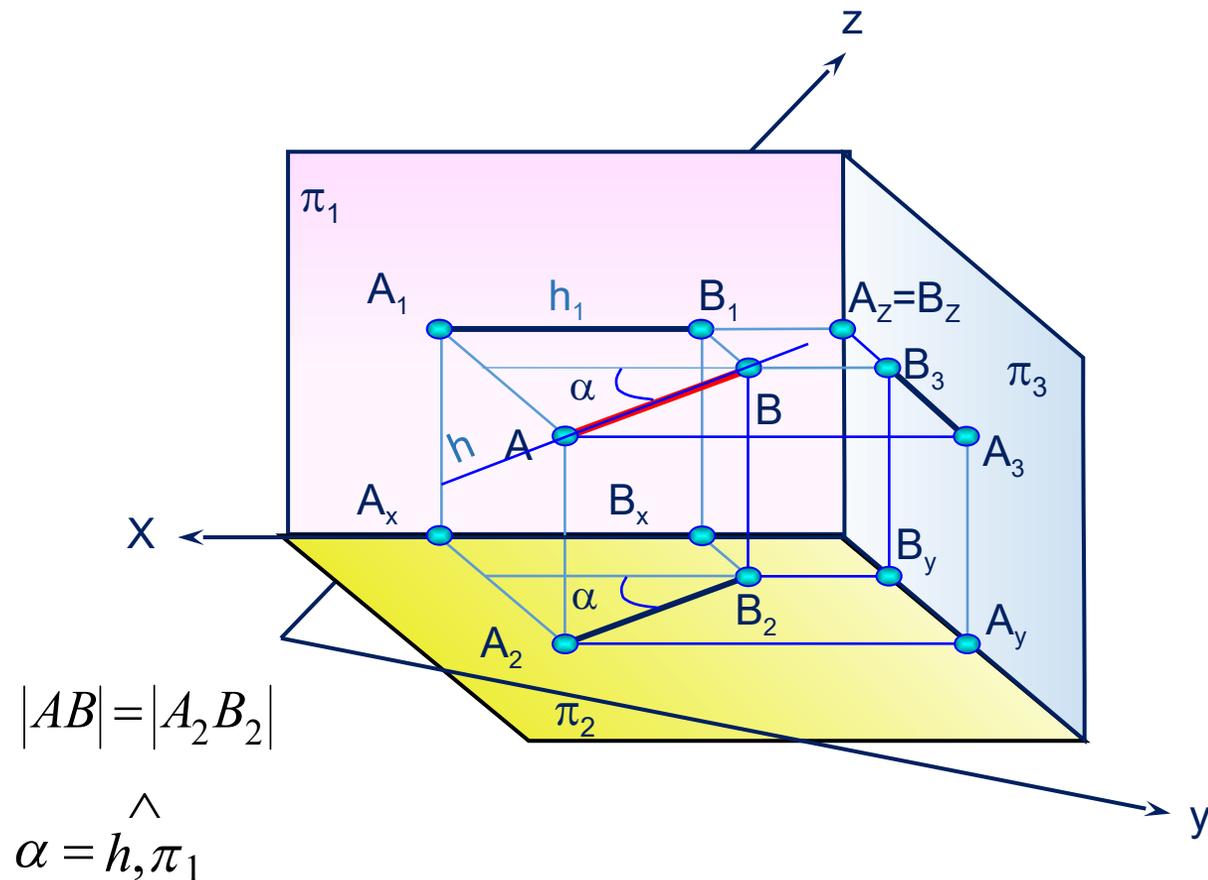
$$\beta = \hat{f, \pi_2}$$



$$|EF| = |E_3F_3|$$

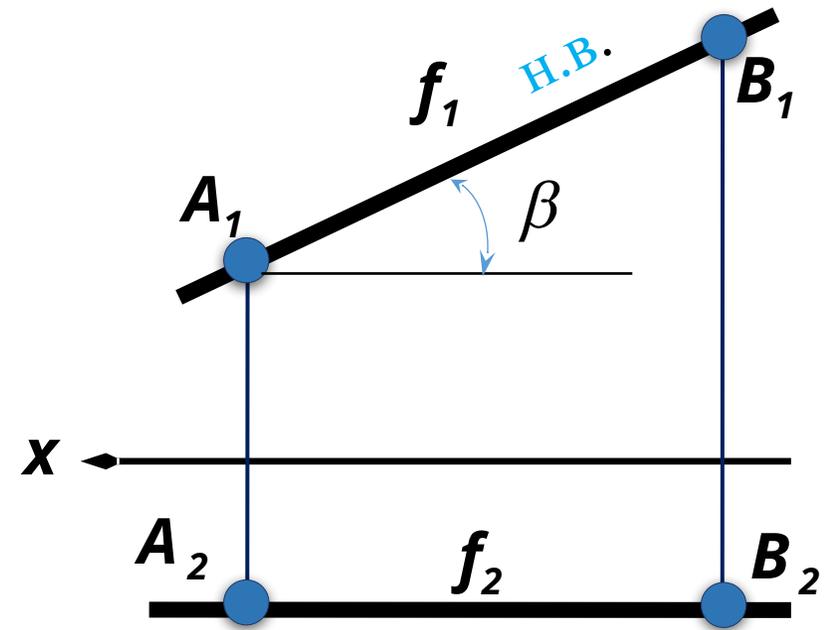
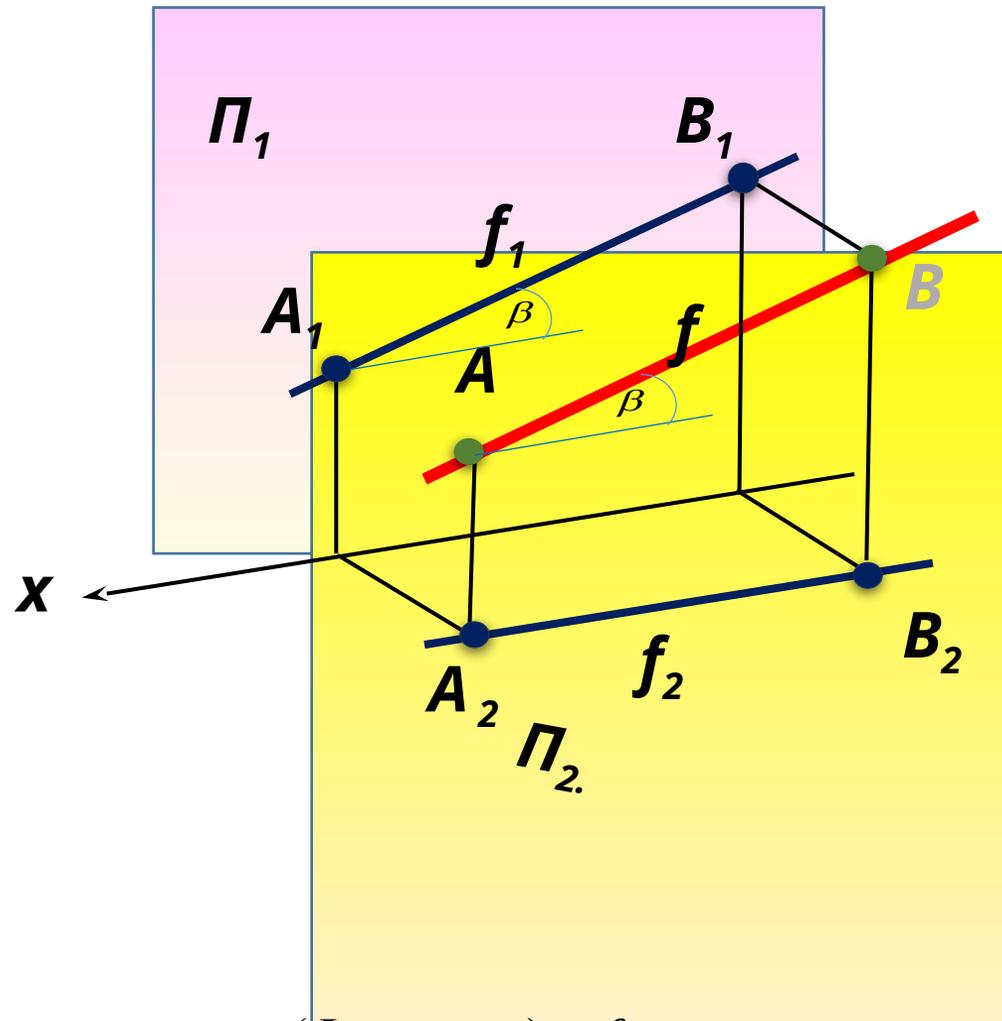
$$\alpha = \hat{p, \pi_1} \quad \beta = \hat{p, \pi_2}$$

## Горизонтальная прямая (Горизонталь) – $h$



- а) Горизонтальная прямая (Горизонталь) –  $h$  – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_2$ ;

# Фронтальная прямая (Фронталь) – $f$

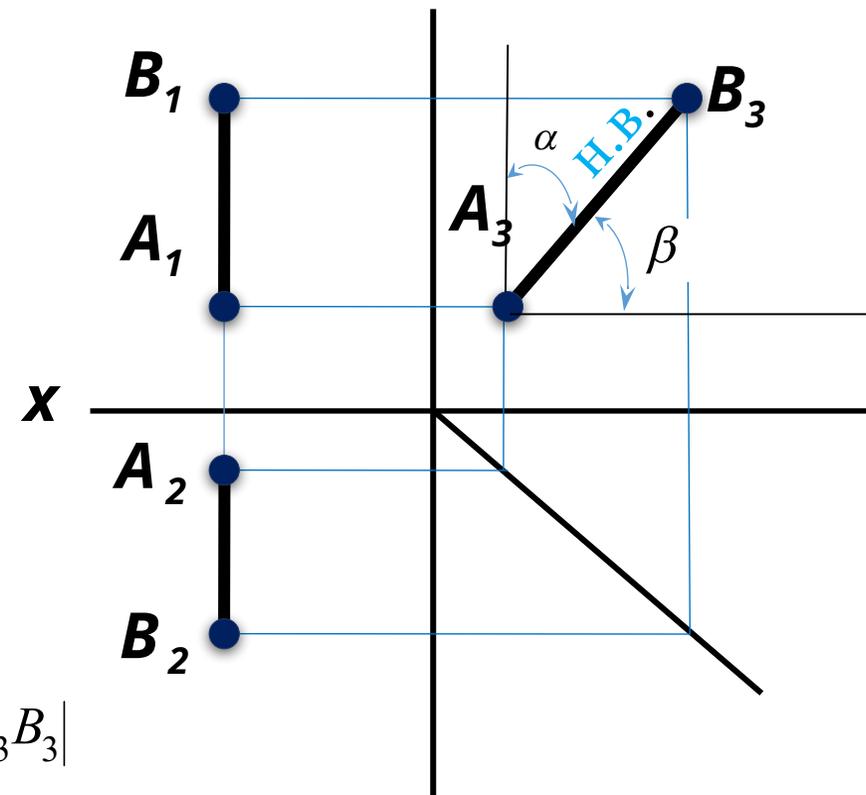
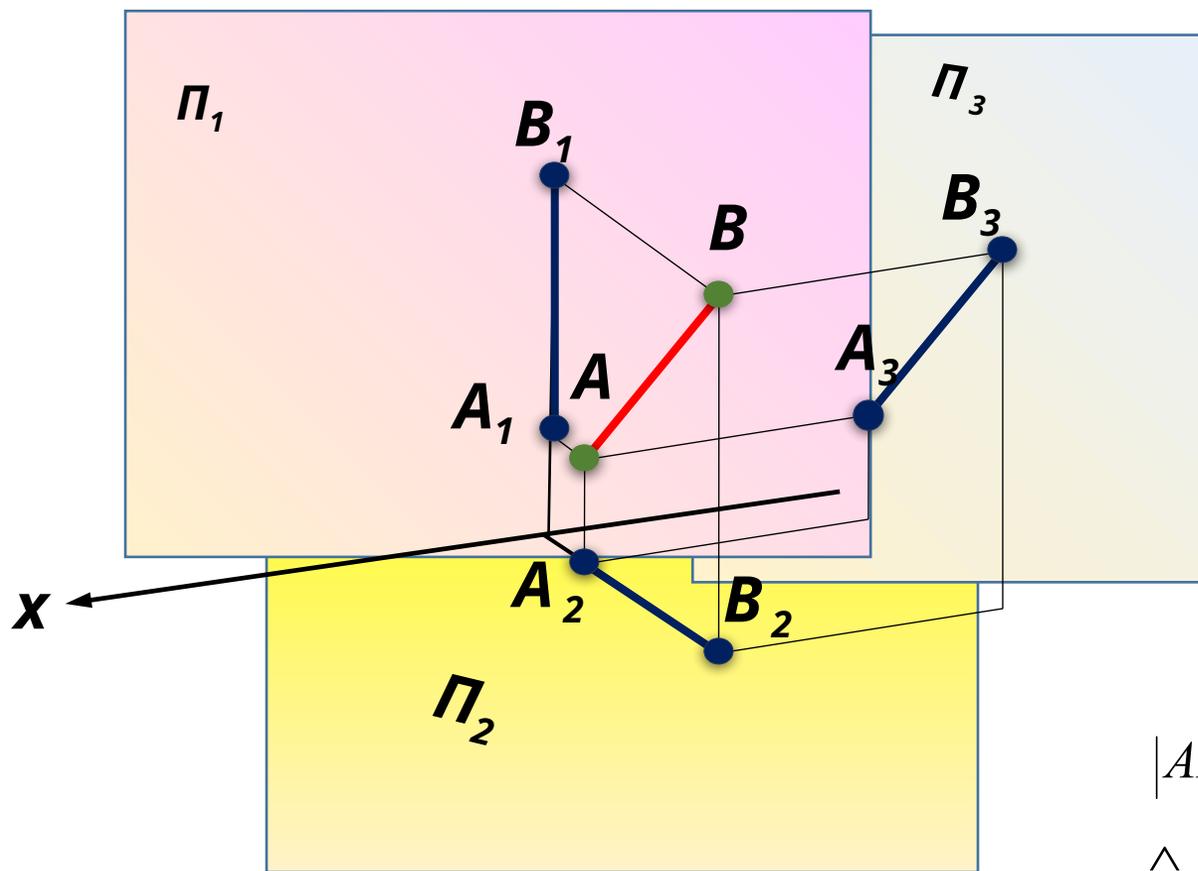


$$|AB| = |A_1B_1|$$

$$\beta = \hat{f, \pi_2}$$

а) Фронтальная прямая (Фронталь) –  $f$  – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_1$ ;

# Профильная прямая – $p$



$$|AB| = |A_3B_3|$$

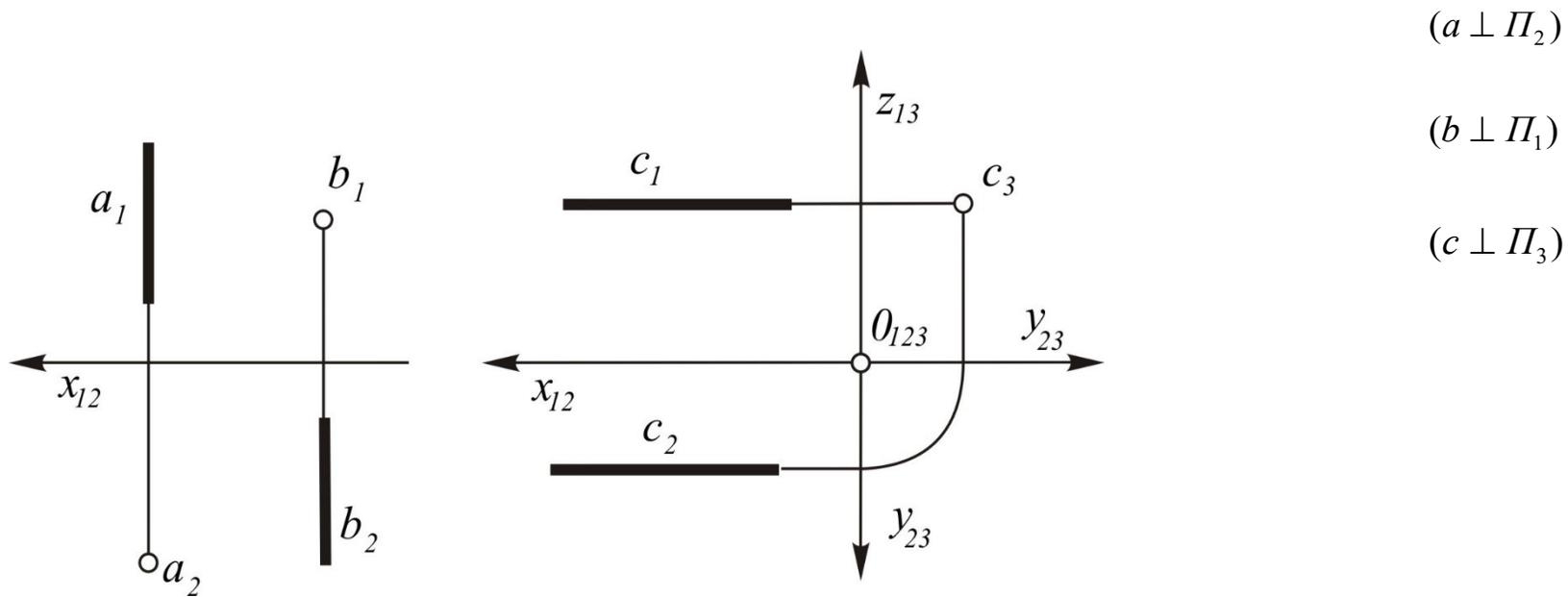
$$\alpha = \hat{p, \pi_1} \quad \beta = \hat{p, \pi_2}$$

Профильная прямая –  $p$  – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости  $\pi_3$ .

# Проецирующие прямые

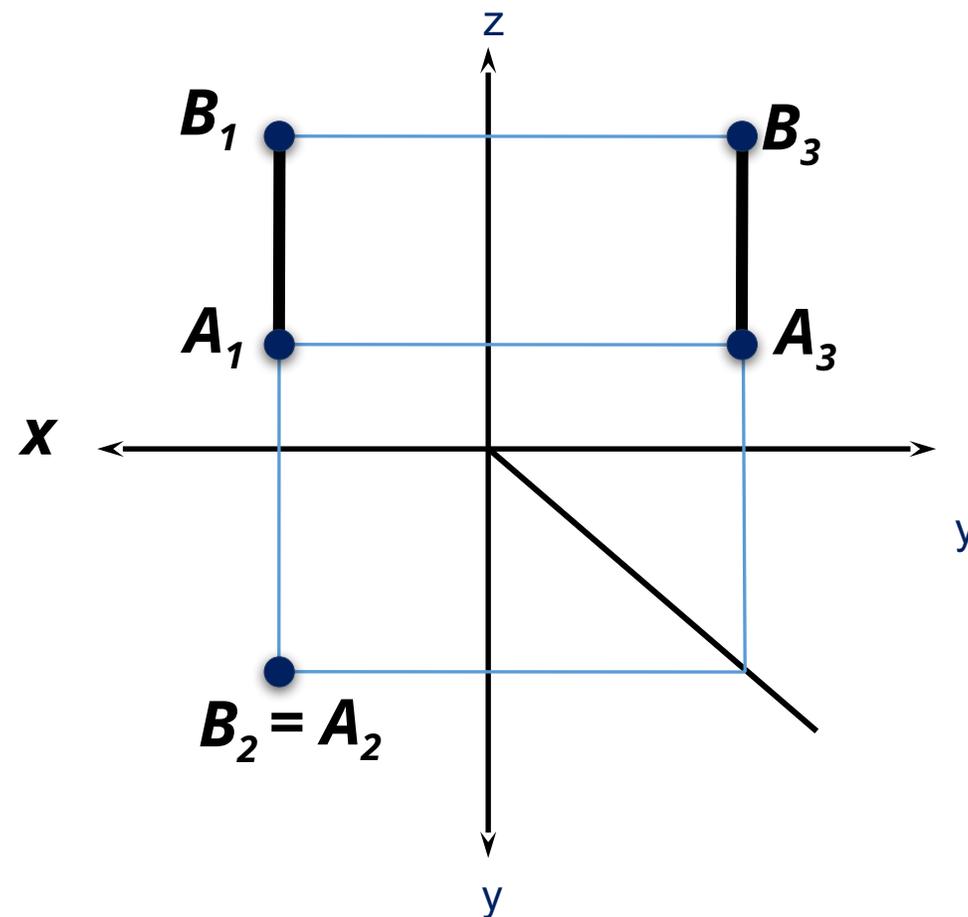
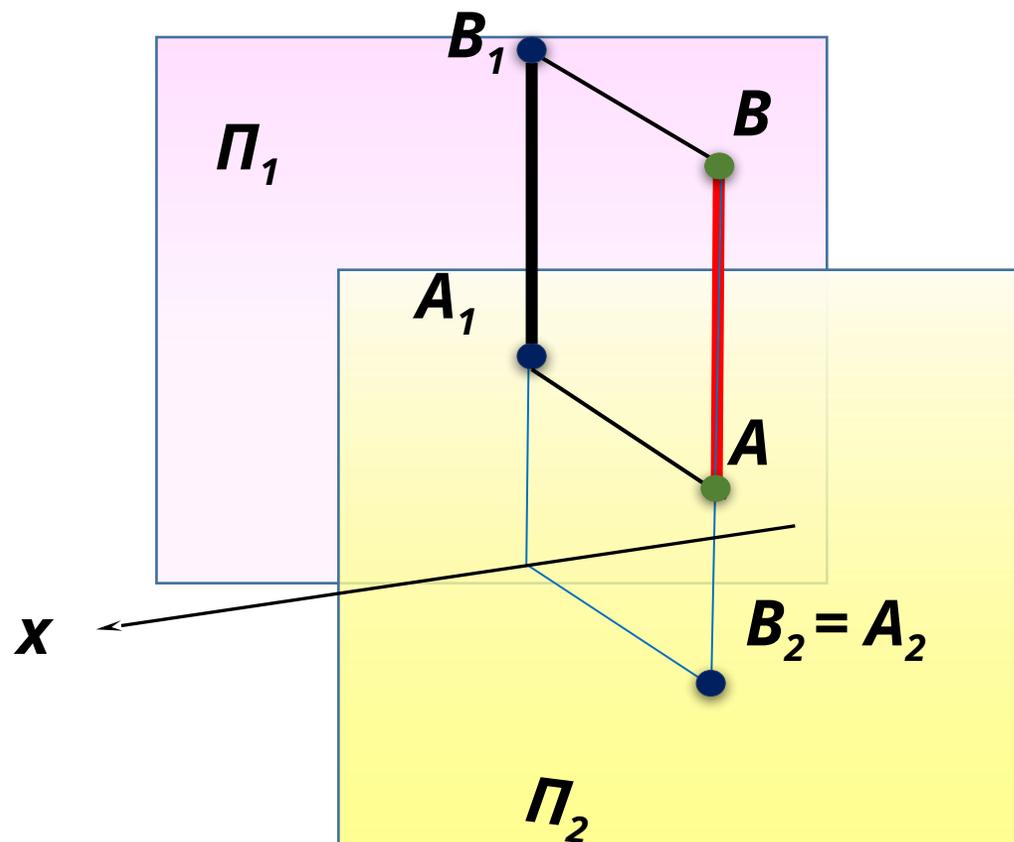
– это прямые, перпендикулярные плоскостям проекций.

- Фронтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Фронтальная проекция прямой является точкой.
- Горизонтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ . Горизонтальная проекция прямой является точкой.
- Профильно проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ . Профильная проекция прямой является точкой.



**Горизонтально проецирующая прямая** – это прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ .

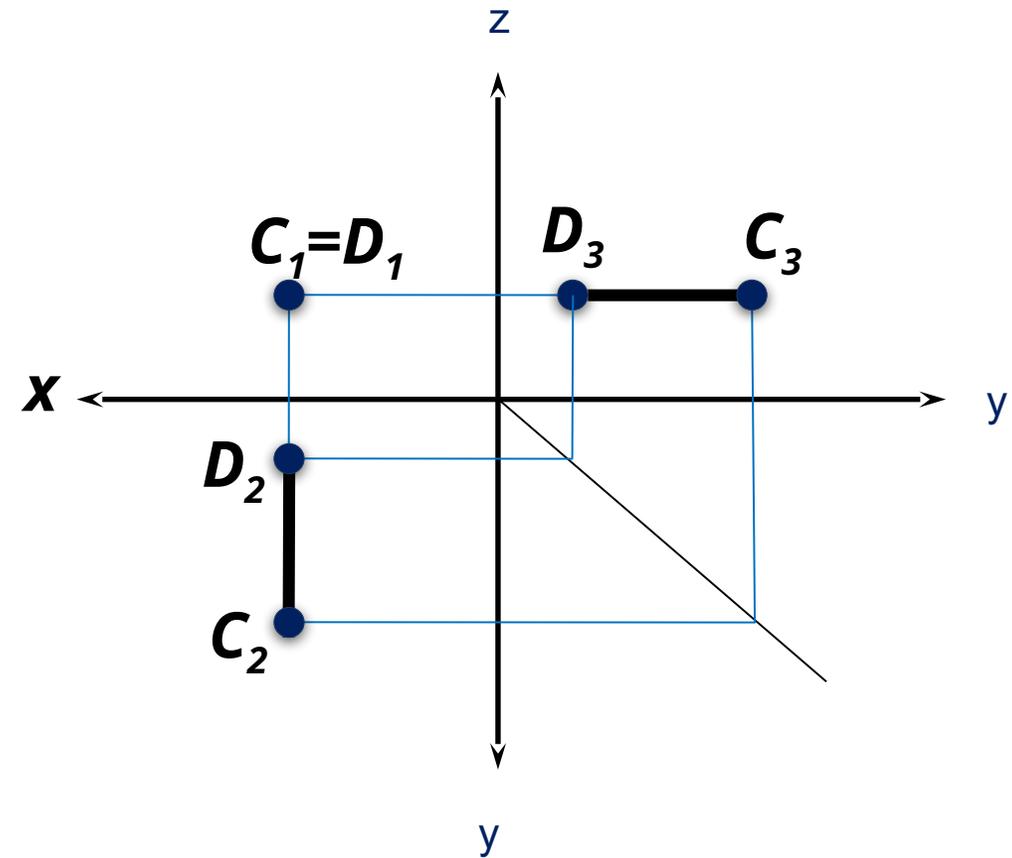
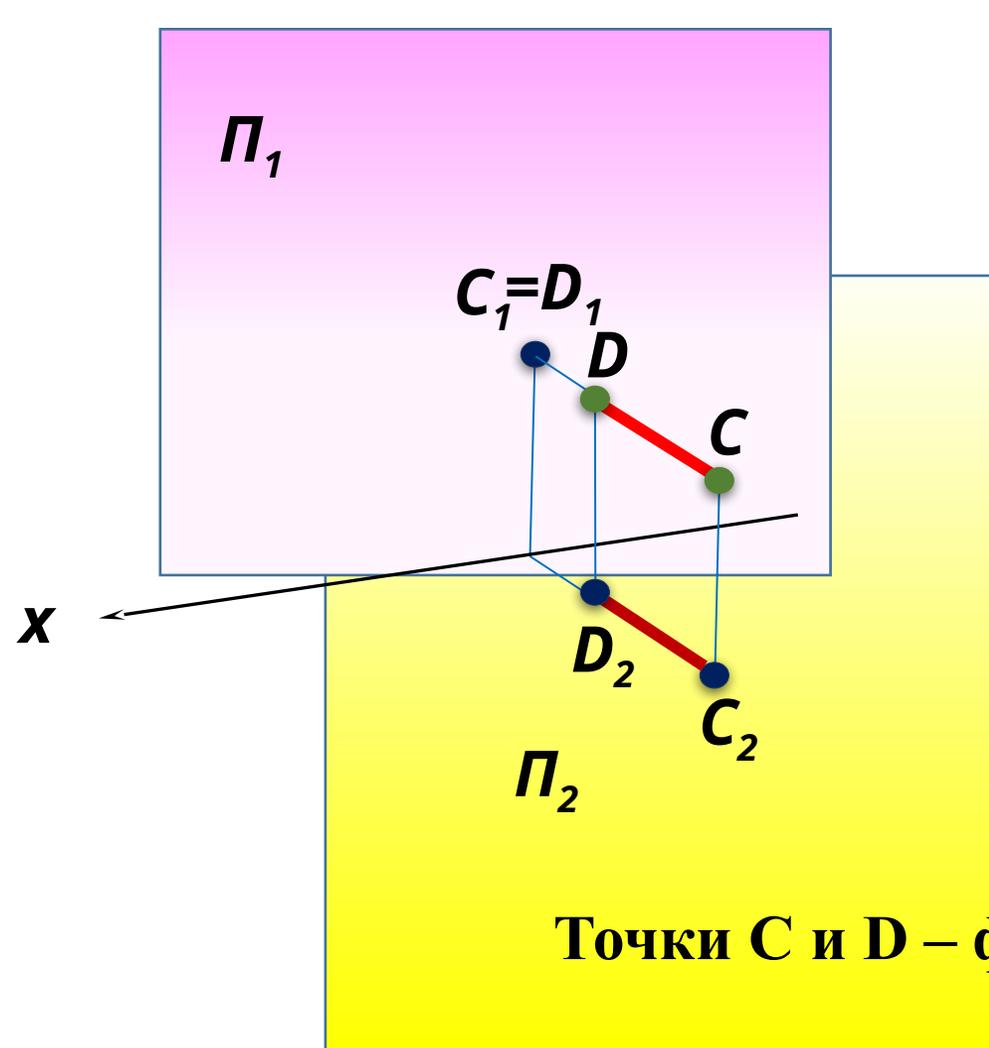
Горизонтальная проекция прямой является точкой



**Точки  $A$  и  $B$  – горизонтально конкурирующие точки** (расположены на одной горизонтально-проецирующей прямой)

**Конкурирующими** точками называются такие **точки** пространства, у которых совпадают какие-либо две одноименные проекции

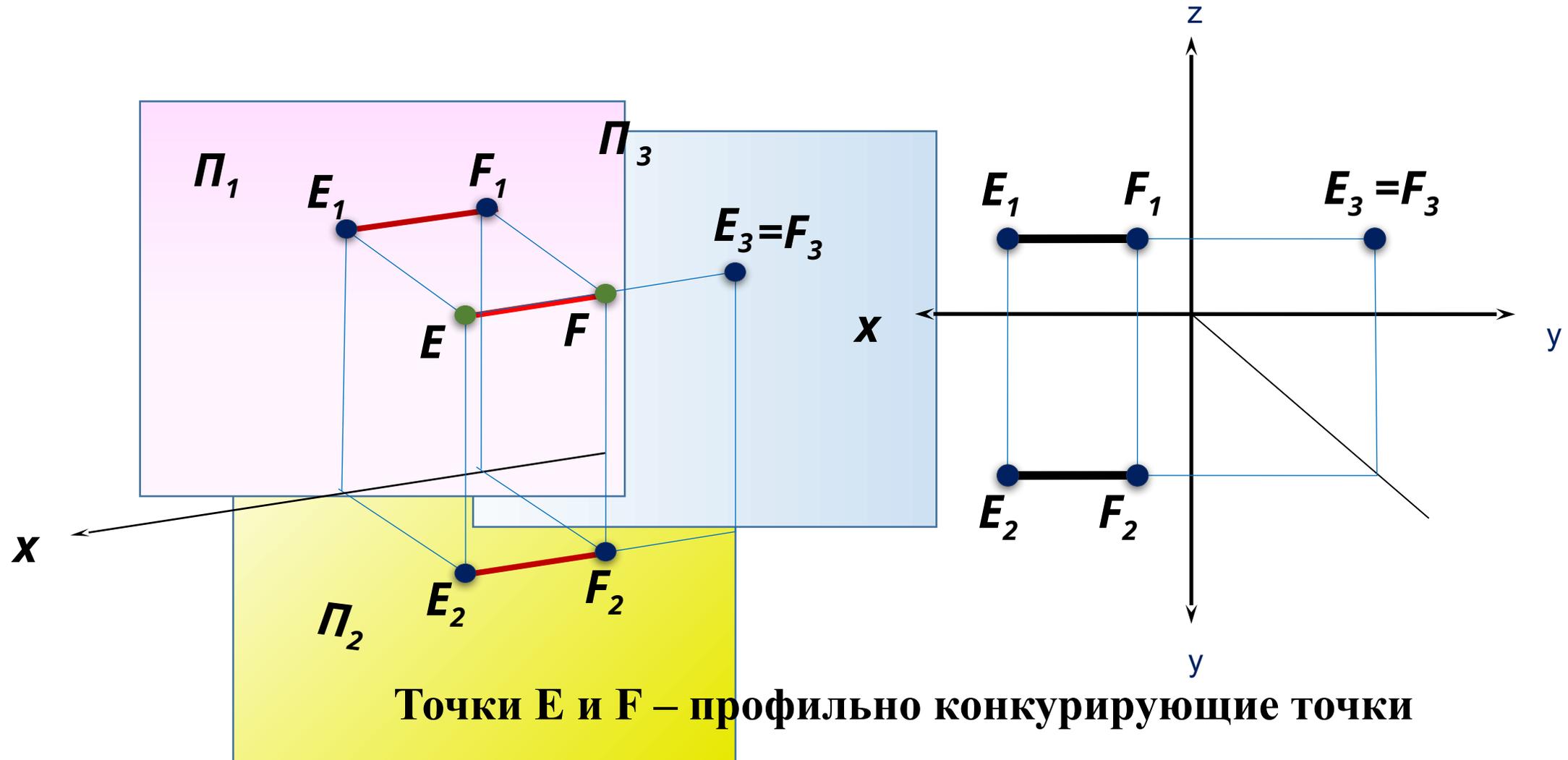
**Фронтально проецирующая прямая** – это прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Фронтальная проекция прямой является точкой.



**Точки  $C$  и  $D$  – фронтально конкурирующие точки**

**Профильно проецирующая прямая** – это прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ .

Профильная проекция прямой является точкой.

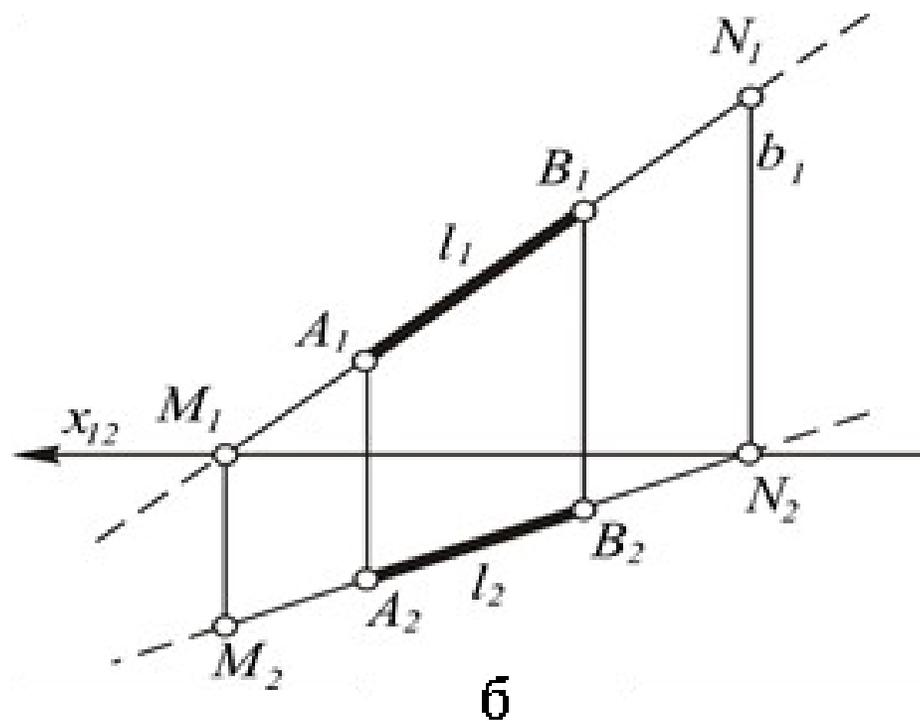
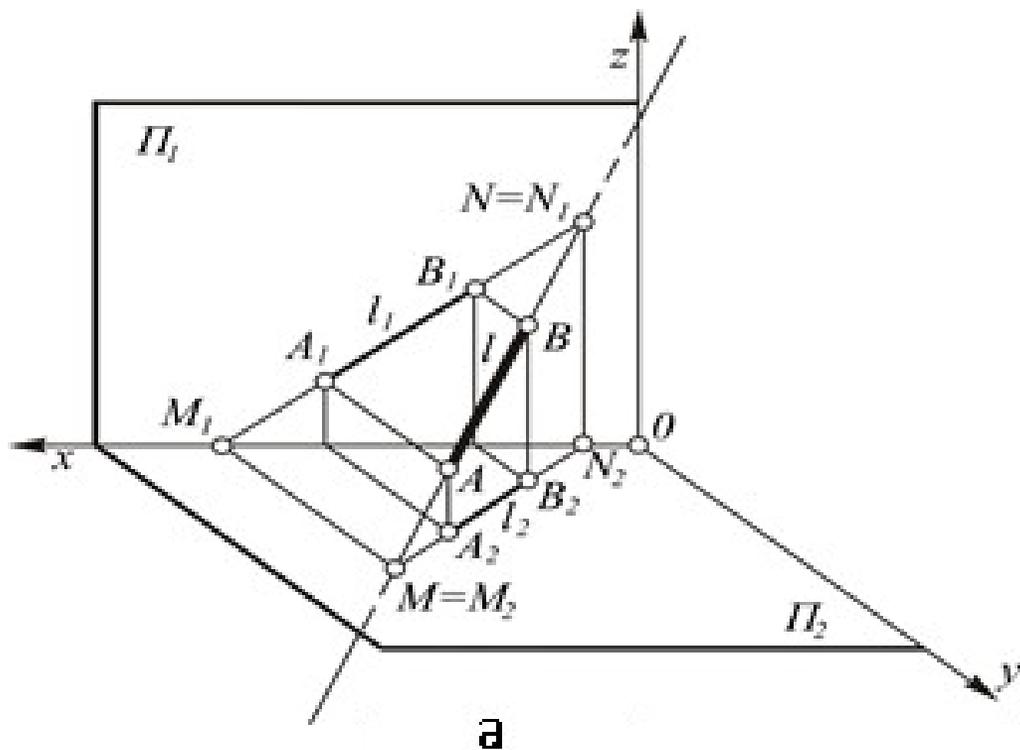


## Следы прямой

Точка пересечения прямой с какой-либо плоскостью проекций называется ее следом на этой плоскости проекций.

Апplikата горизонтального следа  $M = l \cap \Pi_2$  прямой  $a$  равна нулю, поэтому его фронтальная проекция  $M_1$  принадлежит оси  $x_{12}$ . Аналогично, фронтальный след  $N = l \cap \Pi_1$  имеет ординату, равную нулю, следовательно, его горизонтальная проекция  $N_2$  принадлежит оси  $x_{12}$ .

Для построения горизонтального следа  $M$  прямой  $l$  необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с осью  $x_{12}$  и в этой точке восставить к оси перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой. Для построения фронтального следа  $N$  прямой  $l$  нужно из точки пересечения горизонтальной проекции ее с осью  $x_{12}$  восставить к оси перпендикуляр до пересечения с фронтальной проекцией прямой.

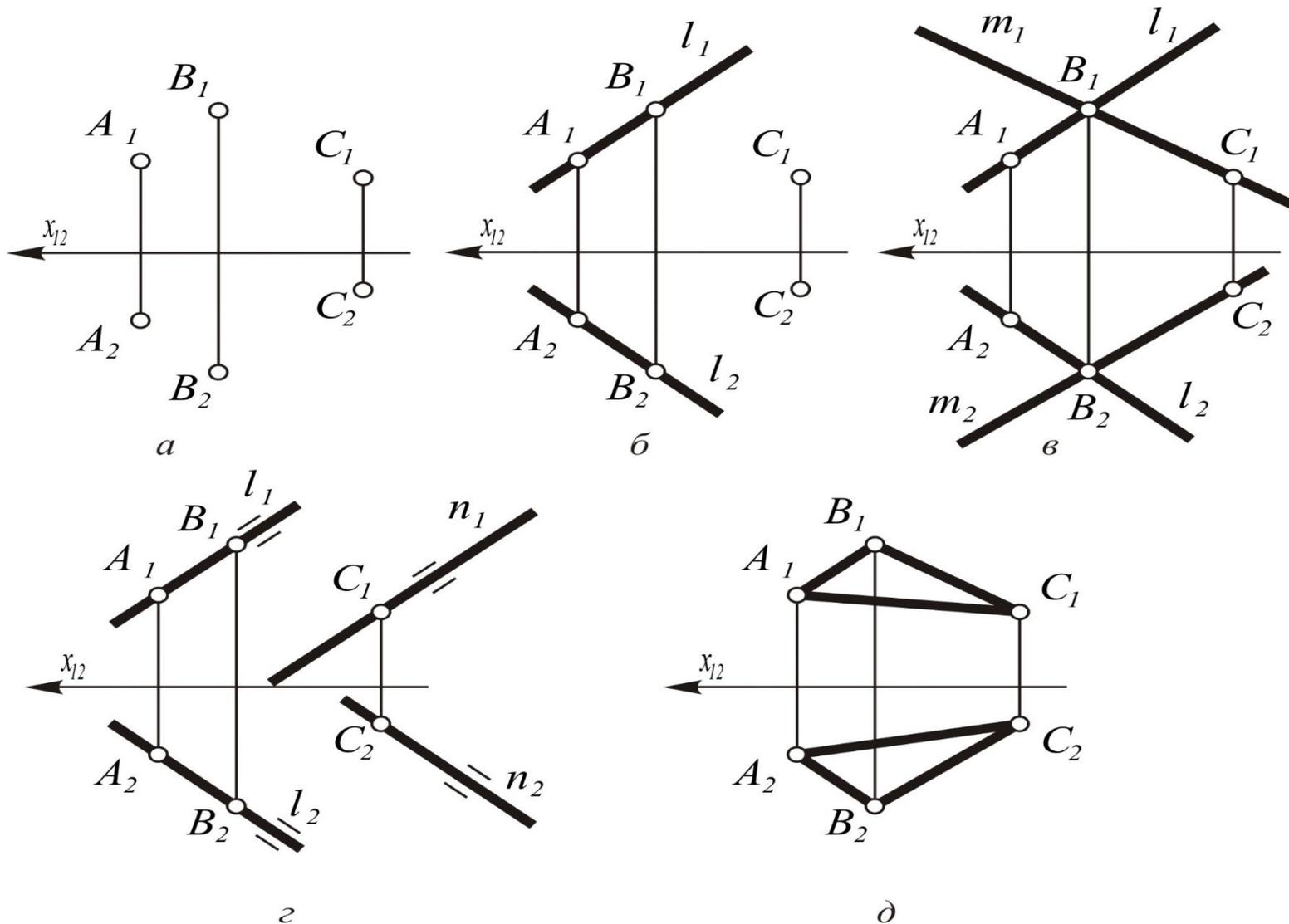


# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Положение плоскости в пространстве **определяется тремя ее точками, не лежащими на одной прямой**

Следовательно, на эюре плоскость можно задать с помощью:

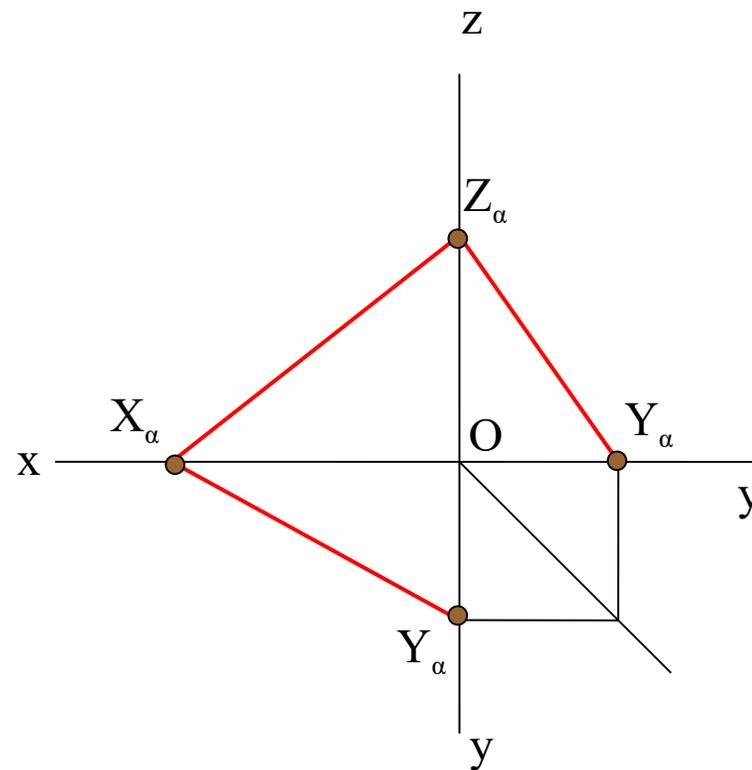
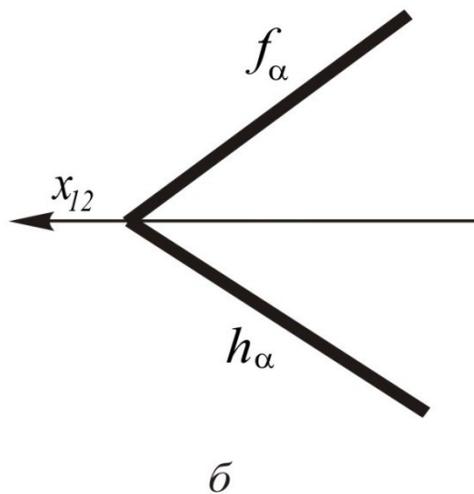
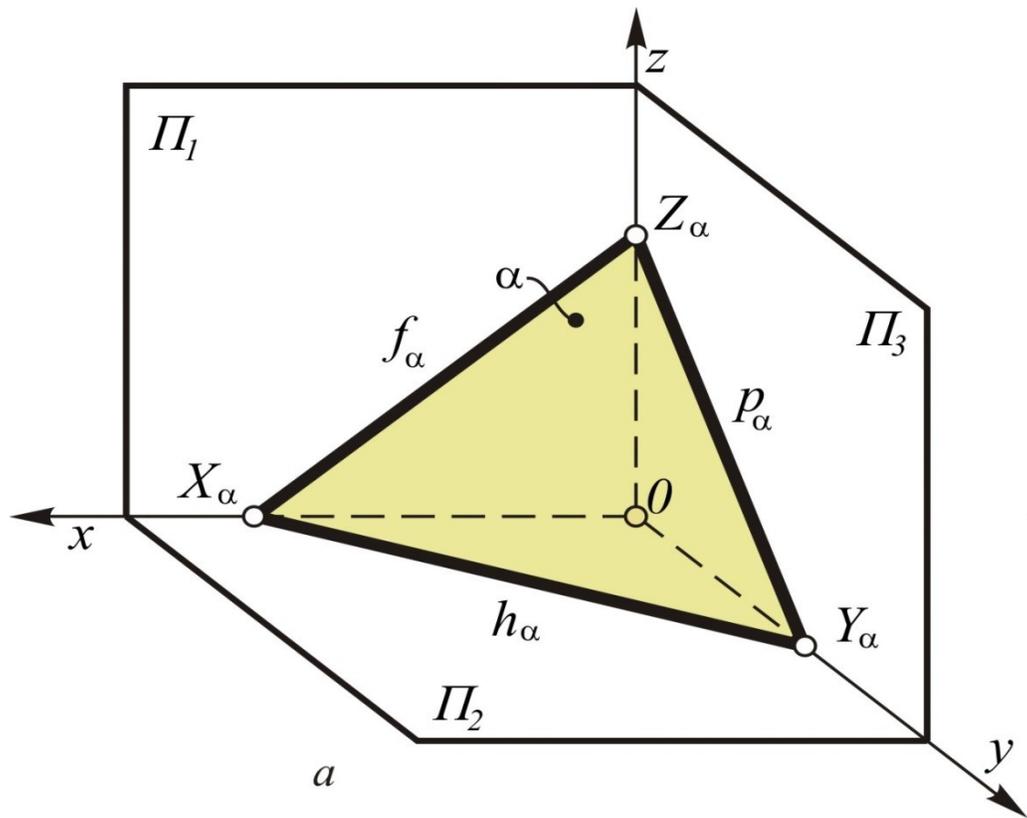
- трех точек, не лежащих на одной прямой,
- прямой и точки вне этой прямой,
- двух параллельных прямых,
- двух пересекающихся прямых,
- любой плоской фигуры



Плоскость может быть задана также следами.

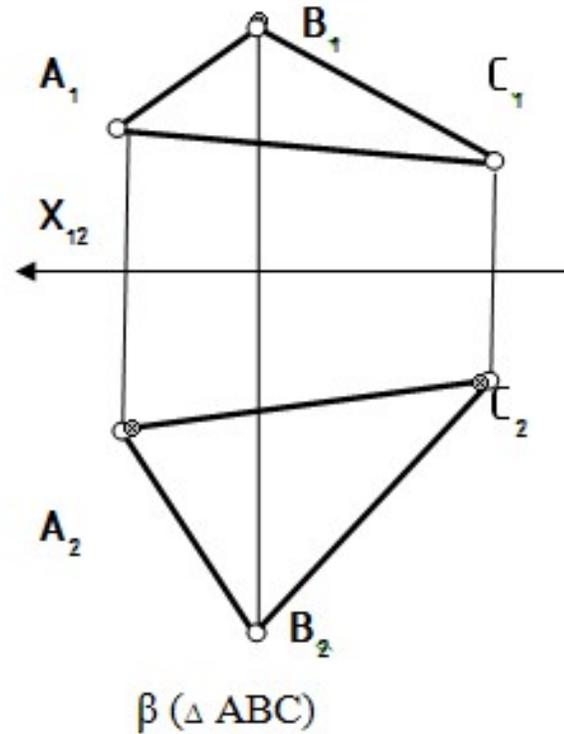
**Следами плоскости** называются линии пересечения плоскости с плоскостями проекций.

В общем случае плоскость имеет три следа: горизонтальный  $h_\alpha$ , фронтальный  $f_\alpha$ , профильный  $p_\alpha$ . Следы плоскости пересекаются попарно на осях в точках  $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ , которые называются точками схода следов плоскости. Треугольник, образованный следами плоскости, называется треугольником следов.



По расположению в пространстве относительно плоскостей проекций плоскости подразделяются следующим образом:

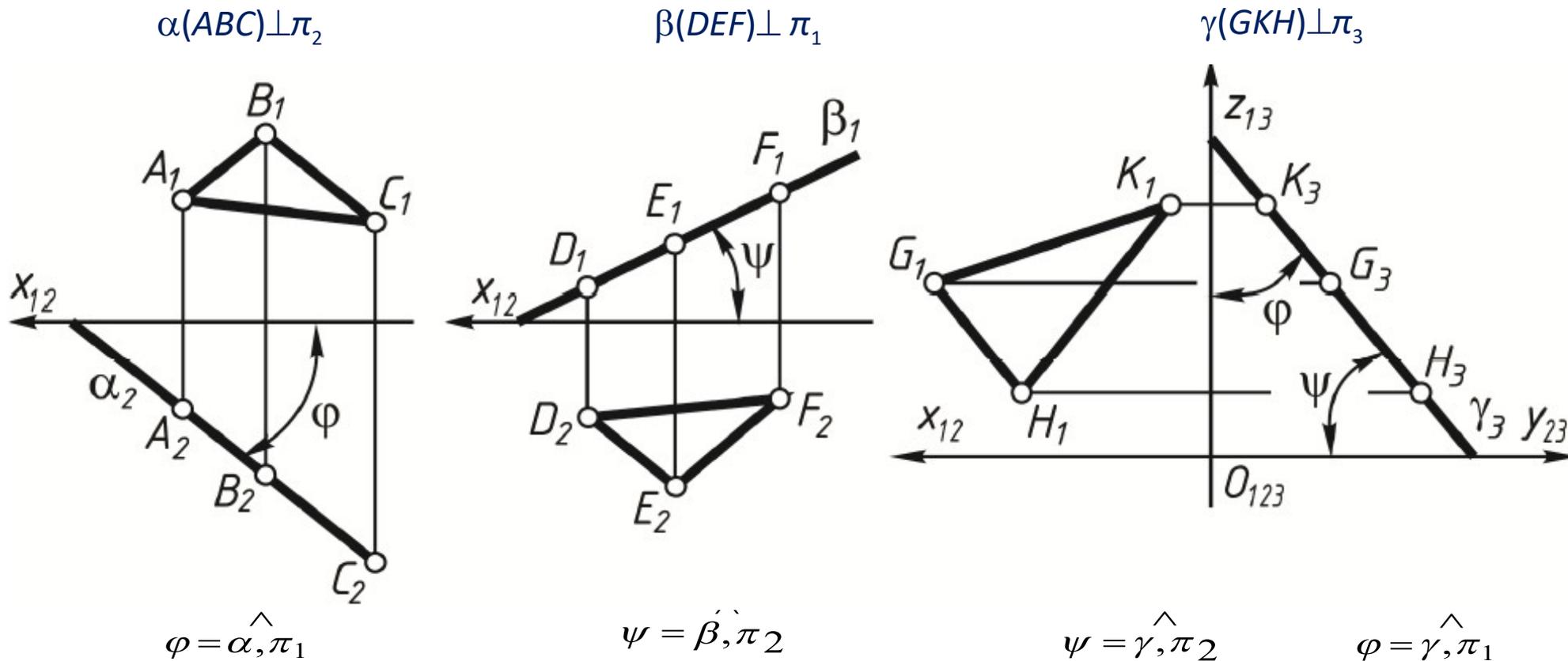
- **Плоскости общего положения** – это плоскость, которая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций



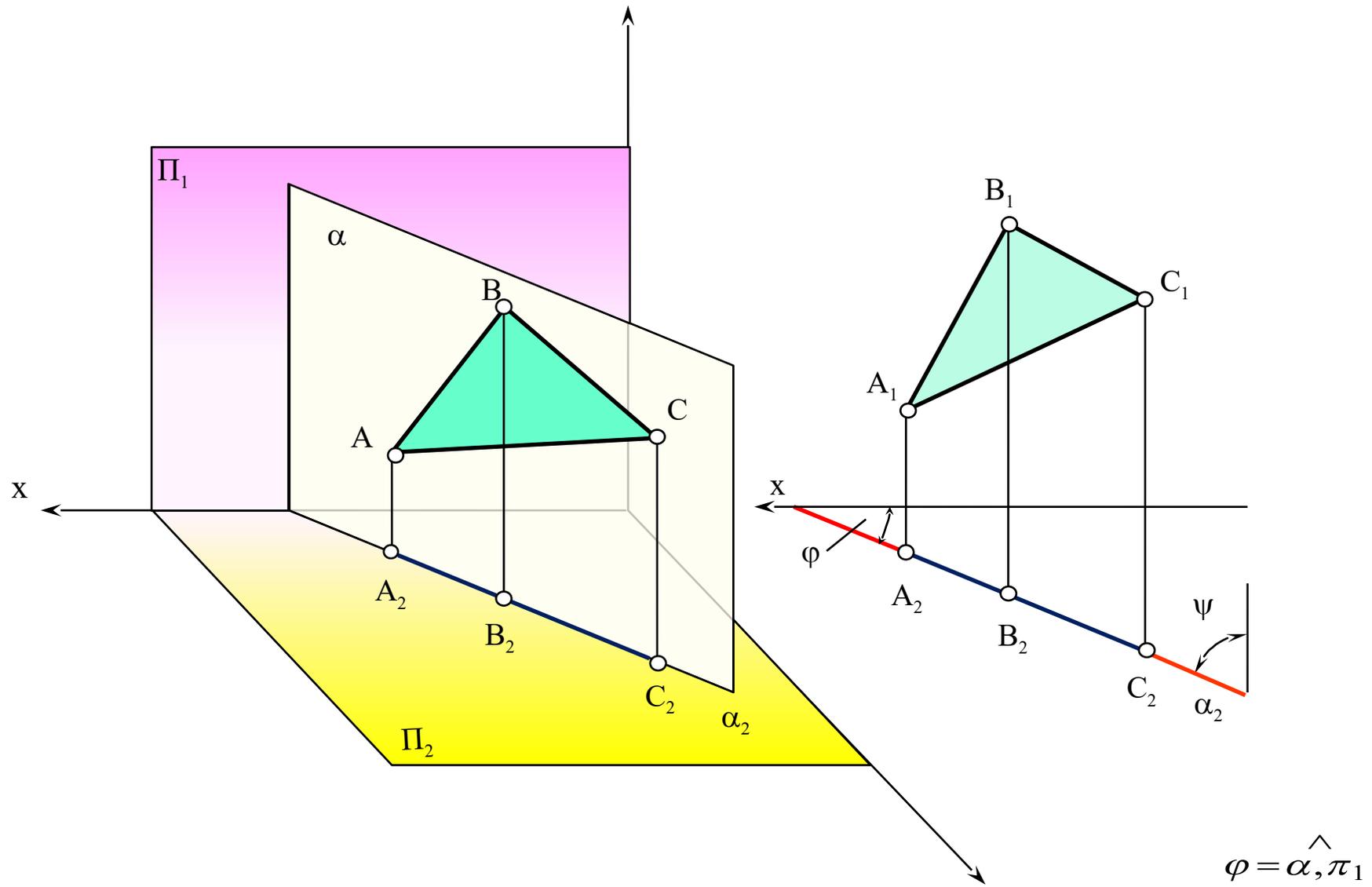
- **Плоскости частного положения** – это плоскости, параллельные или перпендикулярные какой-либо плоскости проекций. К плоскостям частного положения относятся: плоскости уровня и проецирующие плоскости.

## Проецирующие плоскости

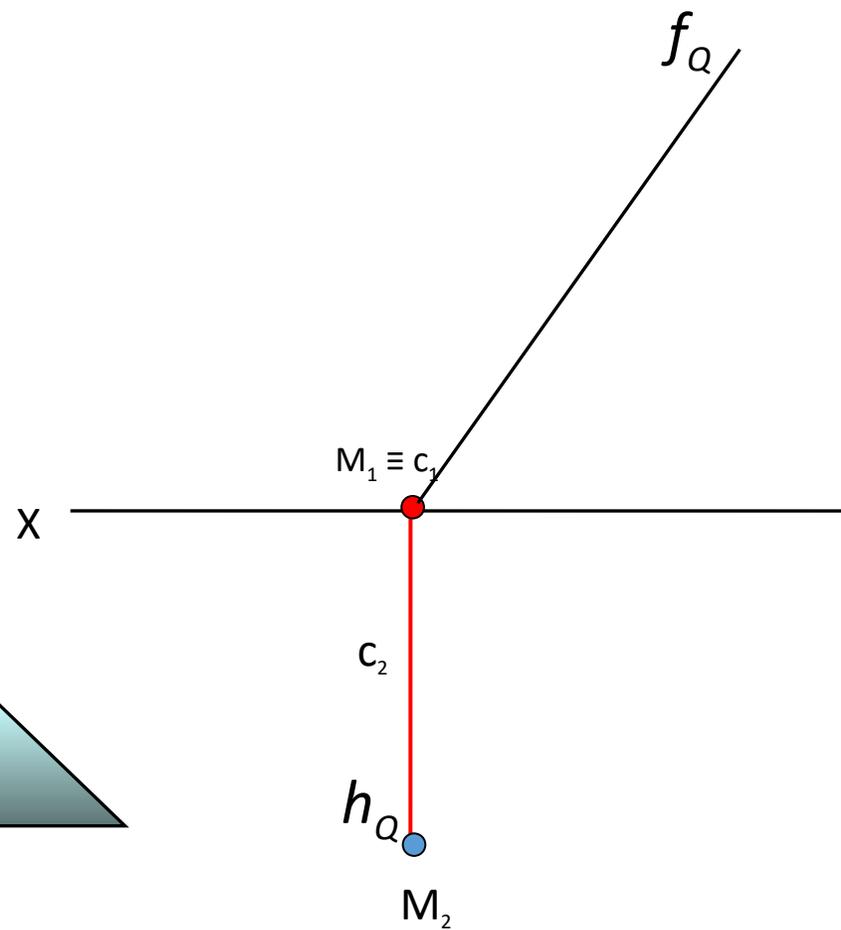
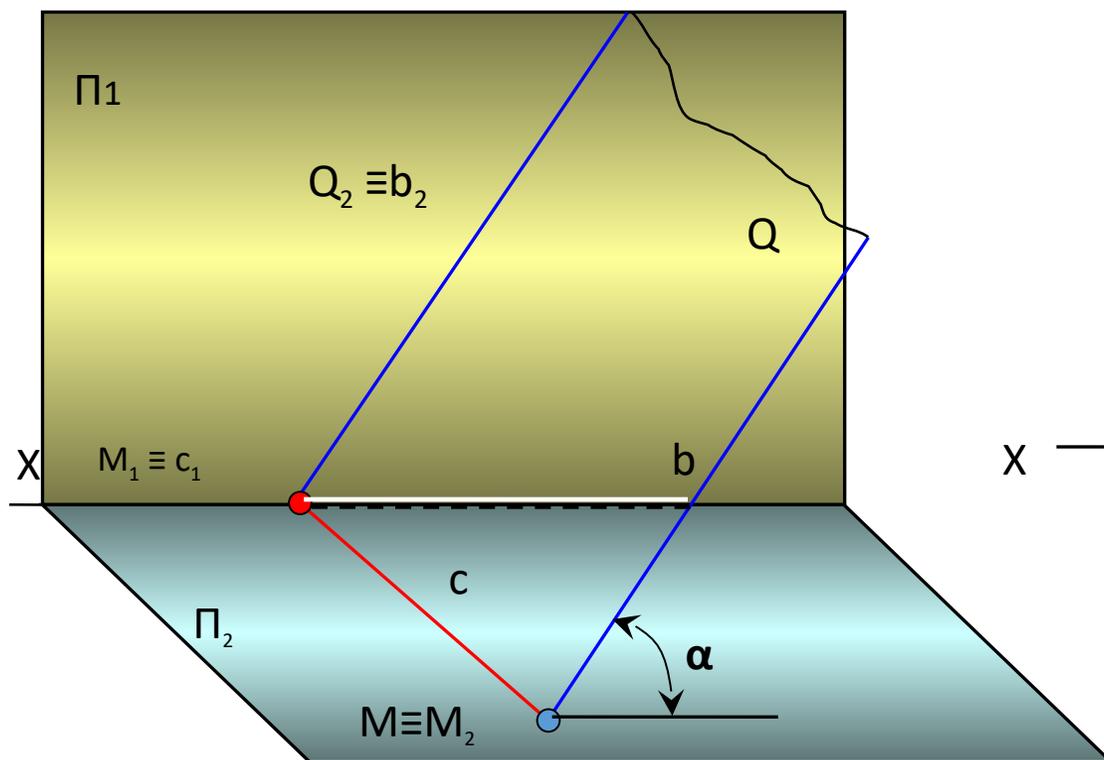
- это плоскости, перпендикулярные к одной из плоскостей проекций



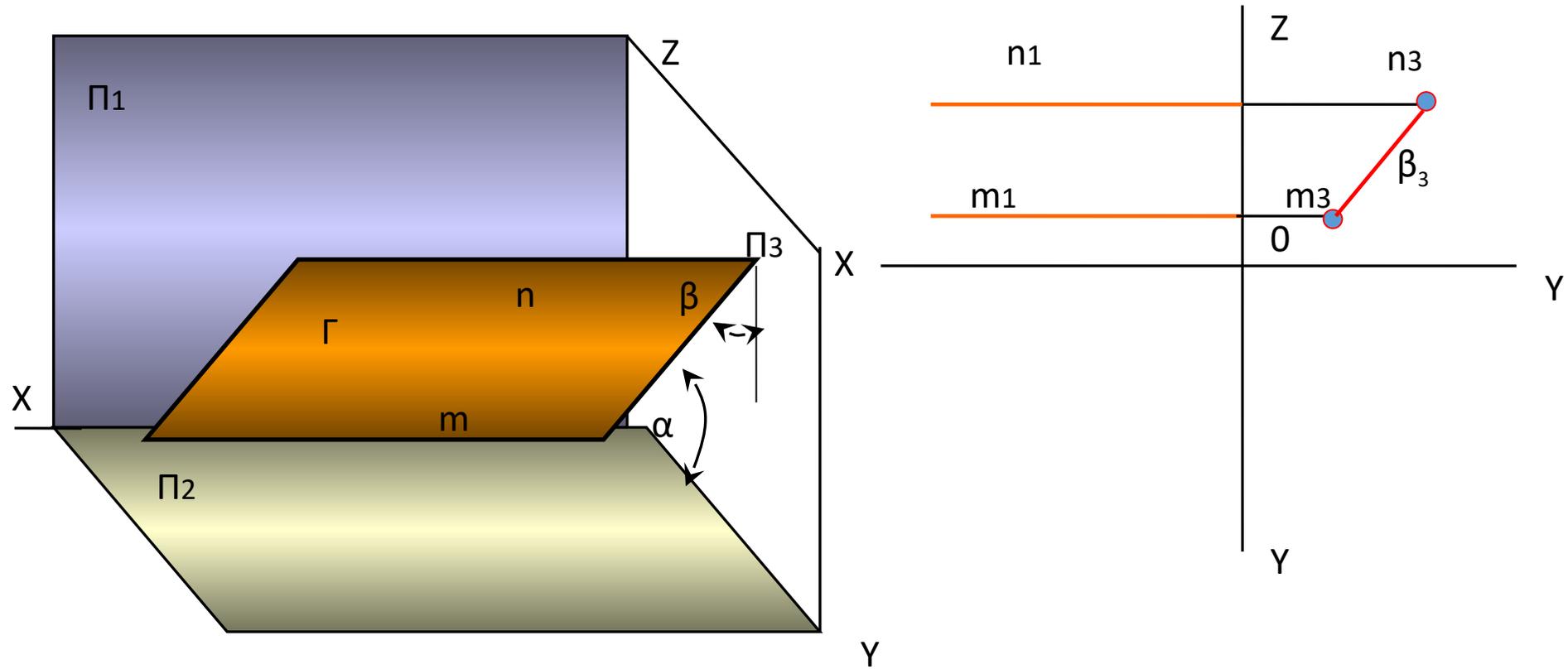
- **Горизонтально проецирующая плоскость** – это плоскость перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ . Горизонтальная проекция такой плоскости представляет собой прямую, совпадающую с горизонтальным следом этой плоскости;
- **Фронтально проецирующая плоскость** – это плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ . Фронтальная проекция такой плоскости вырождается в прямую, совпадающую с фронтальным следом этой плоскости;
- **Профильно проецирующая плоскость** – это плоскость перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ . Профильная проекция такой плоскости вырождается в прямую.



Фронтально-проецирующая плоскость-

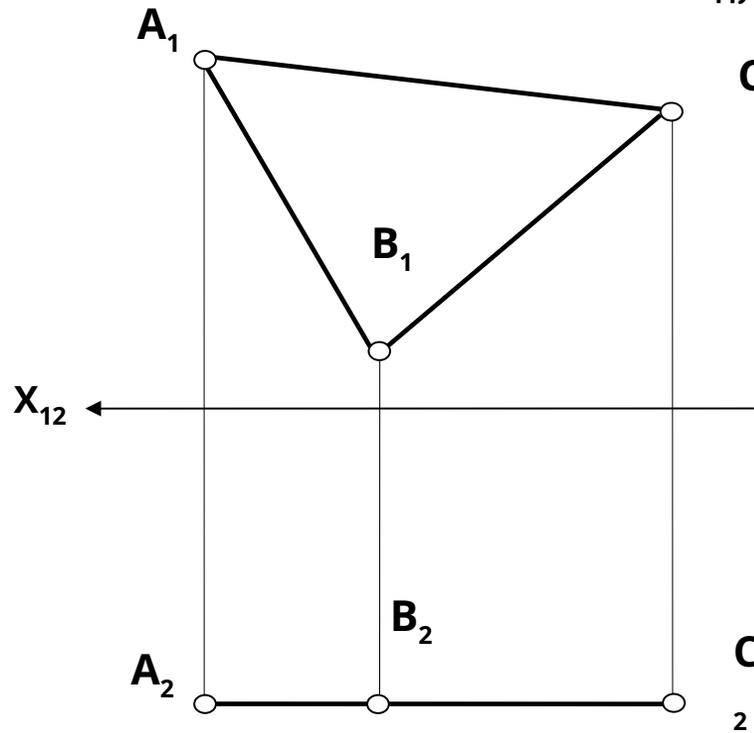


Профильно-проецирующая плоскость-

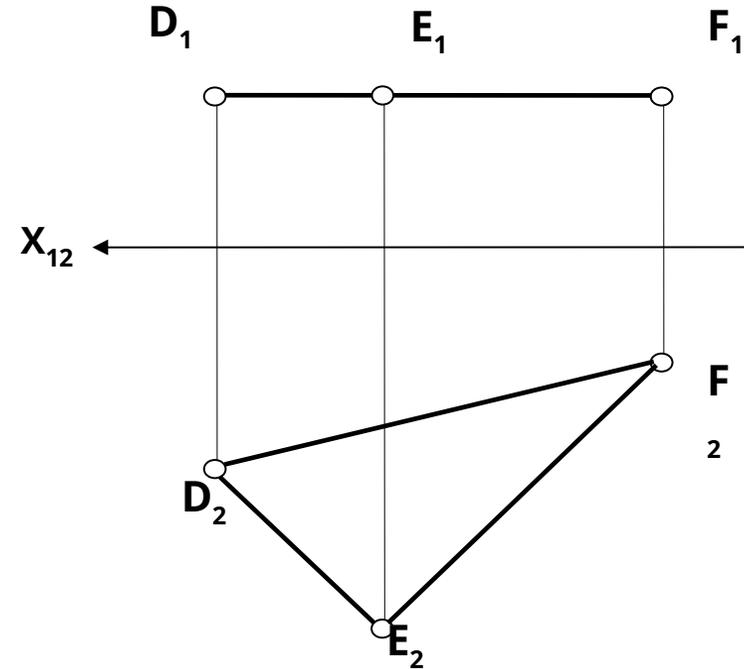


## Плоскости уровня

это плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций, и, следовательно, параллельные третьей плоскости проекций .



$\alpha (\triangle ABC) \parallel \pi_1$



$\beta (\triangle DEF) \parallel \pi_2$

Называются такие плоскости так же, как и плоскость проекций, параллельно которой они расположены:

- **Горизонтальная плоскость** – это плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_2$ ;
- **Фронтальная плоскость** – это плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций  $\pi_1$ ;
- **Профильная плоскость** – это плоскость параллельная профильной плоскости проекций  $\pi_3$ .

