

Курс лекций по дисциплине

«Инженерная и компьютерная графика»

лектор

Каражанова Дарига Дюсеновна

Кандидат педагогических наук,
ассоциированный профессор Satbayev University





Лекция 2

Методы и свойства ортогонального проецирования. Эпюр Монжа. Чертеж точки, прямой и плоскости на эпюре

К.п.н., ассоциированный профессор

Каражанова Дарига Дюсеновна

Введение

Как любая наука «Начертательная геометрия» изучает объективные законы природы. С ее помощью познаются геометрические свойства предметов реального мира, характеризуемые понятиями «форма», «размеры», «положение в пространстве», «взаимное положение». Методы начертательной геометрии являются теоретической базой для решения задач технического черчения.



Гаспар Монж

В технике чертежи являются основным средством выражения человеческих идей. Они должны не только определять форму и размеры предметов, но и быть достаточно простыми и точными в графическом исполнении, помогать всесторонне исследовать предметы и их отдельные детали. Для того чтобы правильно выразить свои мысли с помощью рисунка, эскиза, чертежа требуется знание теоретических основ построения изображений геометрических объектов, их многообразия и отношения между ними, что и составляет предмет начертательной геометрии.

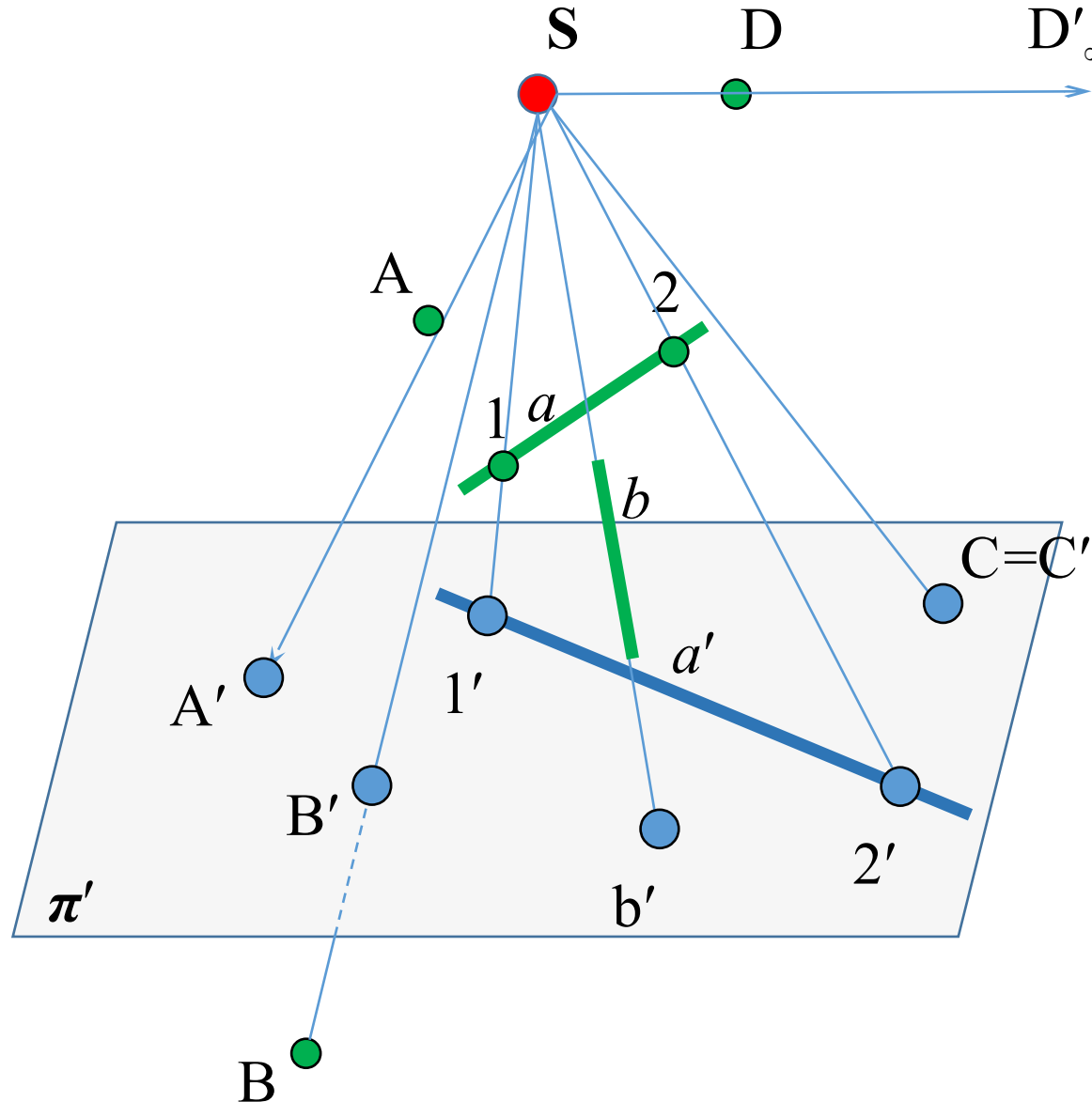
Изучение начертательной геометрии способствует развитию пространственного воображения и навыков правильного логического мышления, совершенствуя нашу способность – по плоскому изображению мысленно создавать представления о форме предмета и наоборот – создавать изображения мысленно созданных образов – визуализация мысли.

Зарождение начертательной геометрии связывается с именем Гаспара Монжа – французского математика, геометра (1746–1818), опубликовавшего в 1798 году книгу «Начертательная геометрия», в которой были сформулированы основные принципы комплексного проецирования.

Методы проецирования.

В настоящее время изображения получают методом проекций.

При этом берут плоскость π' и точку S , расположенную вне этой плоскости.



Совокупность плоскости π' и точки S образует аппарат проецирования, где:

π' – плоскость проекций,
 S – центр проецирования.

Для получения изображения точки A ее соединяют с центром проекций S прямой линией. Точку A' пересечения прямой (AS) и плоскости π' принимают за изображение точки A на плоскости π' :

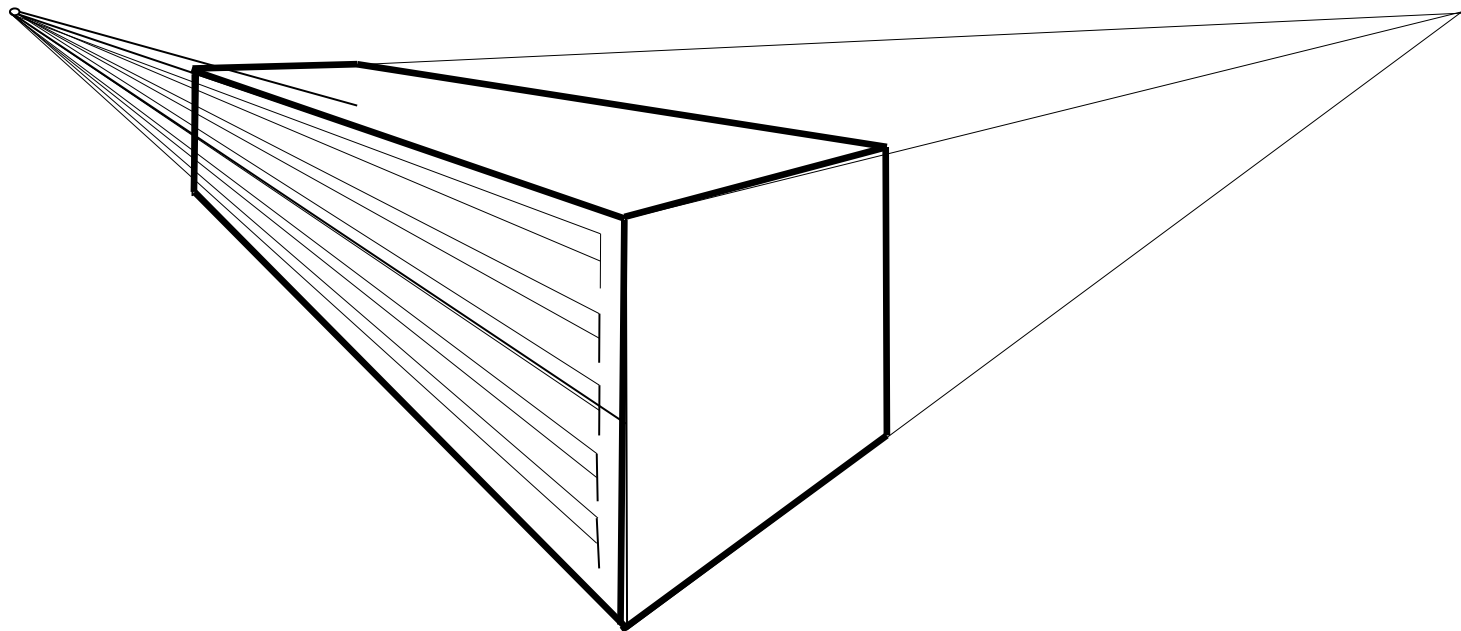
т. A' – центральная проекция точки A на плоскость π' ,

(AS) – проецирующая прямая (проецирующий луч).

Описанные построения выражают суть операции, называемой **центральным проецированием** точек пространства на плоскость.

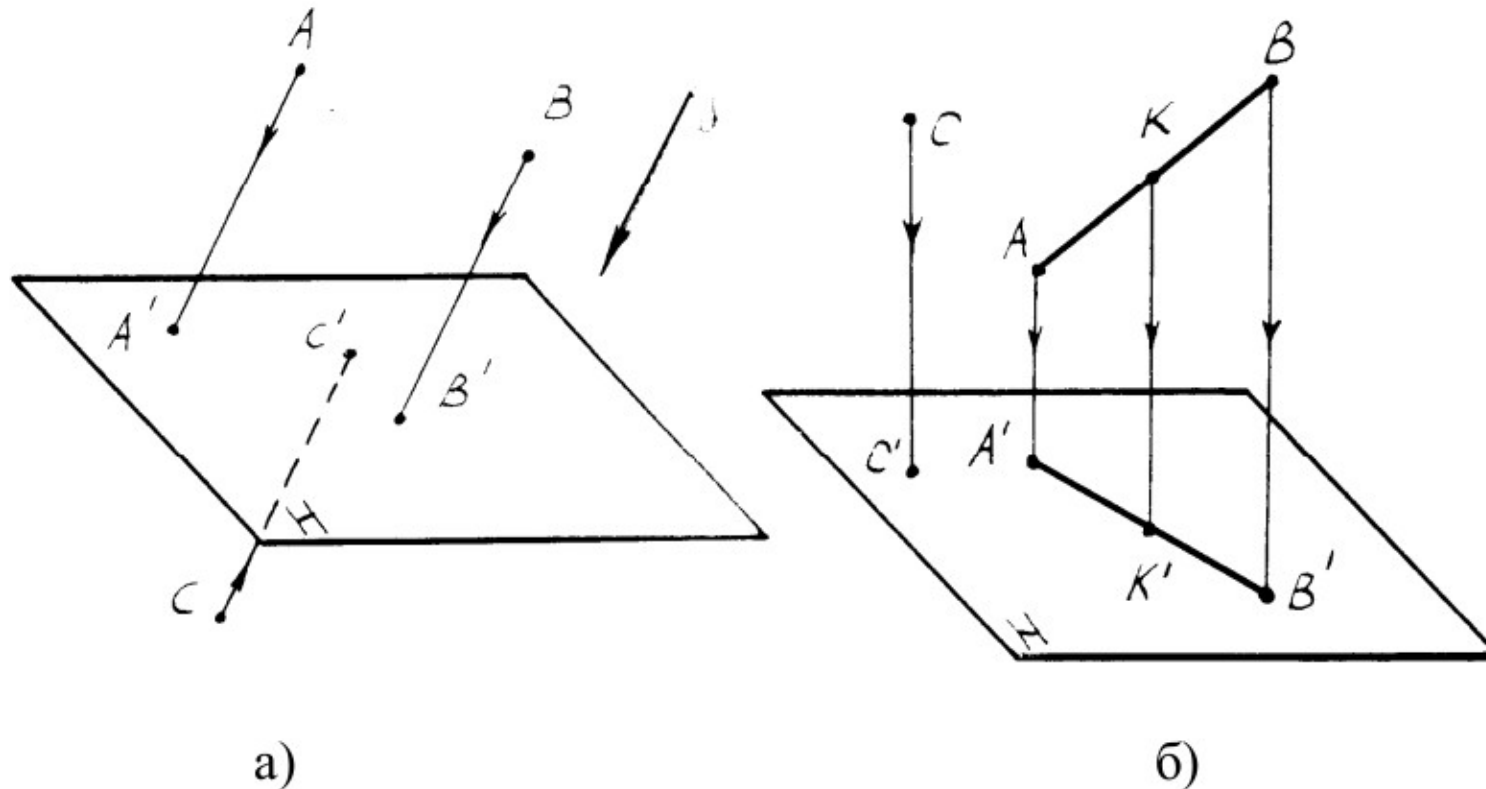
$$D'_{\infty} \in \pi'$$

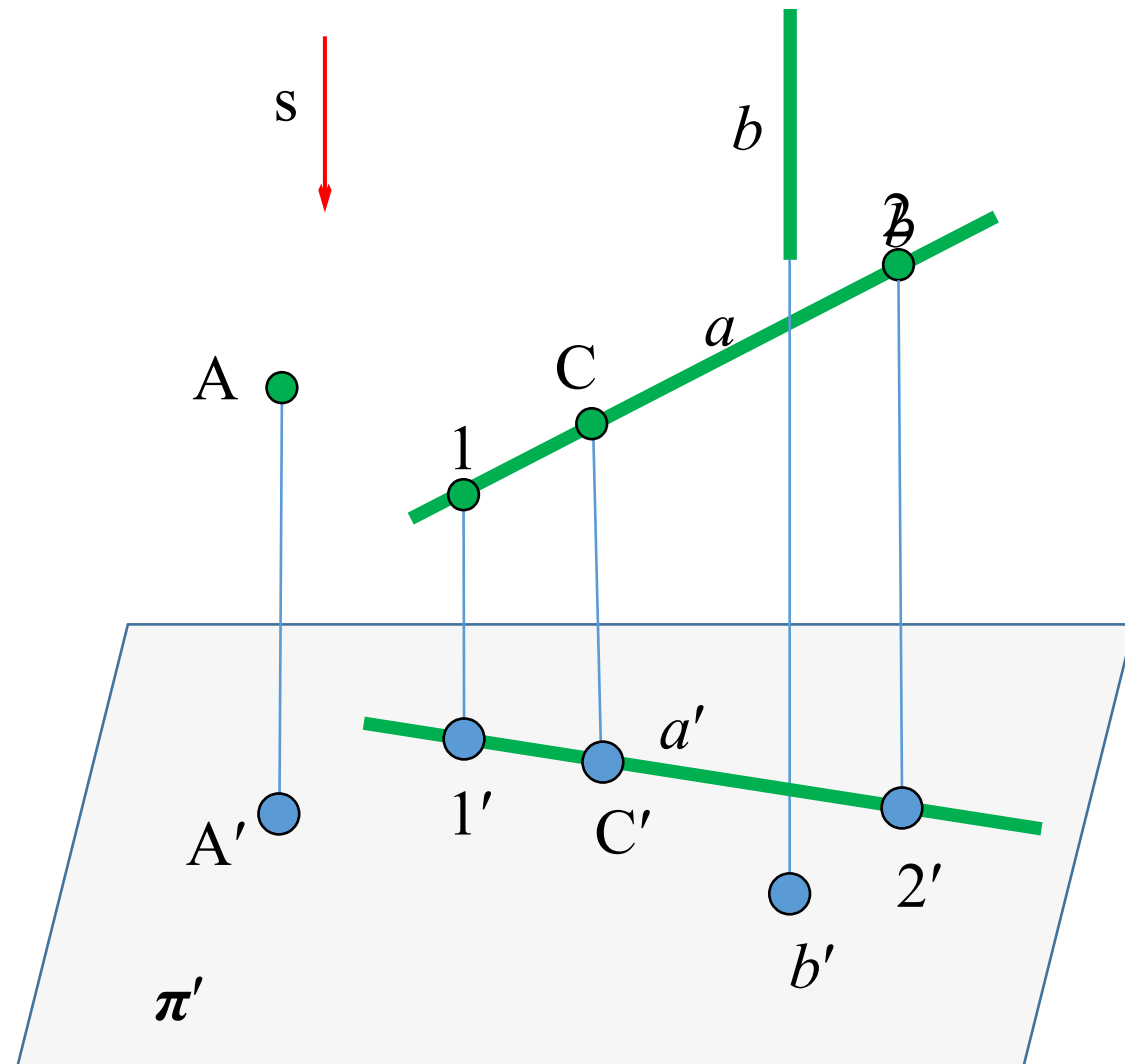
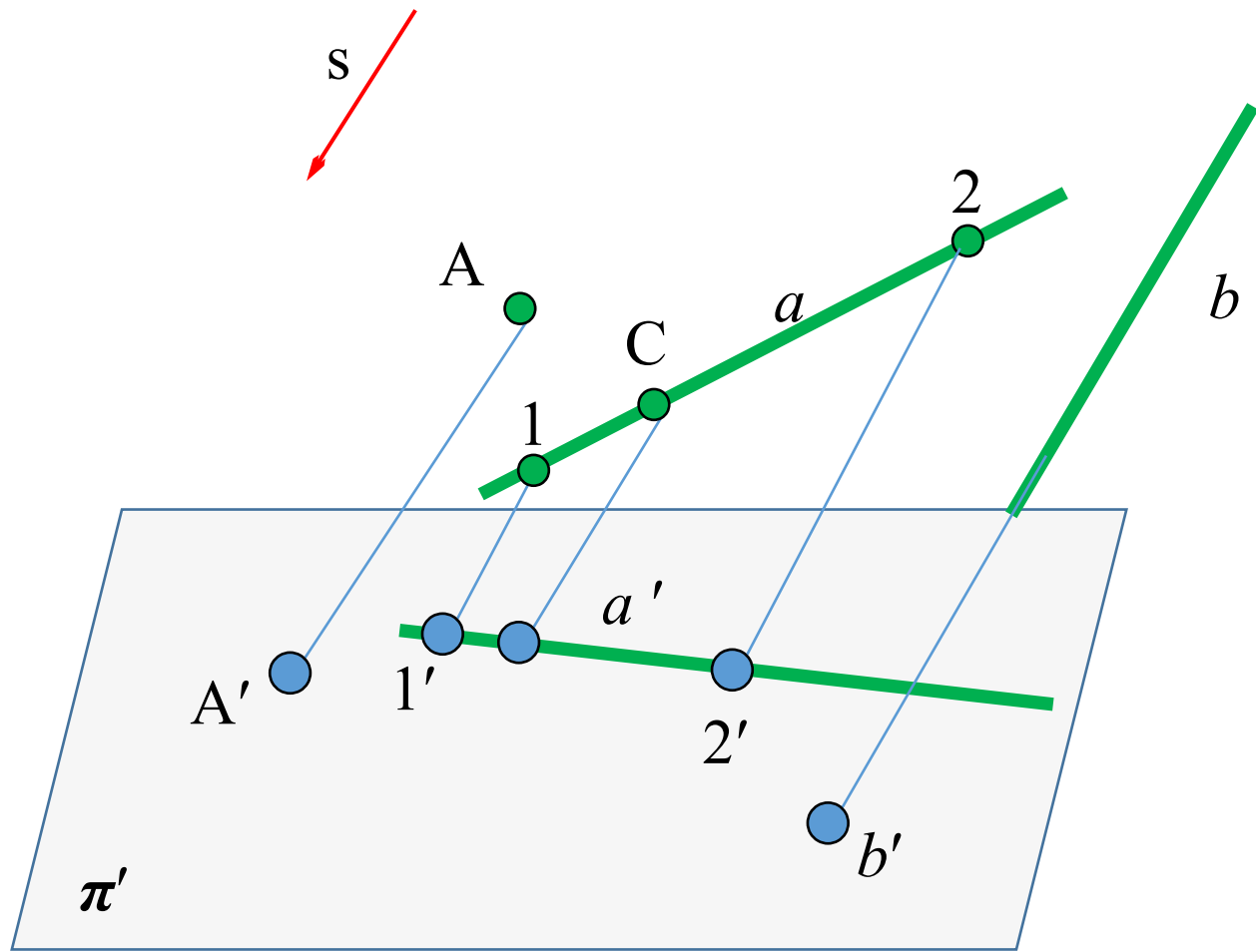
На основе центрального проецирования выполняется линейная перспектива, наиболее наглядный вид графических изображений. Это достаточно сложный метод чаще всего используемый в архитектуре



Параллельное проецирование является частным случаем центрального проецирования. При этом методе полагается, что центр проецирования S удален в бесконечность (бесконечно удаленная точка S_∞), в результате чего проецирующие лучи становятся взаимно параллельными, и проецирование всех точек осуществляется по единому направлению s . В зависимости от угла, под которым проецирующий луч падает на плоскость проекций различают проекции:

1. прямоугольные, или ортогональные (при угле, равном 90°),
2. косоугольные (при угле, не равном 90°).

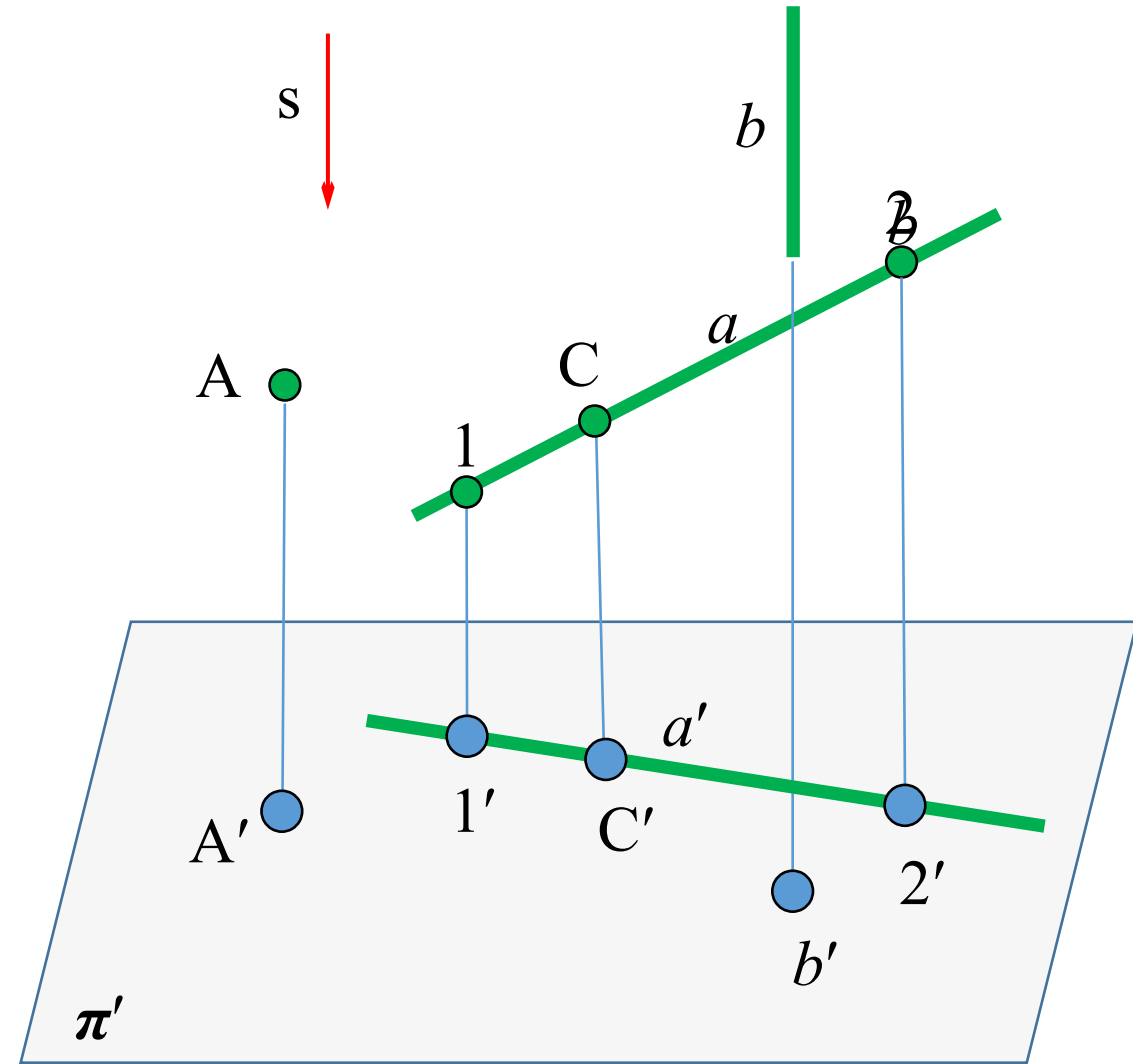




Центральные и параллельные проекции имеют ряд общих геометрических свойств:

- Точка проецируется в точку, прямая – в прямую (за исключением проецирующей прямой, проекция которой вырождается в точку), плоская фигура – в плоскую фигуру (за исключением того случая, когда эта фигура является проецирующей и отображается в виде отрезка прямой), объемные тела проецируются в плоскую фигуру.

- Свойство принадлежности. В обоих видах проекций сохраняется взаимная принадлежность геометрических элементов: если точка принадлежит прямой, то проекция этой точки принадлежит проекции этой прямой ($C \in a \Rightarrow (C' \in a')$)



Свойства параллельного проецирования

- сохраняется параллельность: $a \parallel b \rightarrow a_i \parallel b_i$;

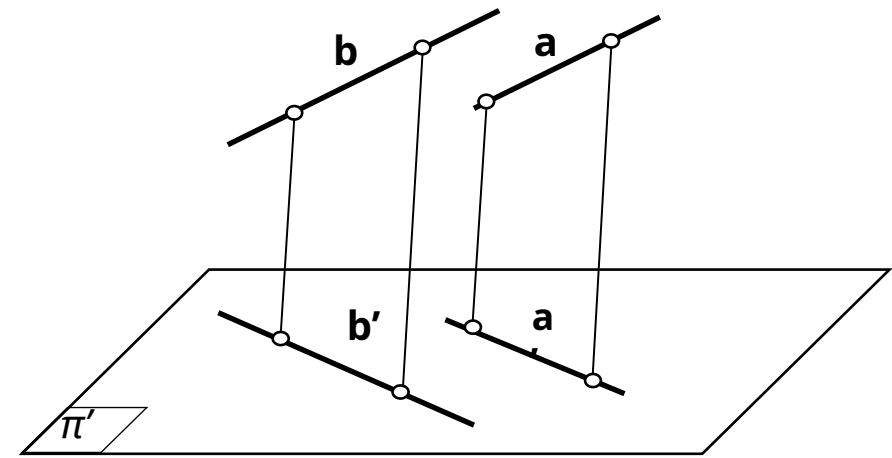
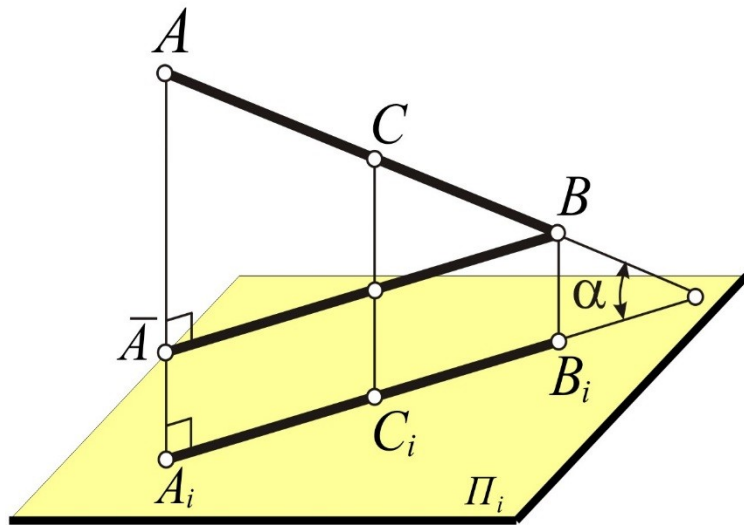
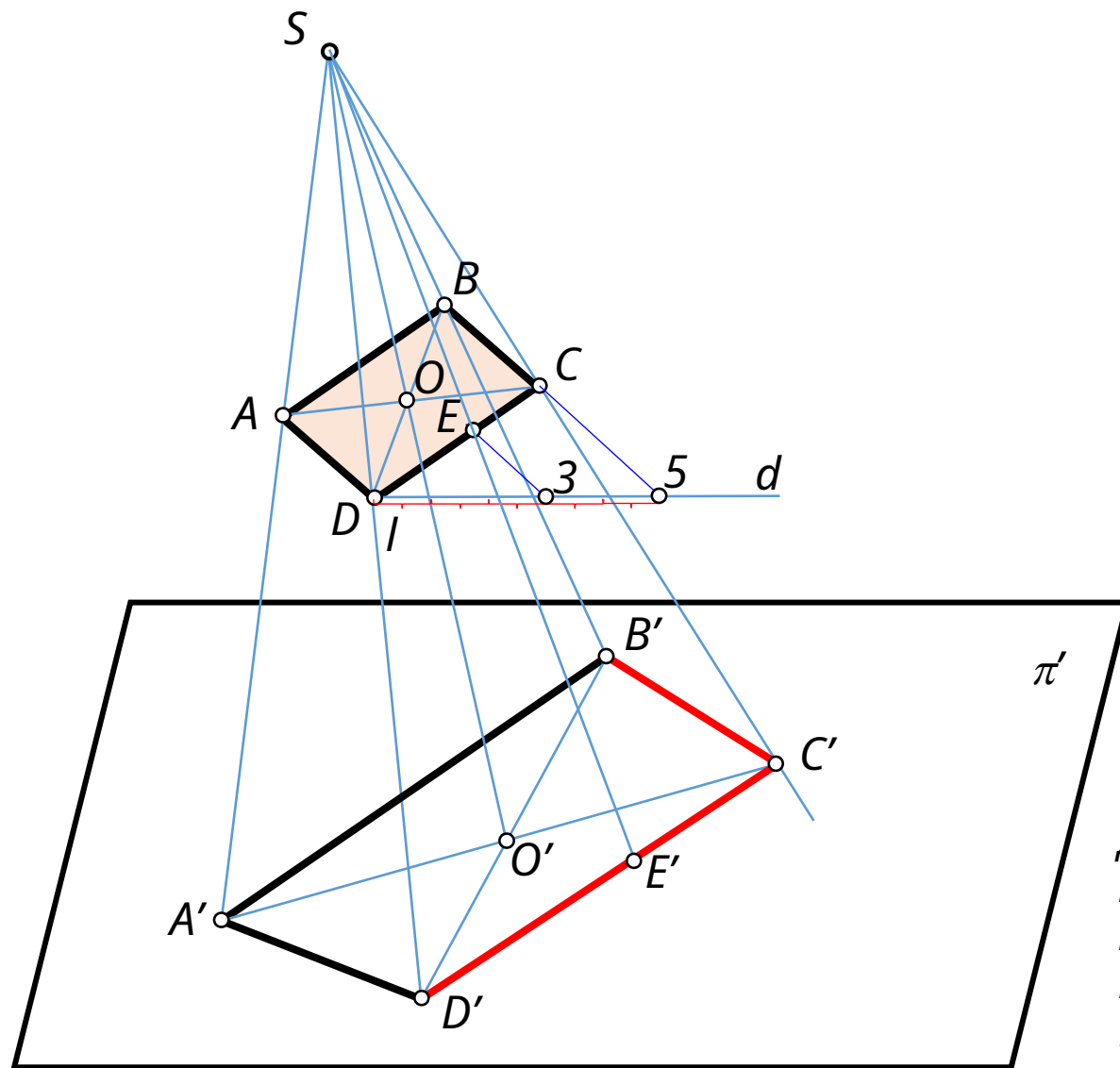


Рисунок 3 – Свойство параллельности

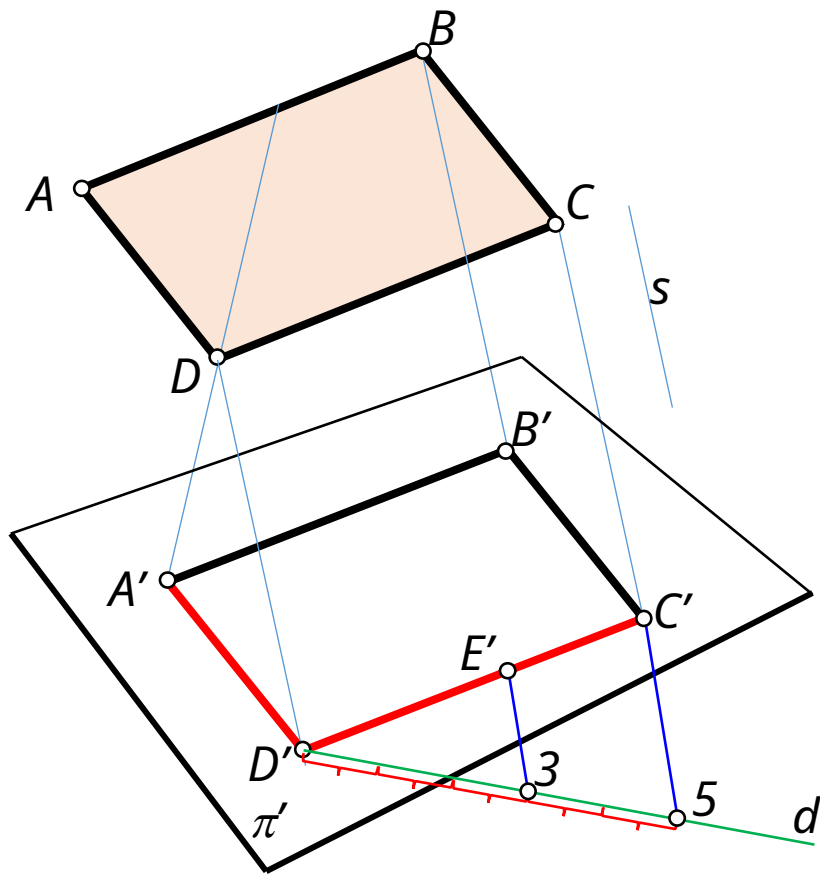
- отношения длин проекций отрезков параллельных прямых к длинам самих отрезков постоянны;
- Отрезки прямых, плоские фигуры, параллельные плоскости проекций, проецируются без искажения (в натуральную величину).

Требования, предъявляемые к чертежу. К чертежу предъявляются следующие требования: обратимость, точность, простота, наглядность. Чертеж называется обратимым, если по изображению фигуры можно восстановить ее форму, размеры и положение в пространстве. В инженерной практике широко используются обратимые чертежи: - эюр Монжа, аксонометрия, линейная перспектива, проекции с числовыми отметками



1. $AC \cap BD = O$
2. $SO \cap B'D' = O'$
3. $SC \cap A'O' = C'$
4. $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$
5. $D \in d$
6. $[D5] = 5I, D5 \in d$
7. $[D3] = 3I, D3 \in d$
8. $3E \parallel 5C, 3E \cap CD = E$
9. $SE \cap C'D' = E'$

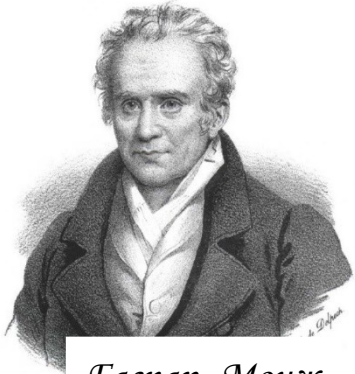
Постройте центральную проекцию параллелограмма $ABCD$ на плоскость π' .
 Постройте центральную проекцию точки E (E'), которая делит сторону CD в следующем соотношении - 2:3



- 1 $DD' \parallel s$
- 2 $A'D' \parallel B'C'$
3. $A'D' \cap DD' = D'$
4. $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$
5. $D \in d$
6. $[D'5] = 5l, D'5 \in d$
7. $[D'3] = 3l, D'3 \in d$
8. $3E' \parallel 5C', 3E' \cap C'D' = E'$

Достройте параллельную проекцию параллелограмма $ABCD$ на плоскость π' .
 Постройте проекцию точки E (E'), которая делит сторону CD в следующем соотношении
 - 2:3

- **Эпюр Монжа** – основной вид обратимого изображения. Французский математик и инженер *Гаспар Монж (1746-1818гг.)*, систематизировав и обобщив накопленные к тому времени знания по теории и практике построения изображений предметов пространства, предложил получать их изображения путем прямоугольного проецирования на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. В зависимости от этого также чертежи называют двухкартинными или трехкартинными.



Гаспар Монж

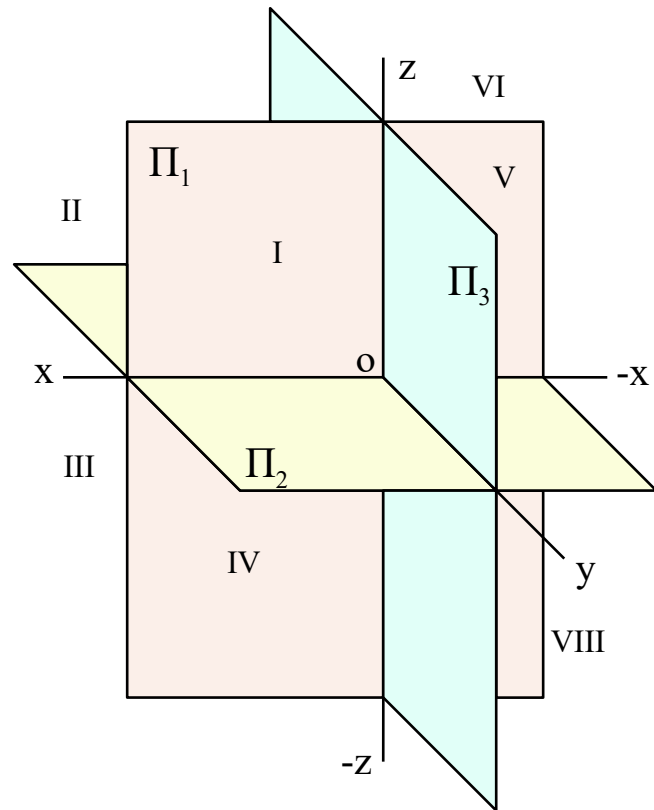
Совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций предмета, расположенных на одной плоскости, называют **комплексным чертежом** (или **ЭПЮРОМ МОНЖА**).

Чертеж называется обратимым, если по изображению фигуры можно восстановить ее форму, размеры и положение в пространстве. В инженерной практике широко используются обратимые чертежи: - эпюр Монжа, аксонометрия, линейная перспектива, проекции с числовыми отметками.

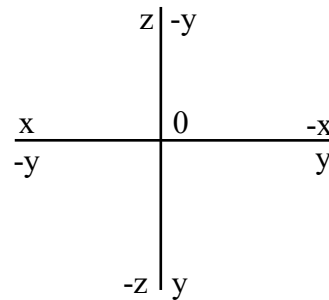
Комплексный чертеж точки (эпюр точки)

Точка представляет собой самую элементарную часть пространства и геометрических тел.

Комплексный чертеж (эпюр) точки состоит из двух или трех ортогональных проекций. Эти проекции получают на взаимно перпендикулярных плоскостях проекций. Одна из плоскостей проекций Π_1 называется *фронтальной* плоскостью проекций, вторая Π_2 - *горизонтальной*, а третья Π_3 - *профильной*.



Ок-тан-ты	Знаки координат		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-



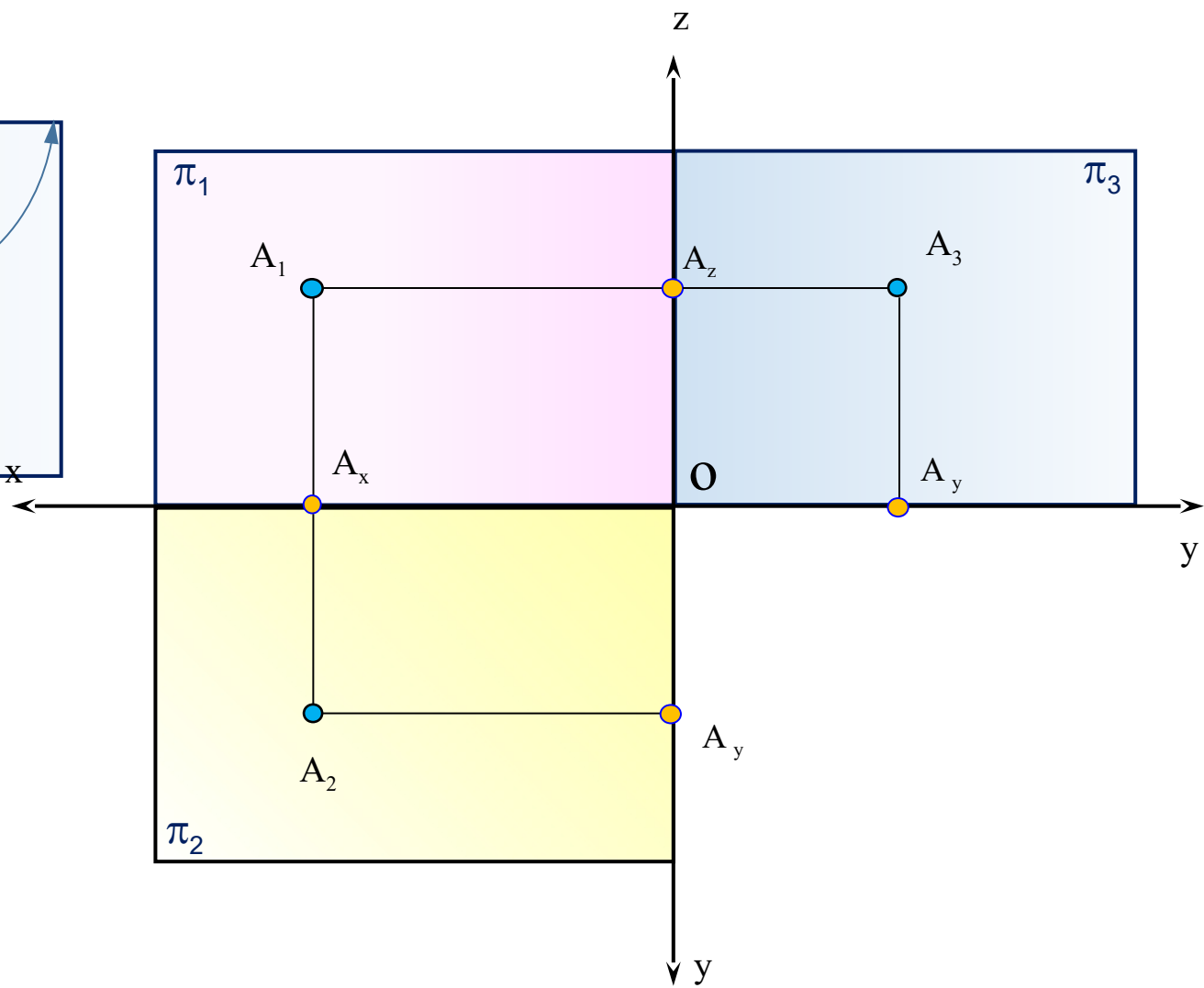
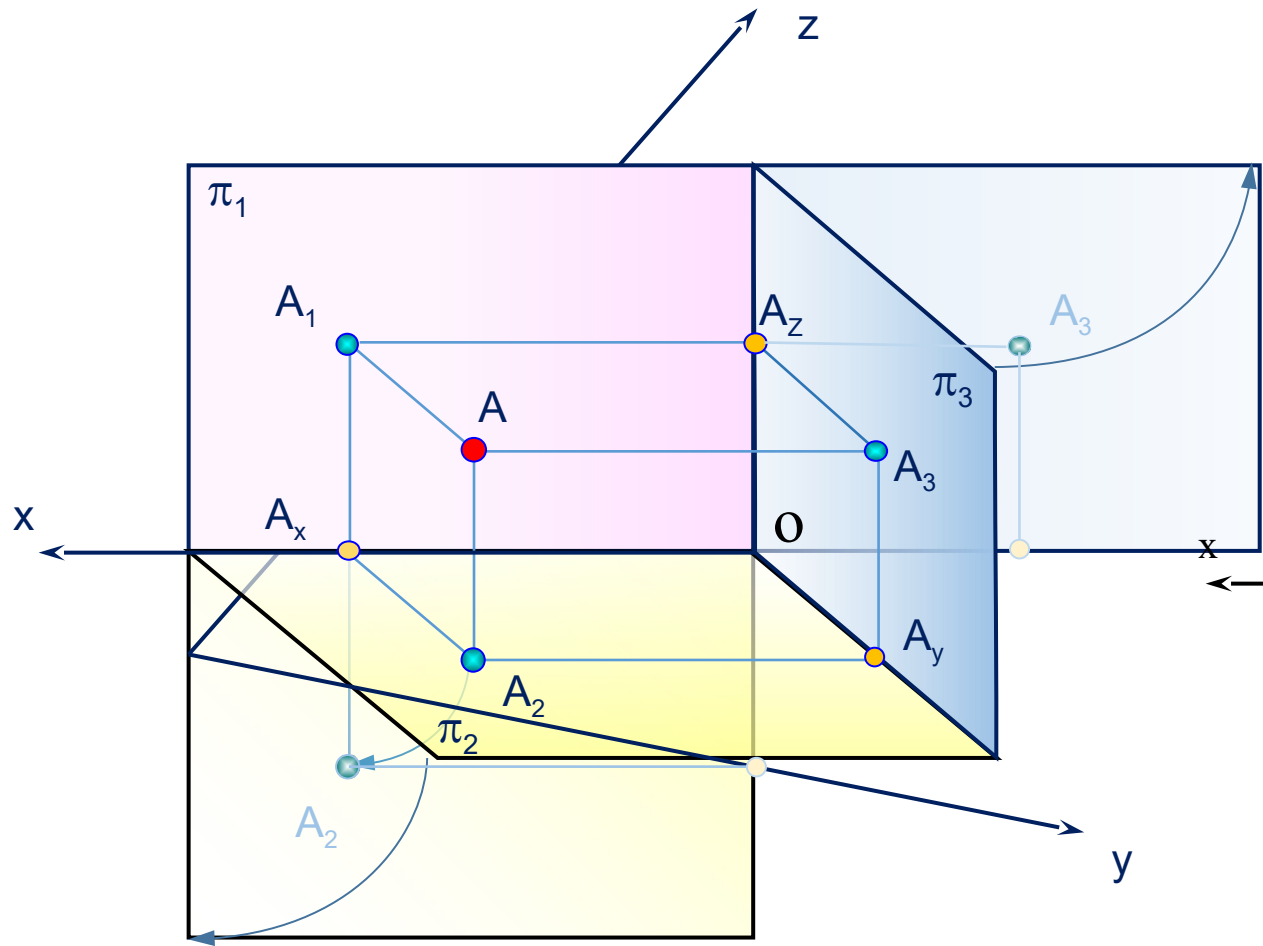
Линии пересечения плоскостей проекций называются *осями координат* **x, y, z**.

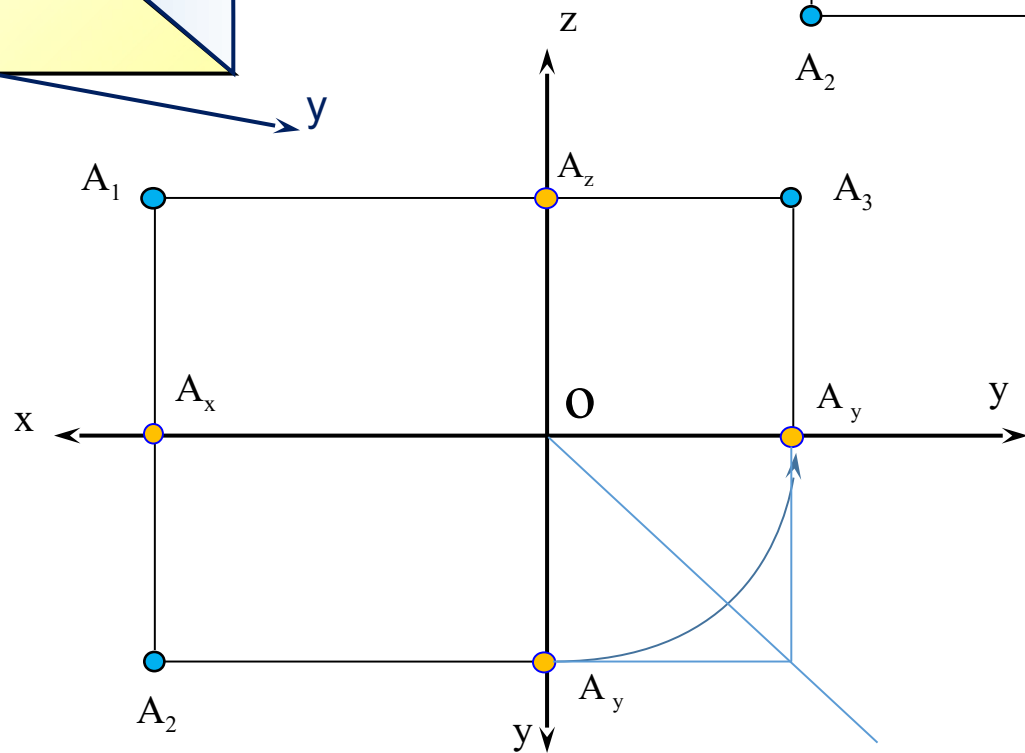
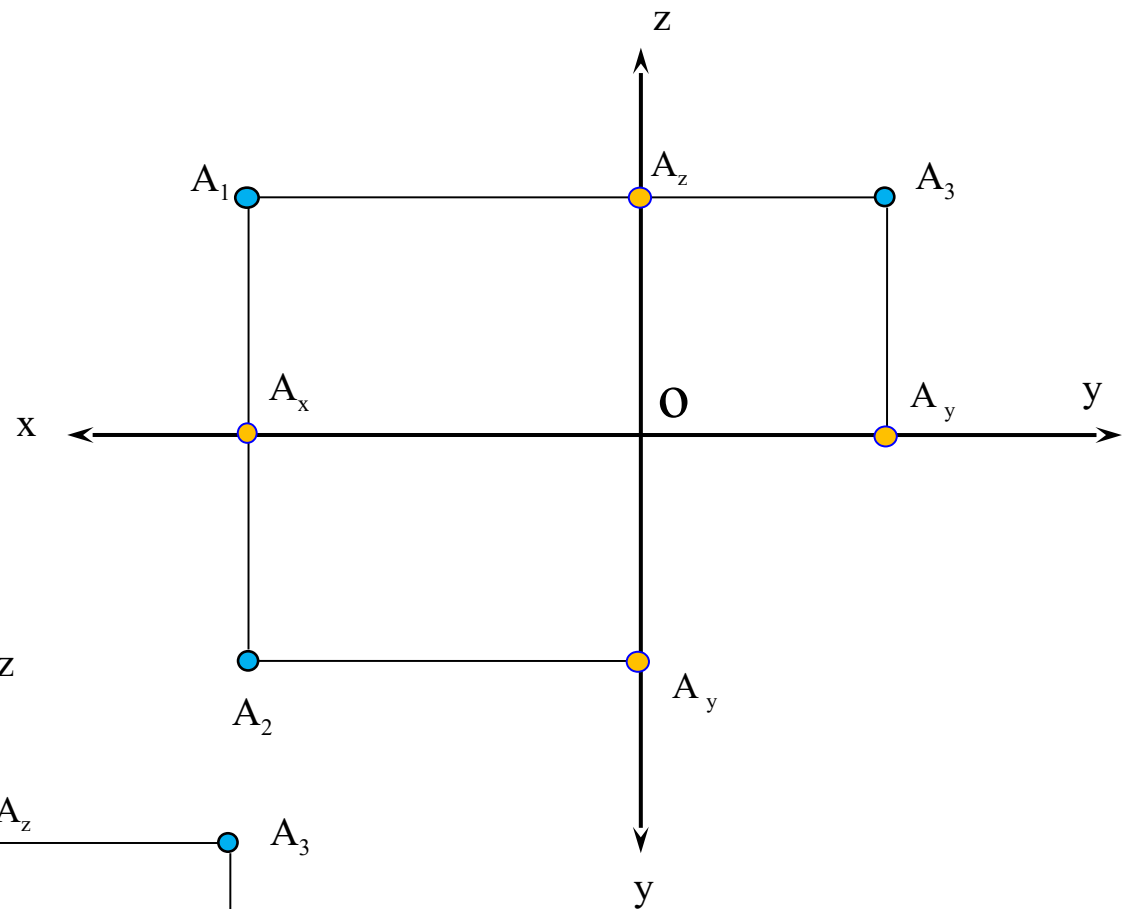
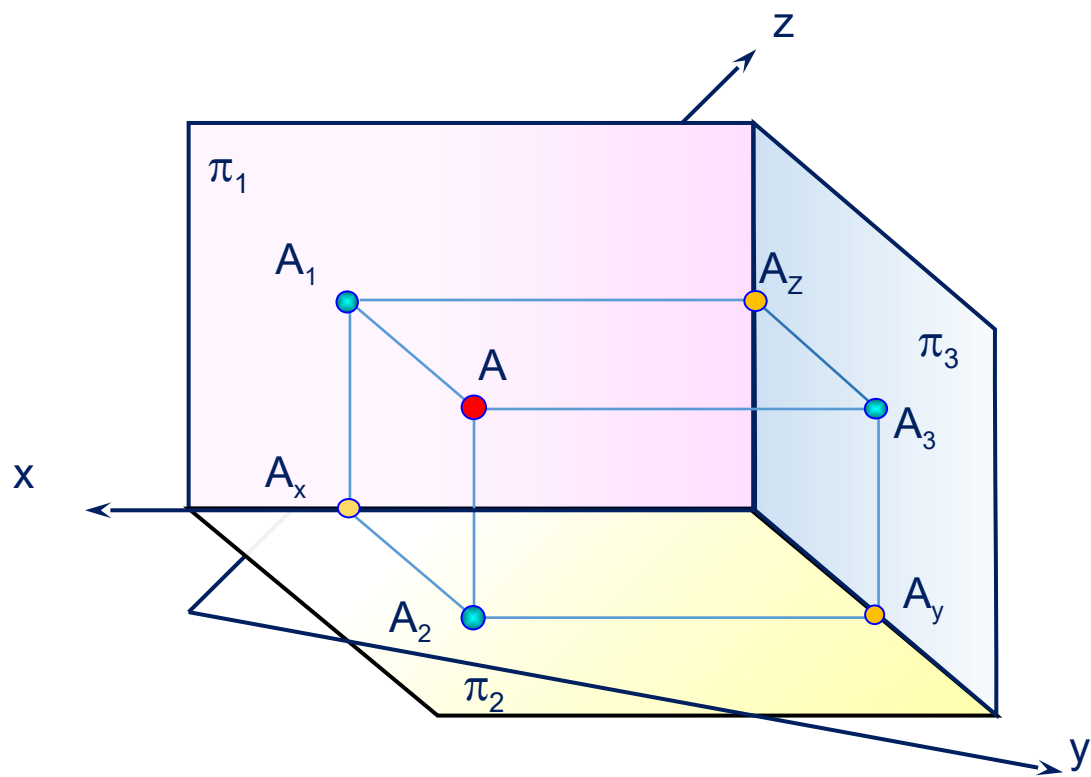
Плоскости проекций делят пространство на **8** трехгранных углов - *четверти* или *октанты*.

Система знаков соответствует "правой системе"

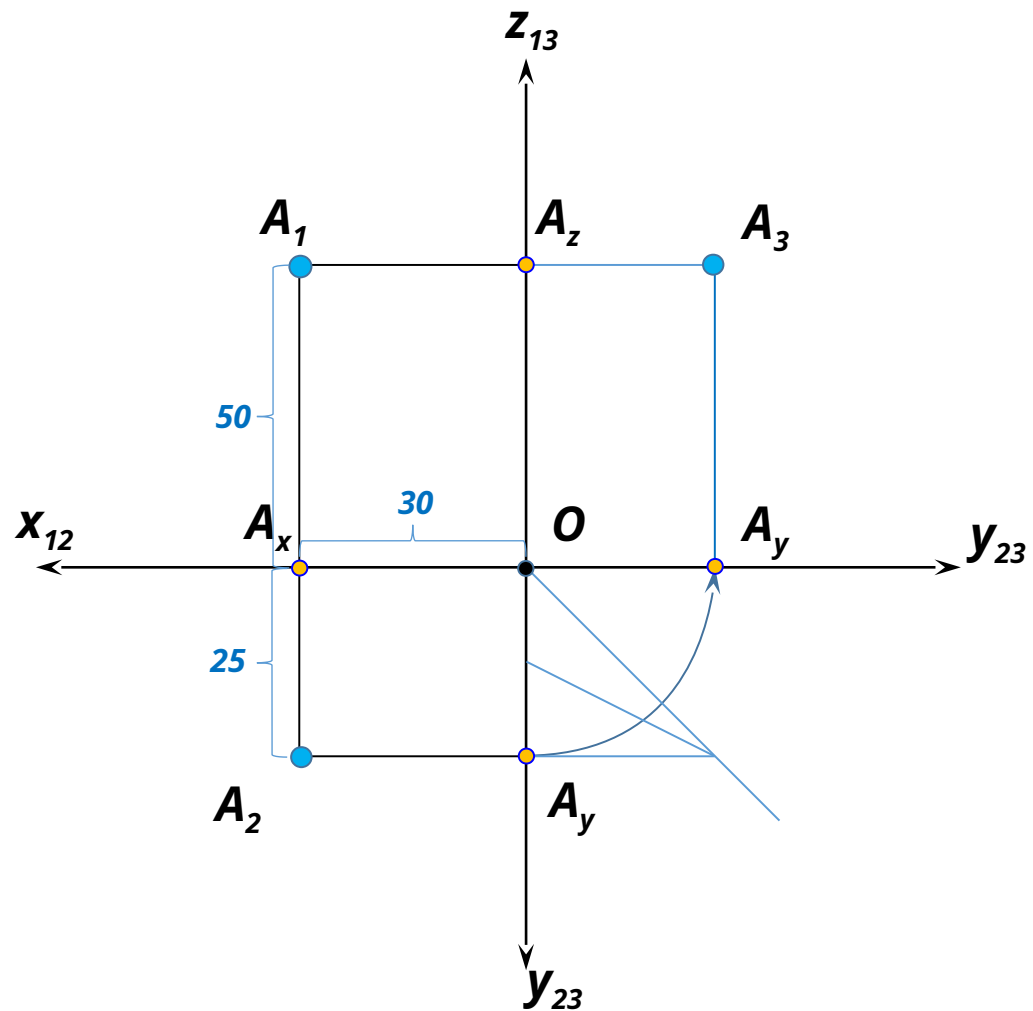
координат, принятой в большинстве европейских стран.

Зритель, рассматривающий оригинал, находится в первом октанте.

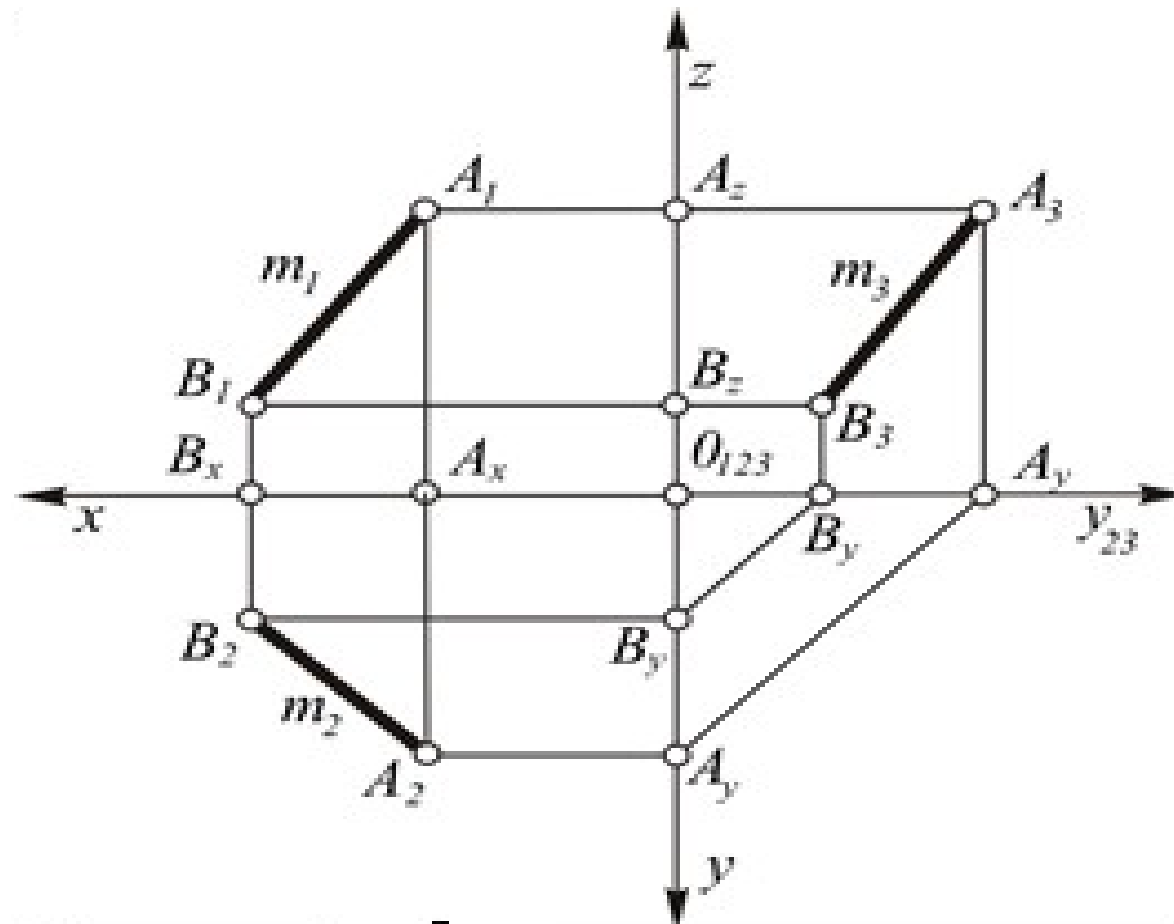




$A(30,25,50)$



Прямые общего и частного положения на эюре Монжа

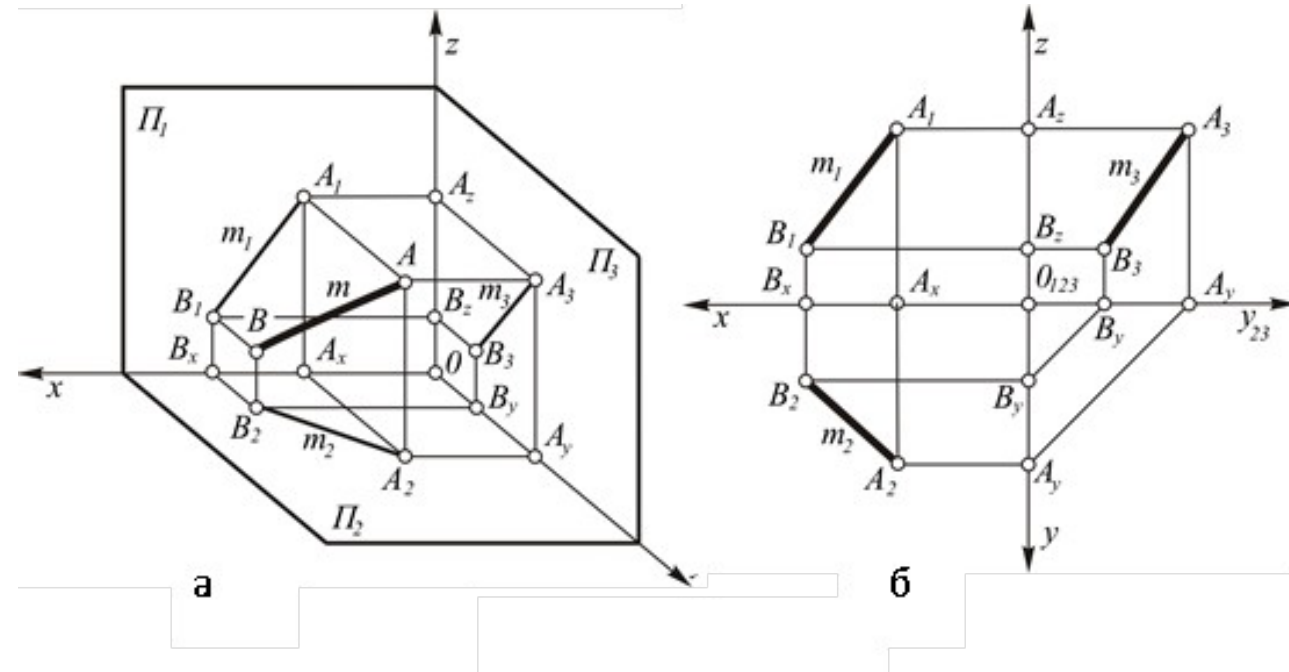


Аксиома. Через две различные точки пространства проходит единственная прямая линия.

Следовательно, положение прямой в пространстве вполне определяется двумя ее точками

Так как прямая m однозначно определяется двумя точками A и B , то ее проекции определяются проекциями этих точек. В силу сохранения свойства принадлежности при проецировании проекции прямой проходят через одноименные проекции точек:

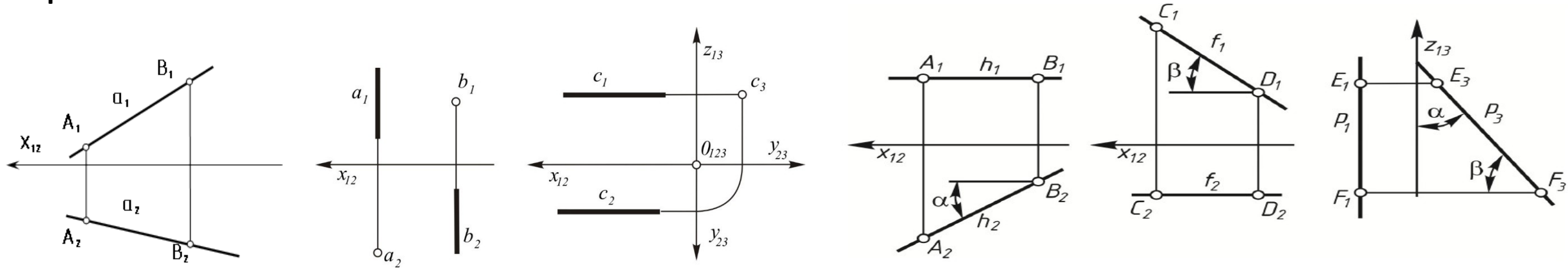
$$m_1(A_1, B_1); m_2(A_2, B_2); m_3(A_3, B_3).$$



Прямая линия может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций П1, П2, П3.

Если прямая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то ее называют **прямой общего положения**.

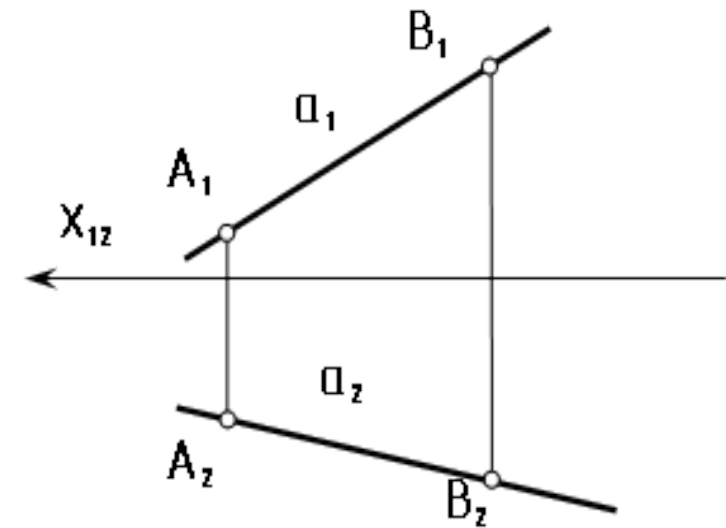
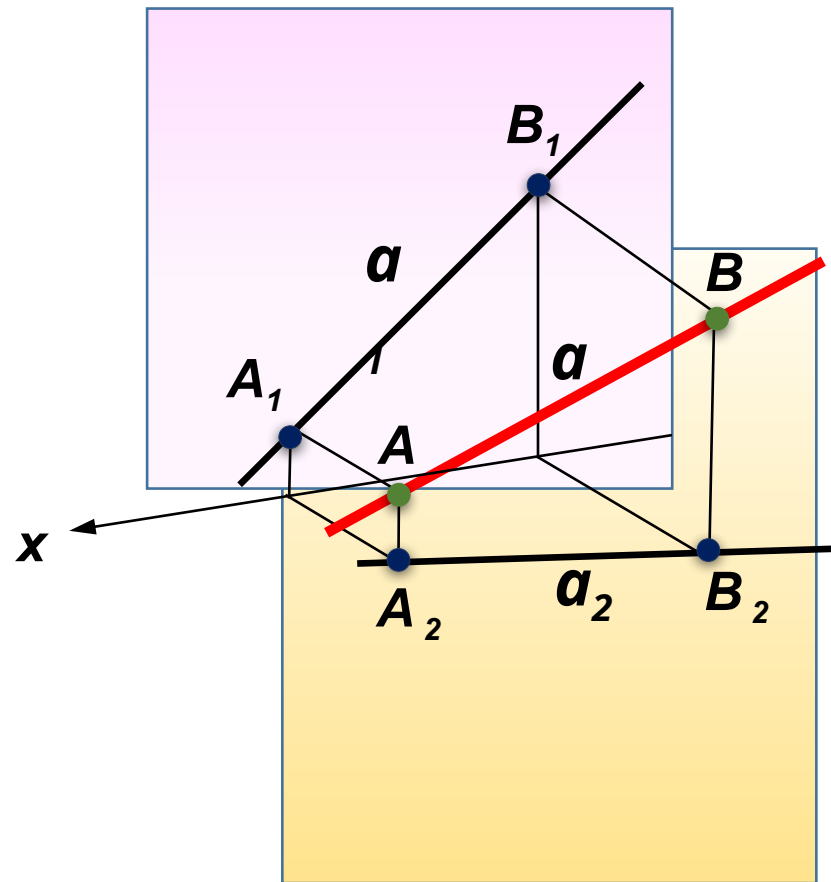
Если прямая параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую прямую называют **прямой частного положения**.



Подробнее все эти прямые рассмотрим далее

Прямая общего положения

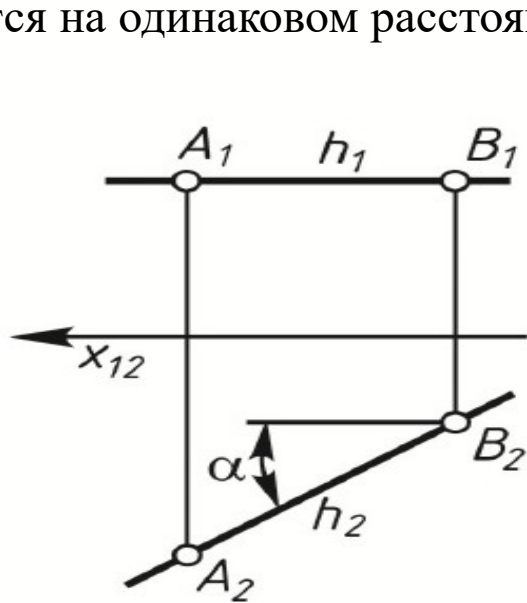
-это прямая, расположенная совершенно произвольно относительно плоскостей проекций.



Прямые уровня

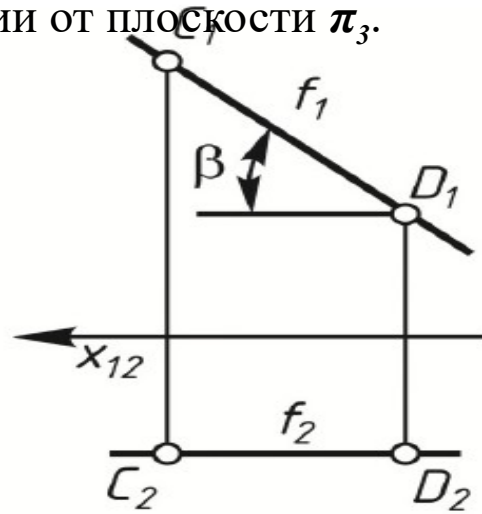
– это прямые, параллельные плоскостям проекций.

- a) Горизонтальная прямая (**Горизонталь**) – h – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_2 . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости π_2 ;
- b) Фронтальная прямая (**Фронталь**) – f – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций π_1 . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости π_1 ;
- c) Профильная прямая – p – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций π_3 . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости π_3 .



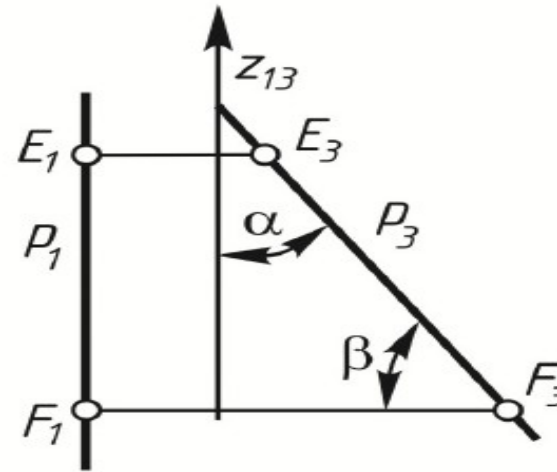
$$|AB| = |A_2B_2|$$

$$\alpha = \hat{h, \pi_1}$$



$$|CD| = |C_1D_1|$$

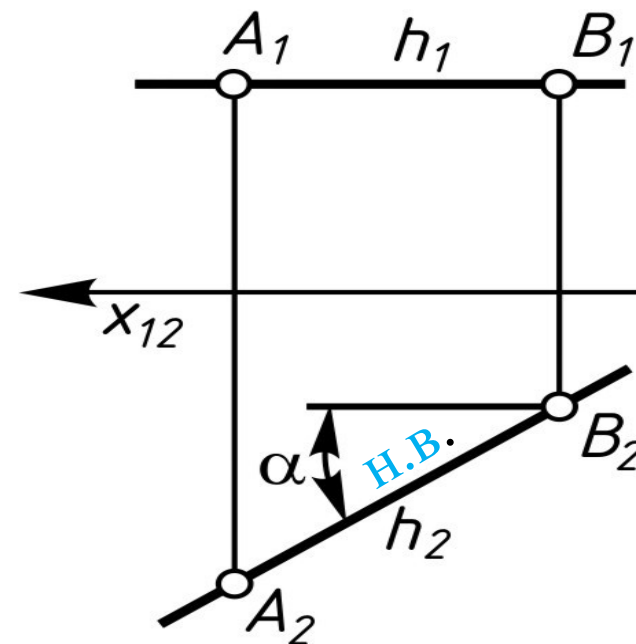
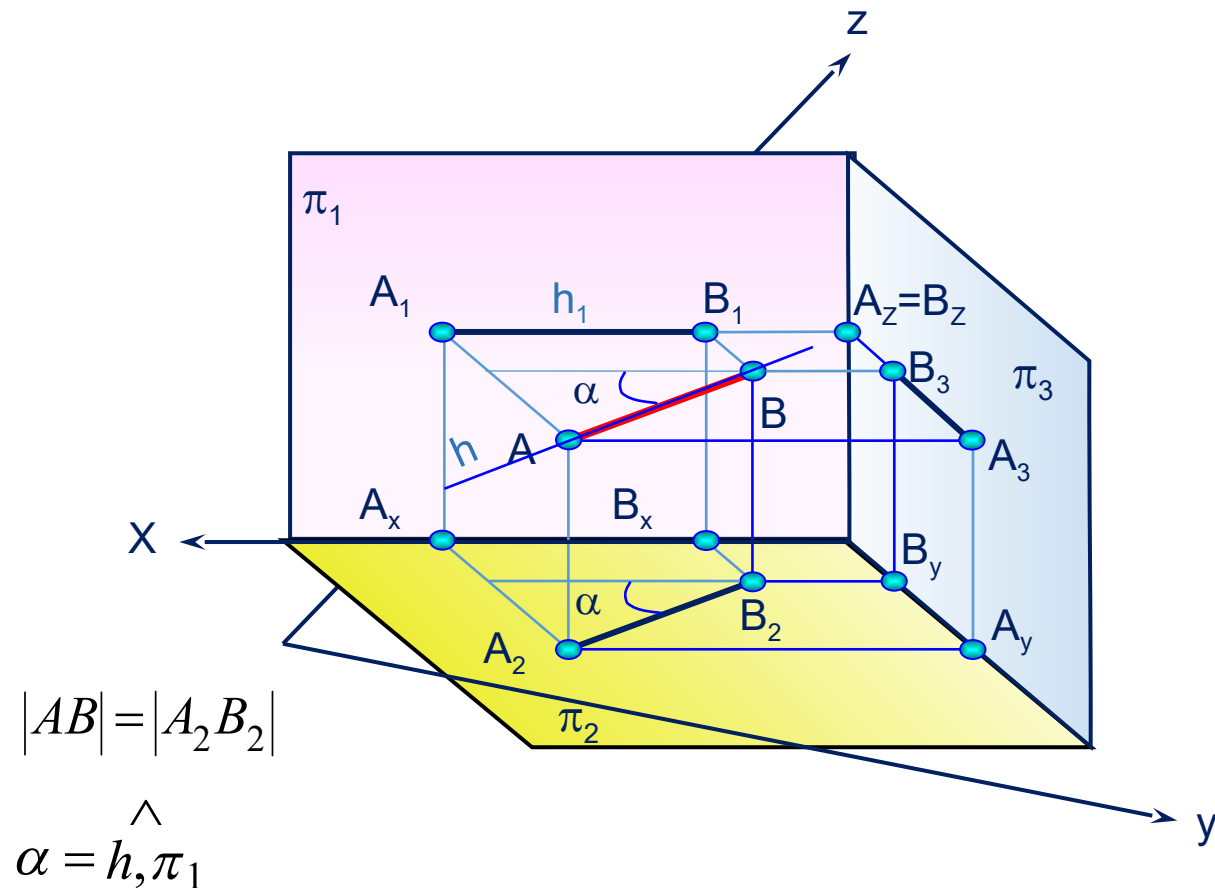
$$\beta = \hat{f, \pi_2}$$



$$|EF| = |E_3F_3|$$

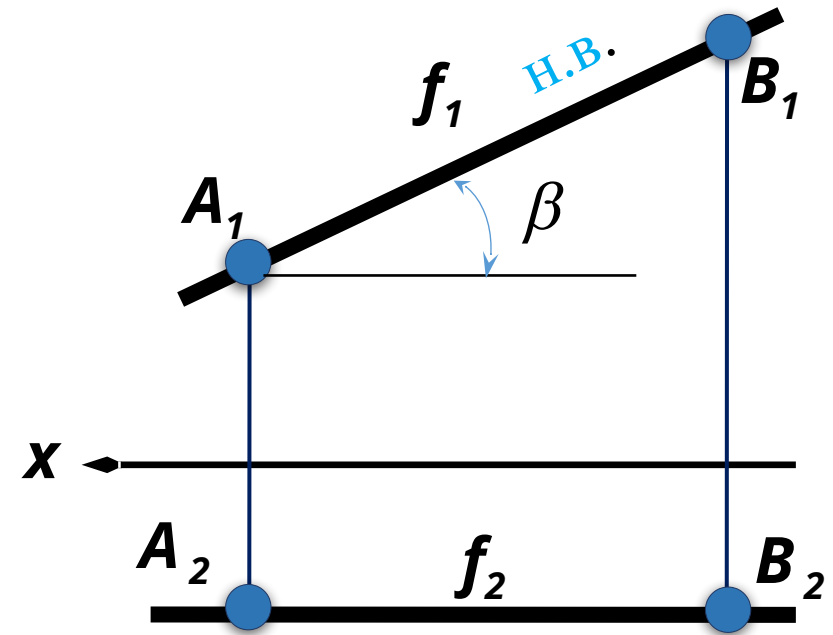
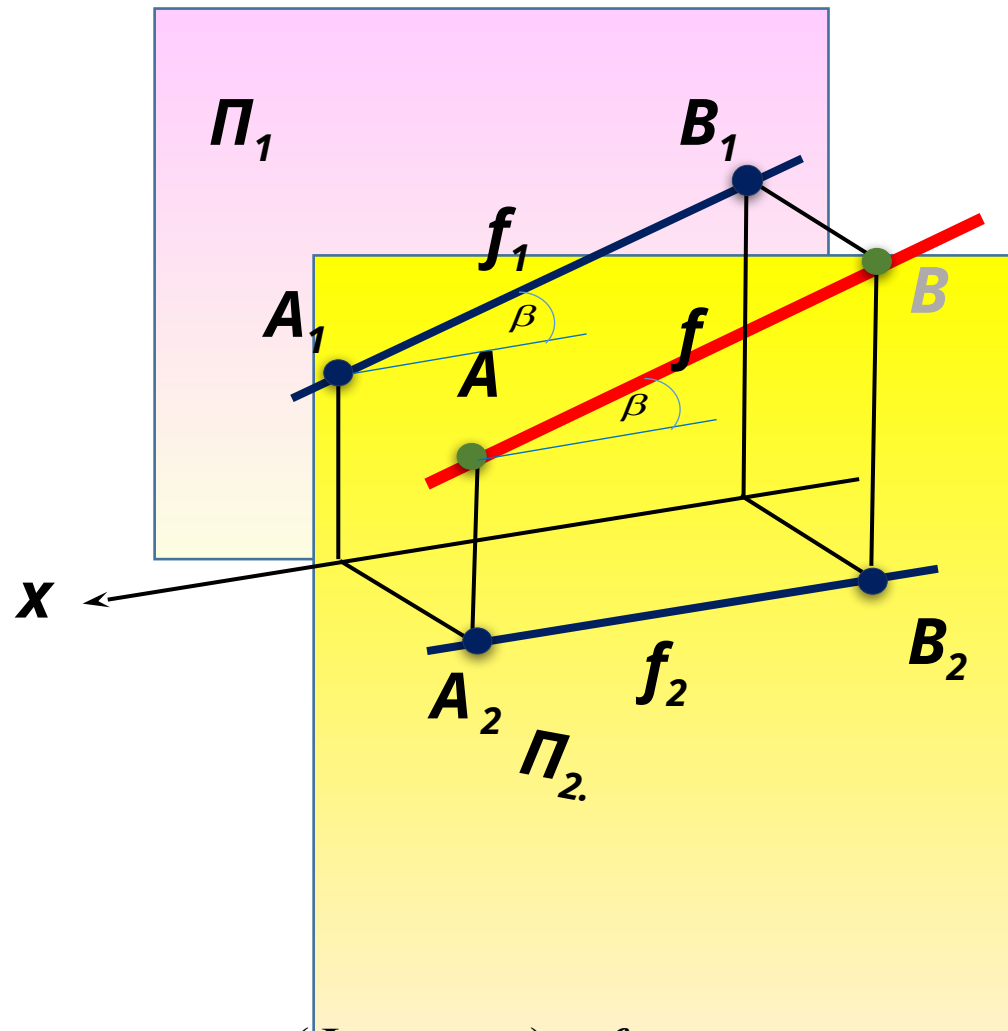
$$\alpha = \hat{p, \pi_1} \quad \beta = \hat{p, \pi_2}$$

Горизонтальная прямая (Горизонталь) – h



- а) Горизонтальная прямая (Горизонталь) – h – это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_2 . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости π_2 ;

Фронтальная прямая (Фронталь) – f

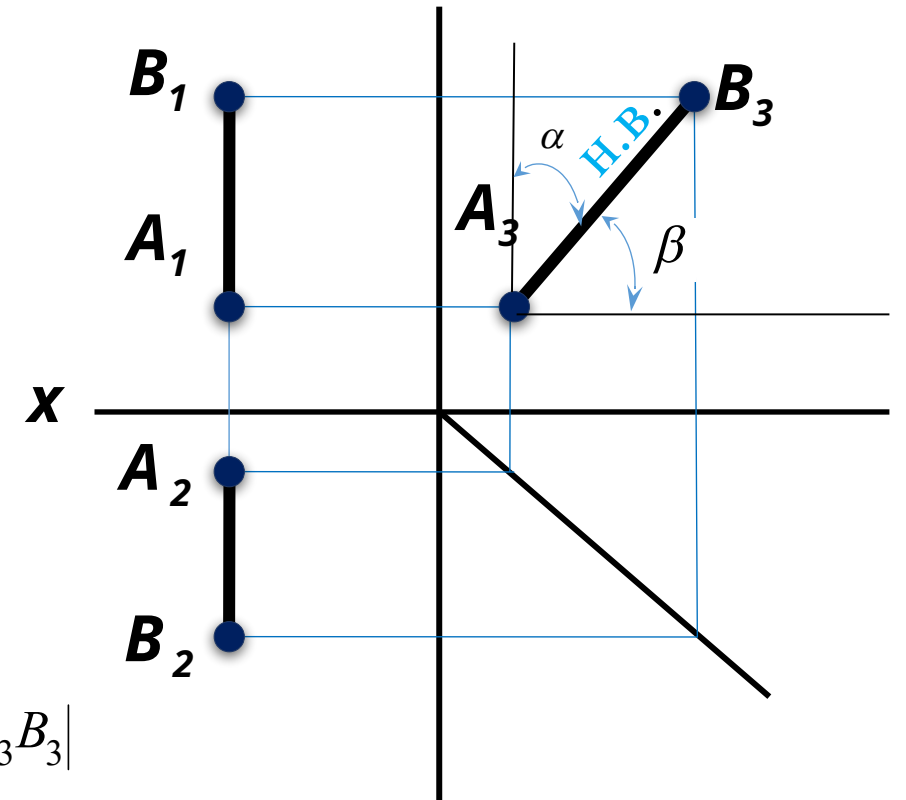
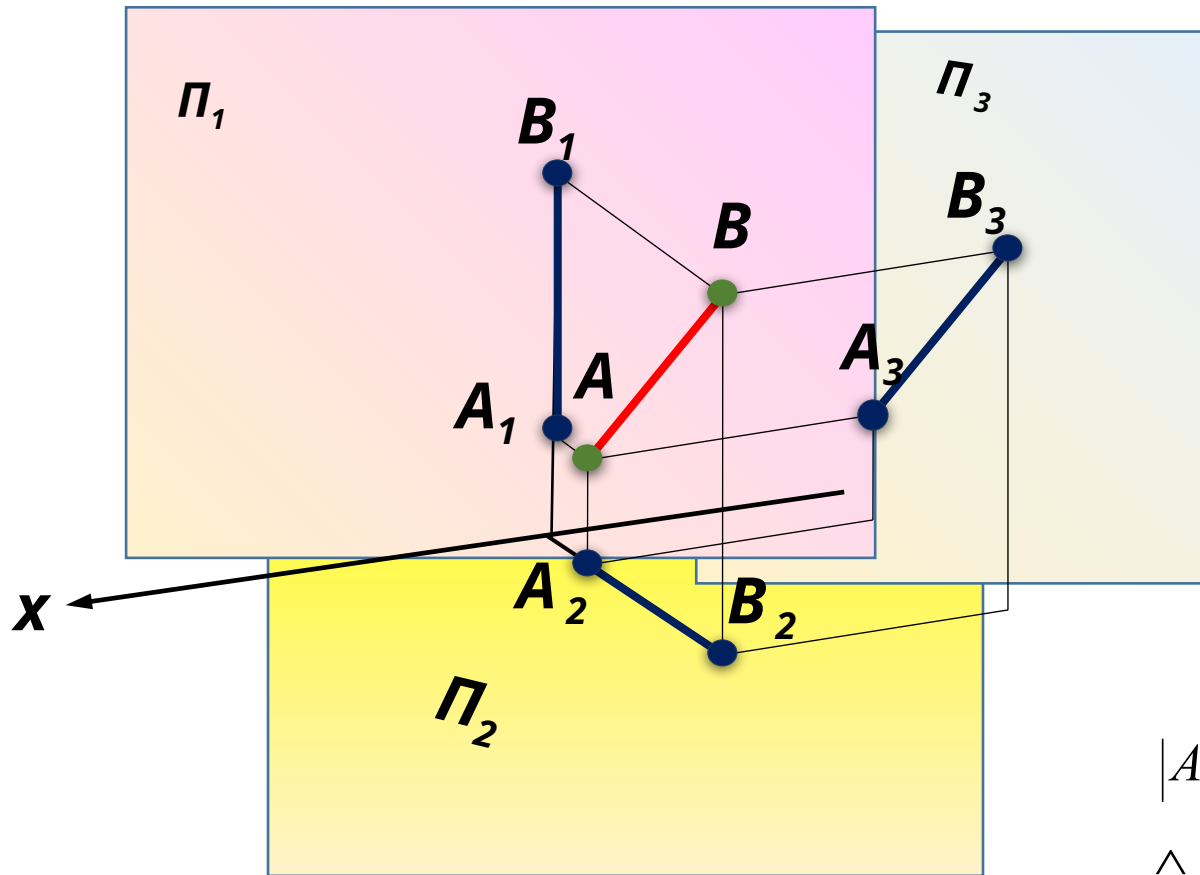


$$|AB| = |A_1B_1|$$

$$\beta = \hat{f, \pi_2}$$

а) Фронтальная прямая (Фронталь) – f – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций π_1 . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости π_1 ;

Профильная прямая – p



$$|AB| = |A_3B_3|$$

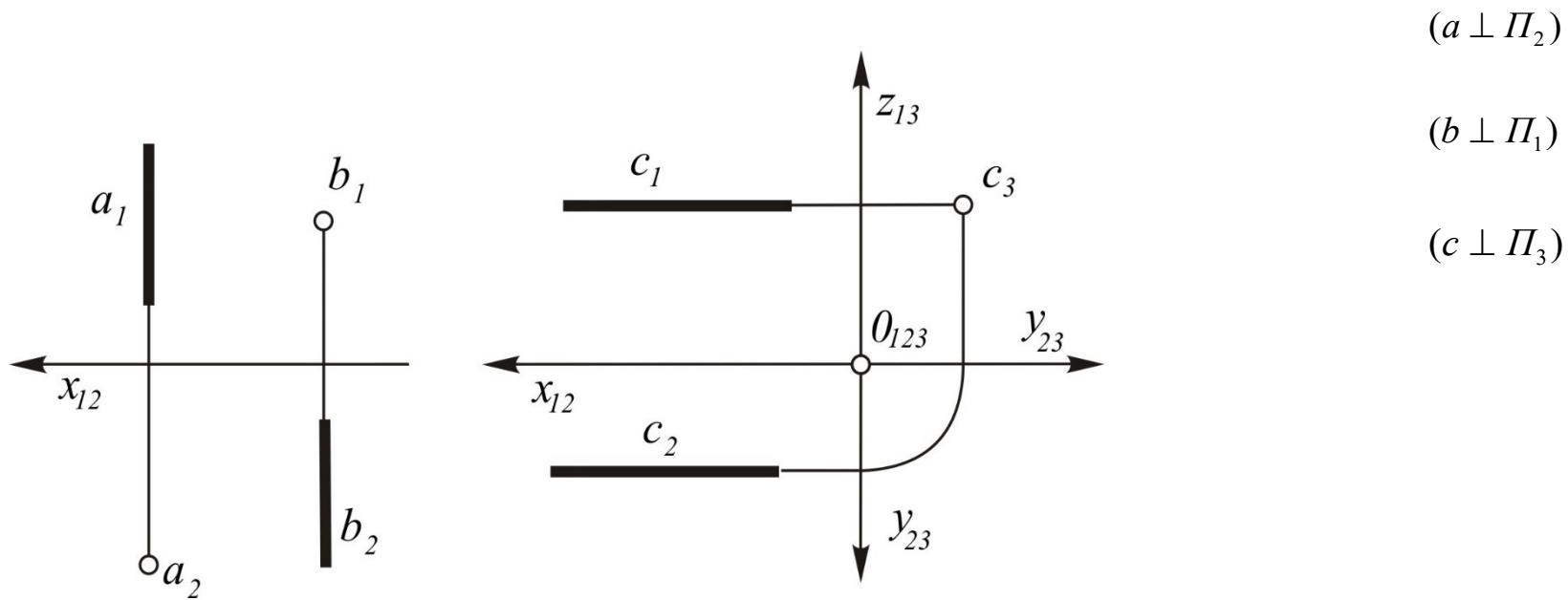
$$\alpha = \hat{p, \pi_1} \quad \beta = \hat{p, \pi_2}$$

Профильная прямая – p – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций π_3 . Все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости π_3 .

Проецирующие прямые

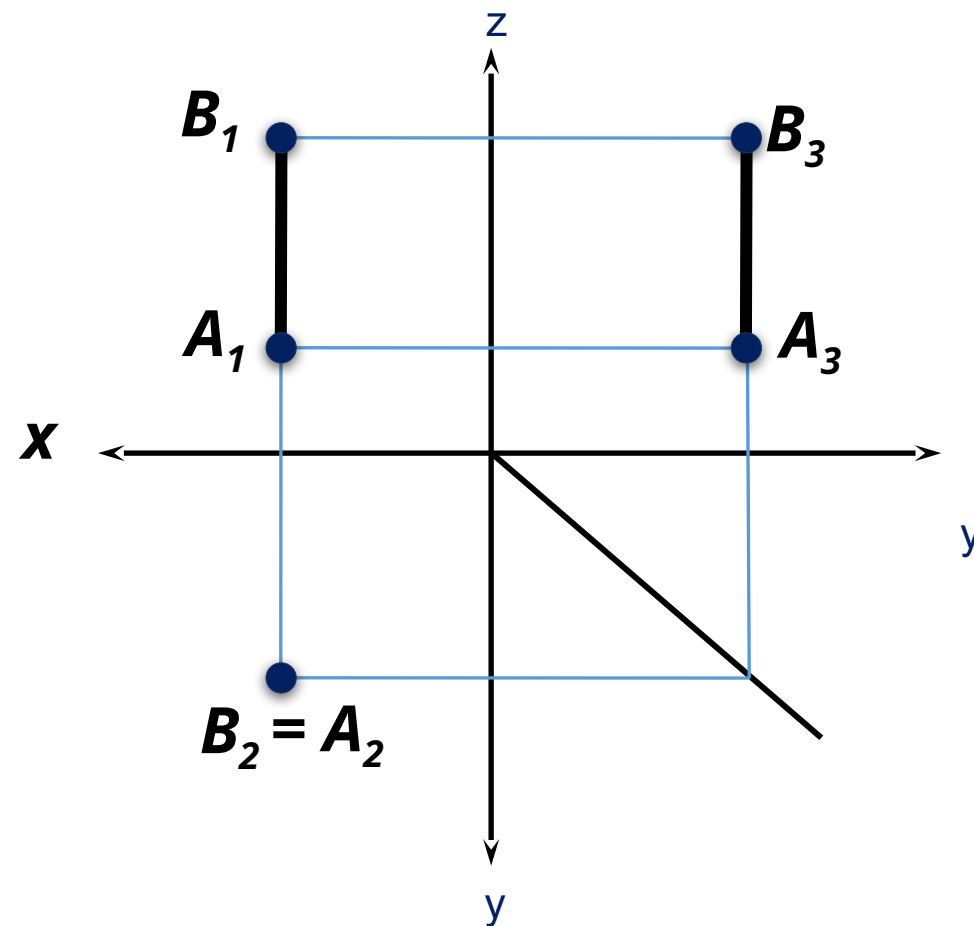
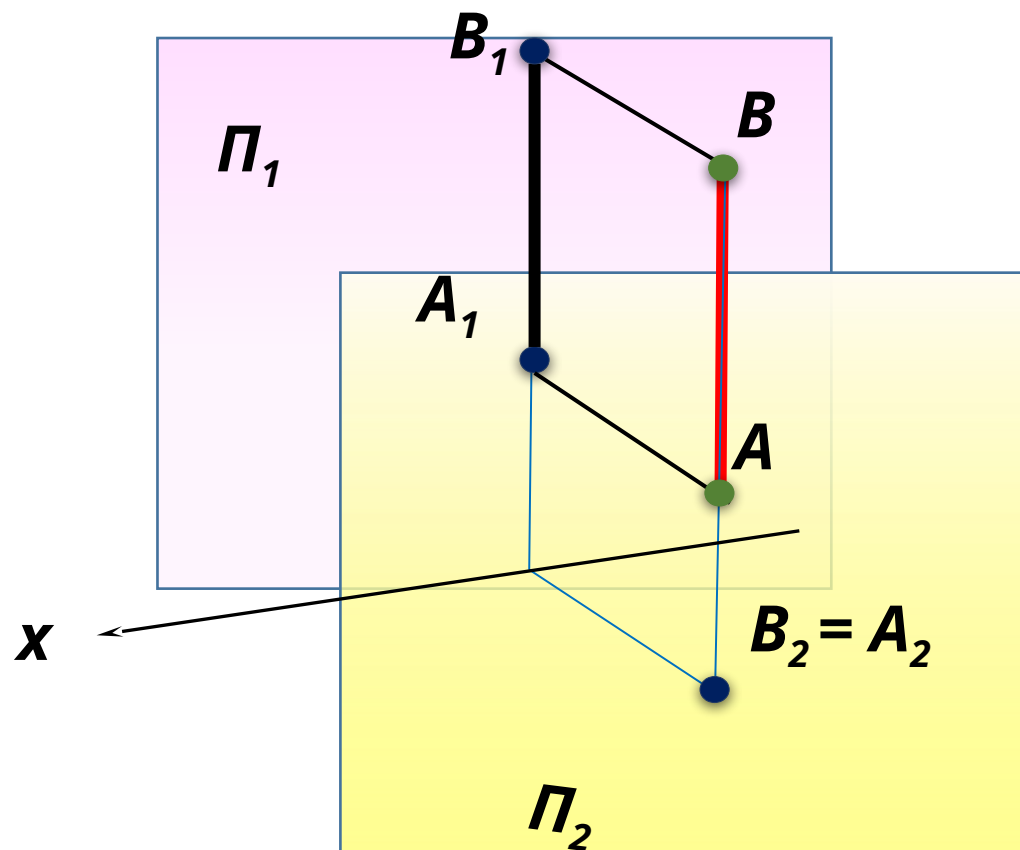
– это прямые, перпендикулярные плоскостям проекций.

- Фронтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций π_1 . Фронтальная проекция прямой является точкой.
- Горизонтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций π_2 . Горизонтальная проекция прямой является точкой.
- Профильно проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций π_3 . Профильная проекция прямой является точкой.



Горизонтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций π_2 .

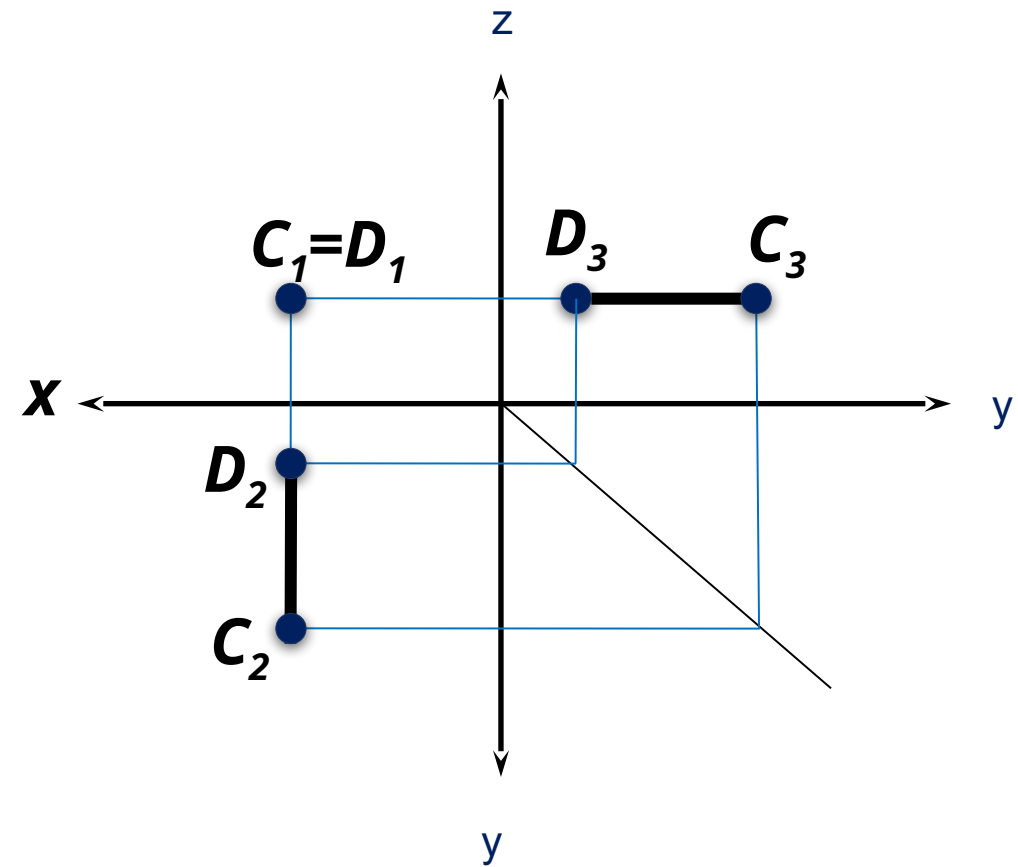
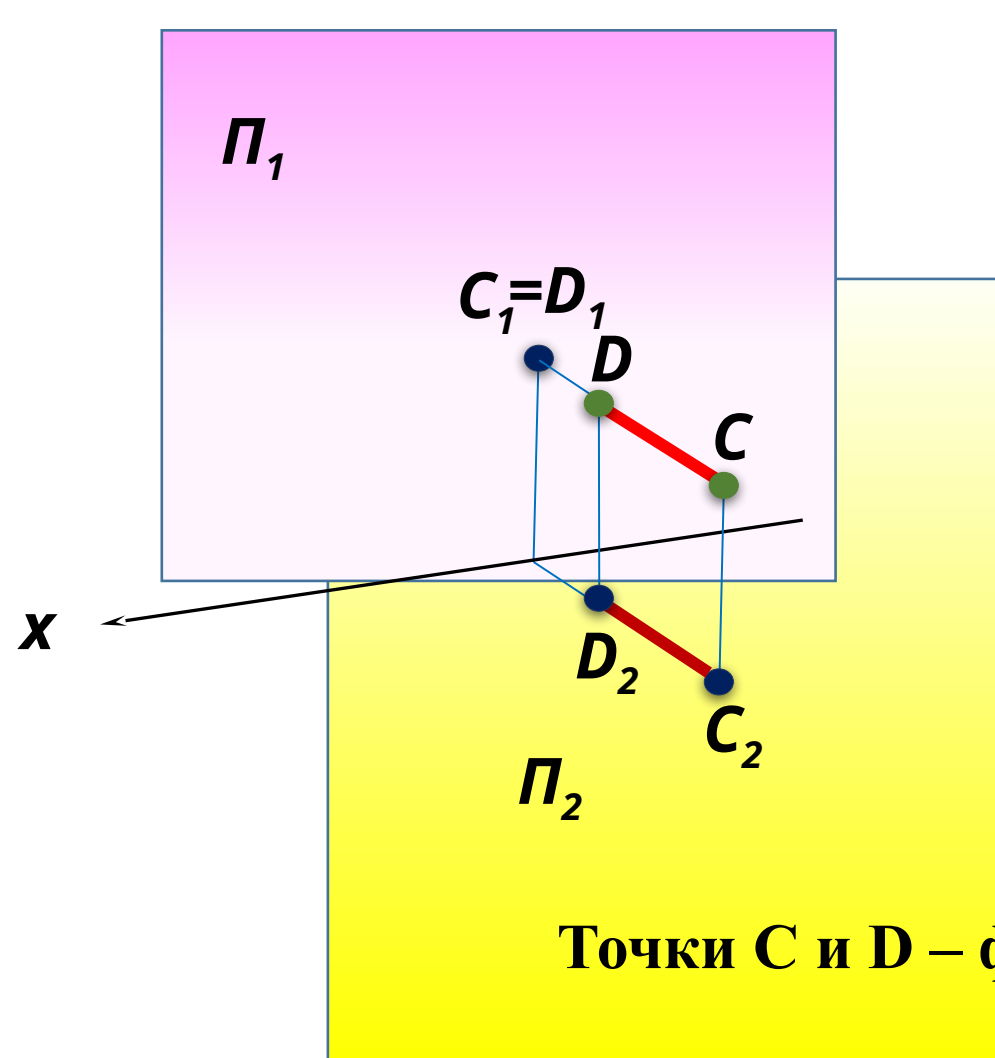
Горизонтальная проекция прямой является точкой



Точки A и B – горизонтально конкурирующие точки (расположены на одной горизонтально-проецирующей прямой)

Конкурирующими точками называются такие **точки** пространства, у которых совпадают какие-либо две одноименные проекции

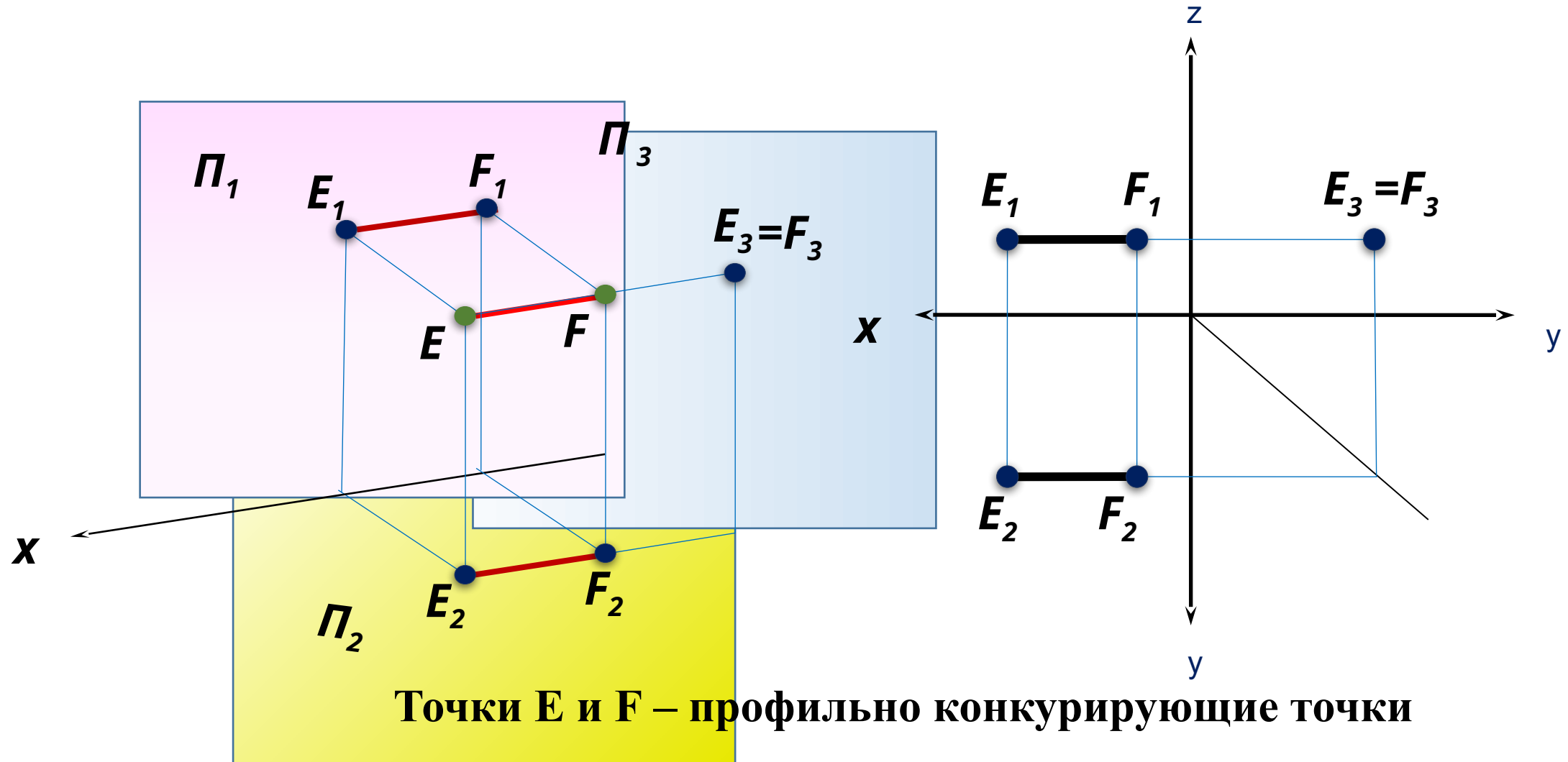
Фронтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций π_1 . Фронтальная проекция прямой является точкой.



Точки C и D – фронтально конкурирующие точки

Профильно проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций π_3 .

Профильная проекция прямой является точкой.

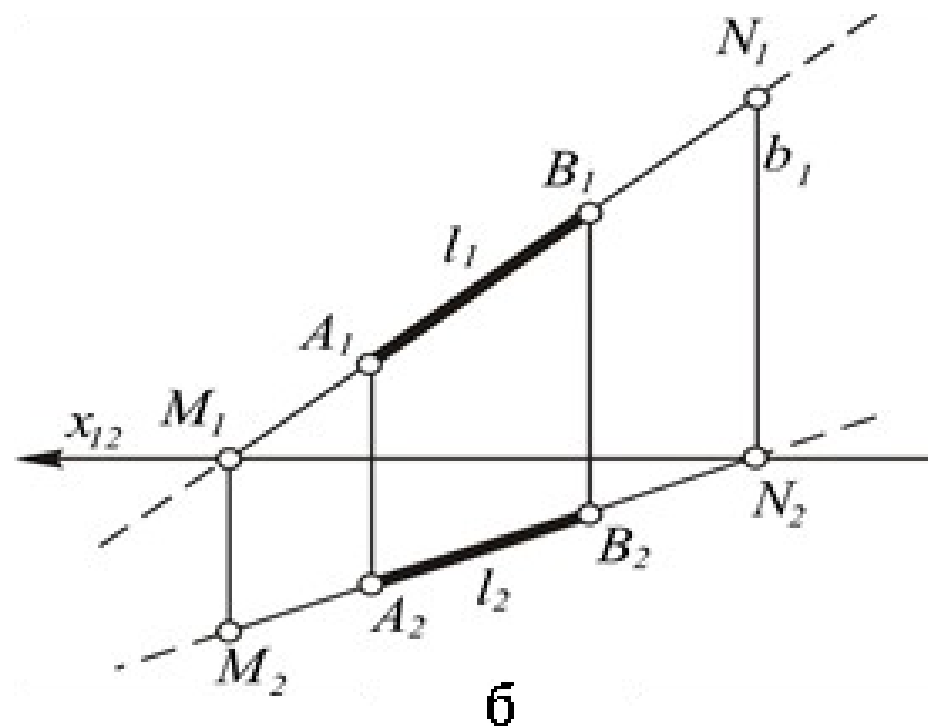
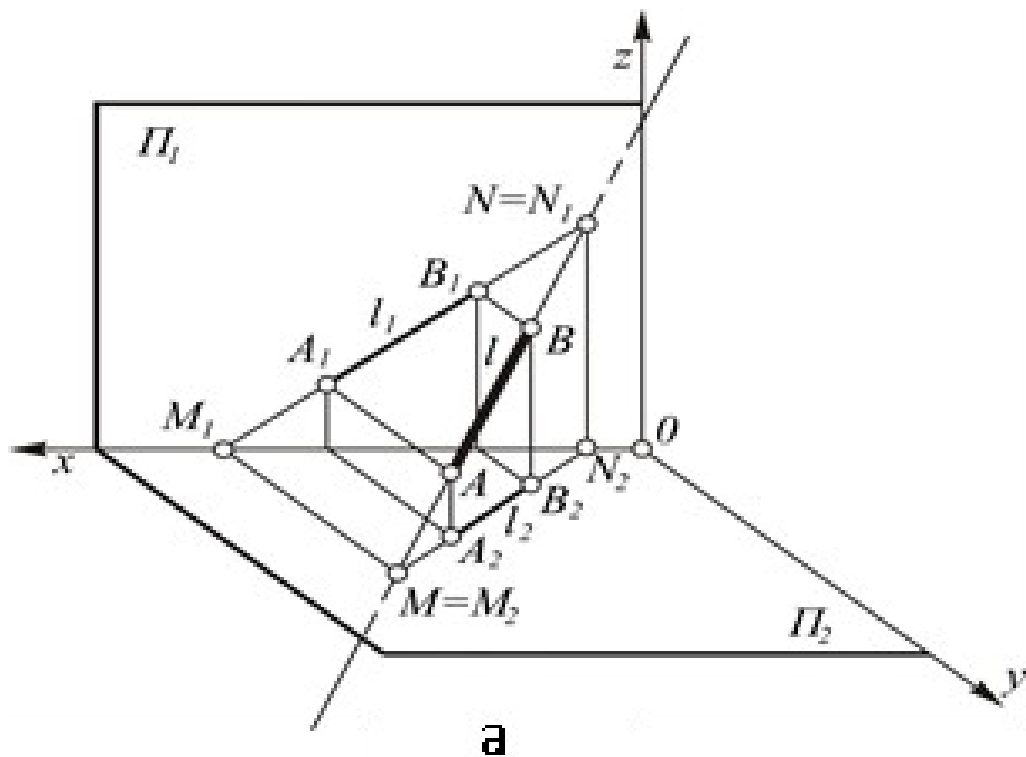


Следы прямой

Точка пересечения прямой с какой-либо плоскостью проекций называется ее следом на этой плоскости проекций.

Апplikата горизонтального следа $M = l \cap \Pi_2$ прямой a равна нулю, поэтому его фронтальная проекция M_1 принадлежит оси x_{12} . Аналогично, фронтальный след $N = l \cap \Pi_1$ имеет ординату, равную нулю, следовательно, его горизонтальная проекция N_2 принадлежит оси x_{12} .

Для построения горизонтального следа M прямой l необходимо продолжить ее фронтальную проекцию до пересечения с осью x_{12} и в этой точке восставить к оси перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой. Для построения фронтального следа N прямой l нужно из точки пересечения горизонтальной проекции ее с осью x_{12} восставить к оси перпендикуляр до пересечения с фронтальной проекцией прямой.

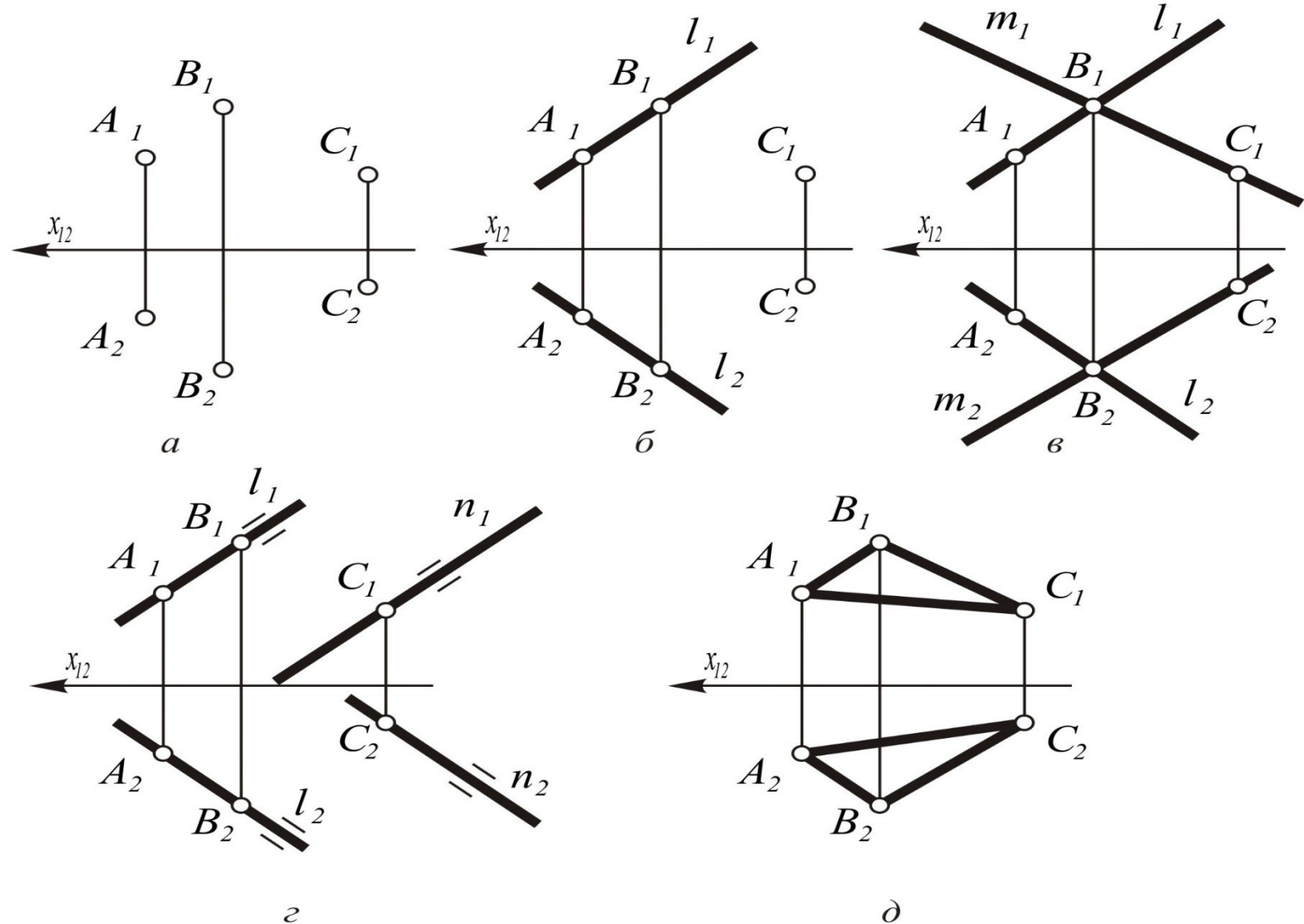


СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Положение плоскости в пространстве **определяется тремя ее точками, не лежащими на одной прямой**

Следовательно, на эюре плоскость можно задать с помощью:

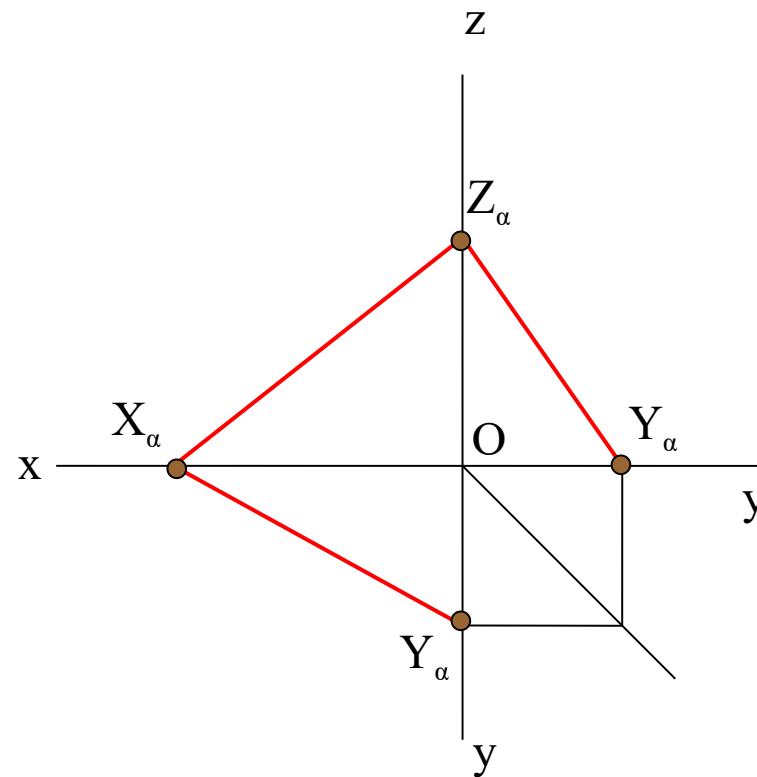
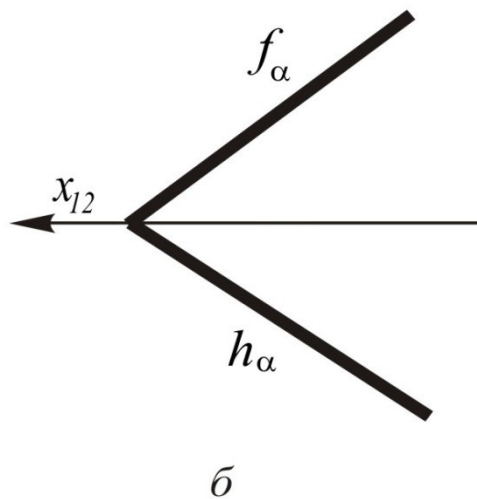
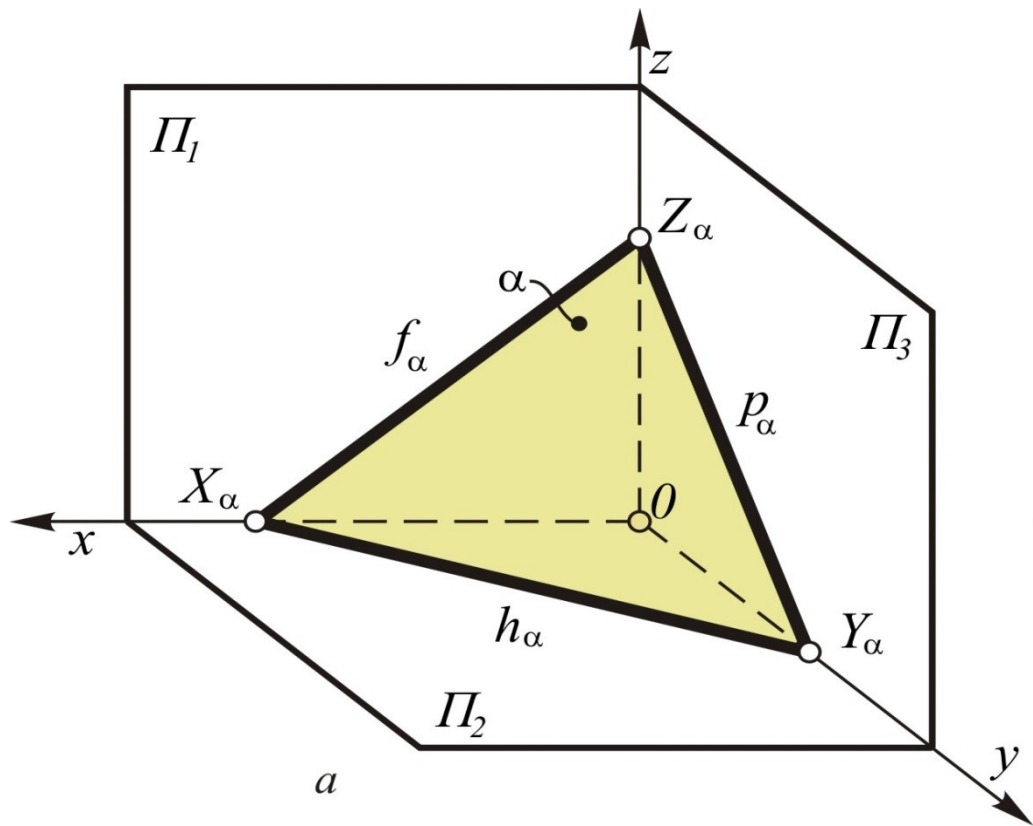
- трех точек, не лежащих на одной прямой,
- прямой и точки вне этой прямой,
- двух параллельных прямых,
- двух пересекающихся прямых,
- любой плоской фигуры



Плоскость может быть задана также следами.

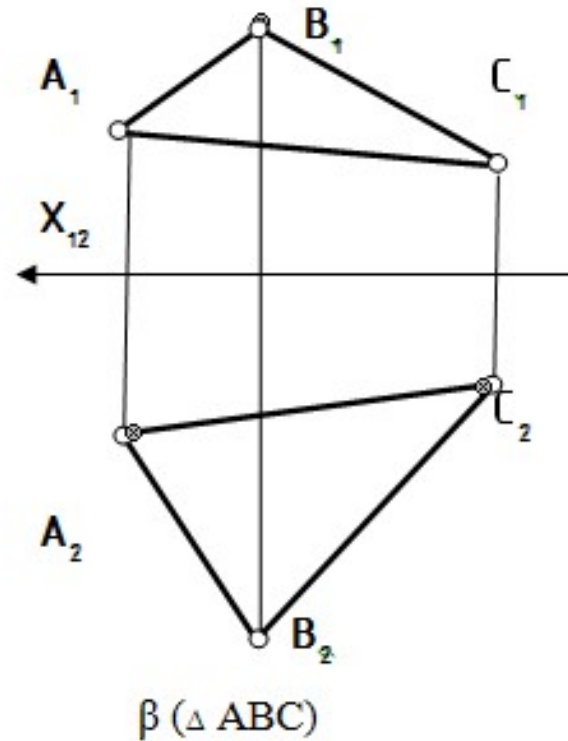
Следами плоскости называются линии пересечения плоскости с плоскостями проекций.

В общем случае плоскость имеет три следа: горизонтальный h_α , фронтальный f_α , профильный p_α . Следы плоскости пересекаются попарно на осях в точках $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$, которые называются точками схода следов плоскости. Треугольник, образованный следами плоскости, называется треугольником следов.



По расположению в пространстве относительно плоскостей проекций плоскости подразделяются следующим образом:

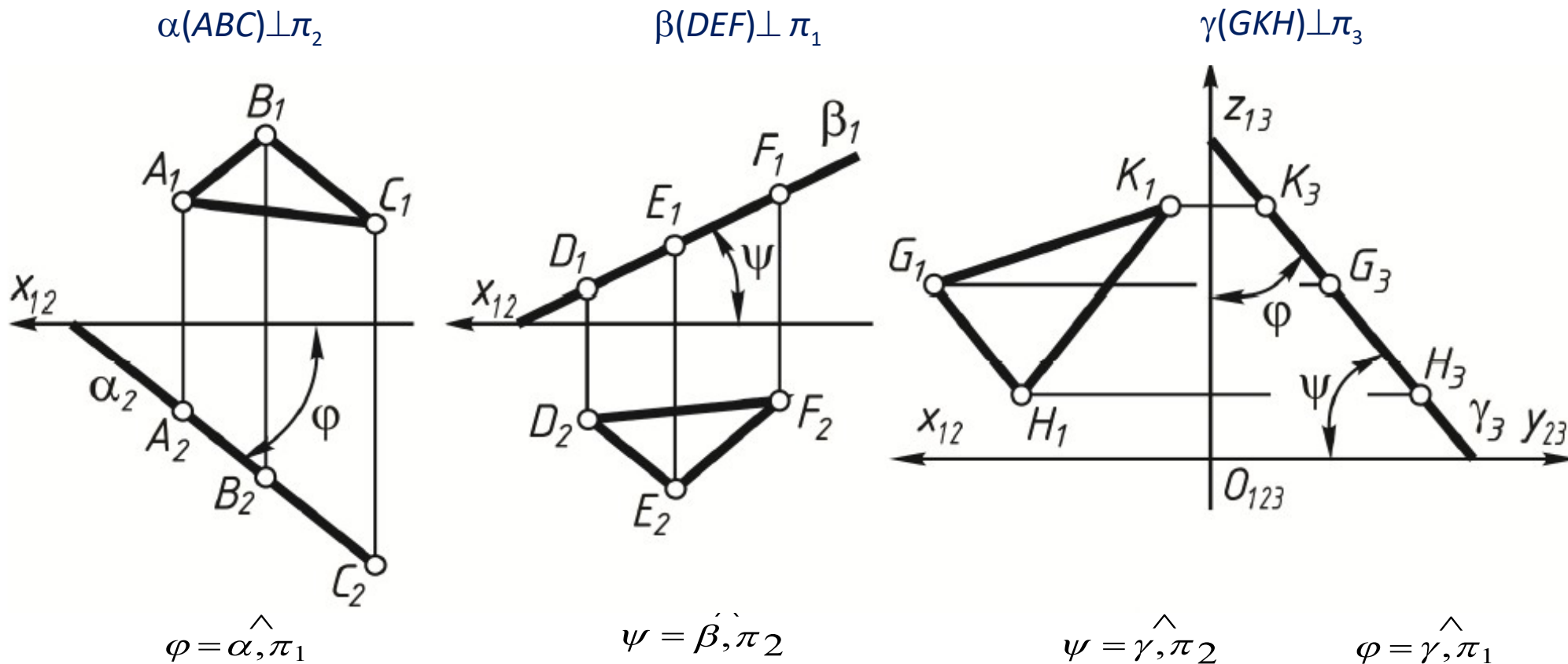
- **Плоскости общего положения** – это плоскость, которая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций



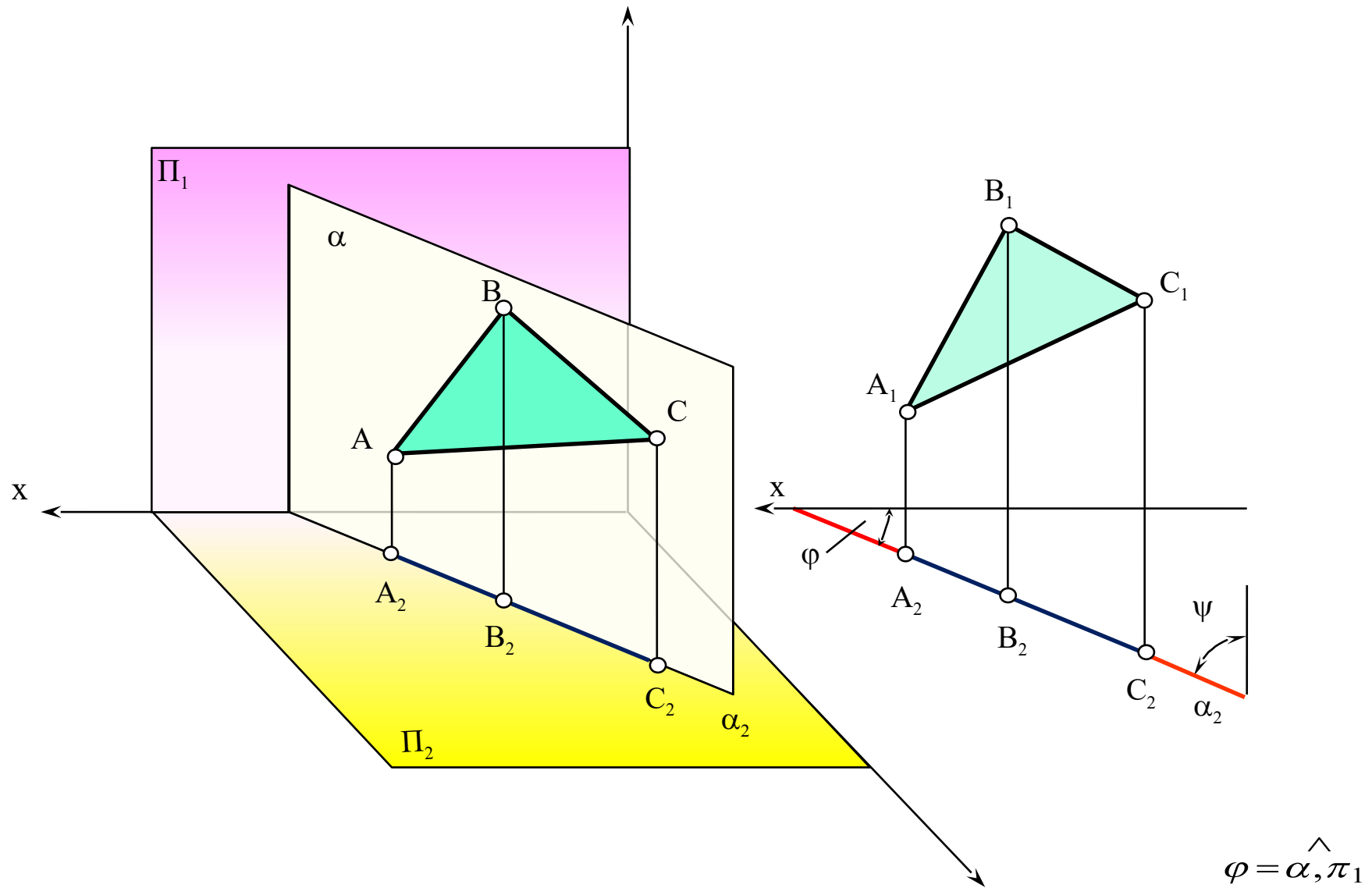
- **Плоскости частного положения** – это плоскости, параллельные или перпендикулярные какой-либо плоскости проекций. К плоскостям частного положения относятся: плоскости уровня и проецирующие плоскости.

Проецирующие плоскости

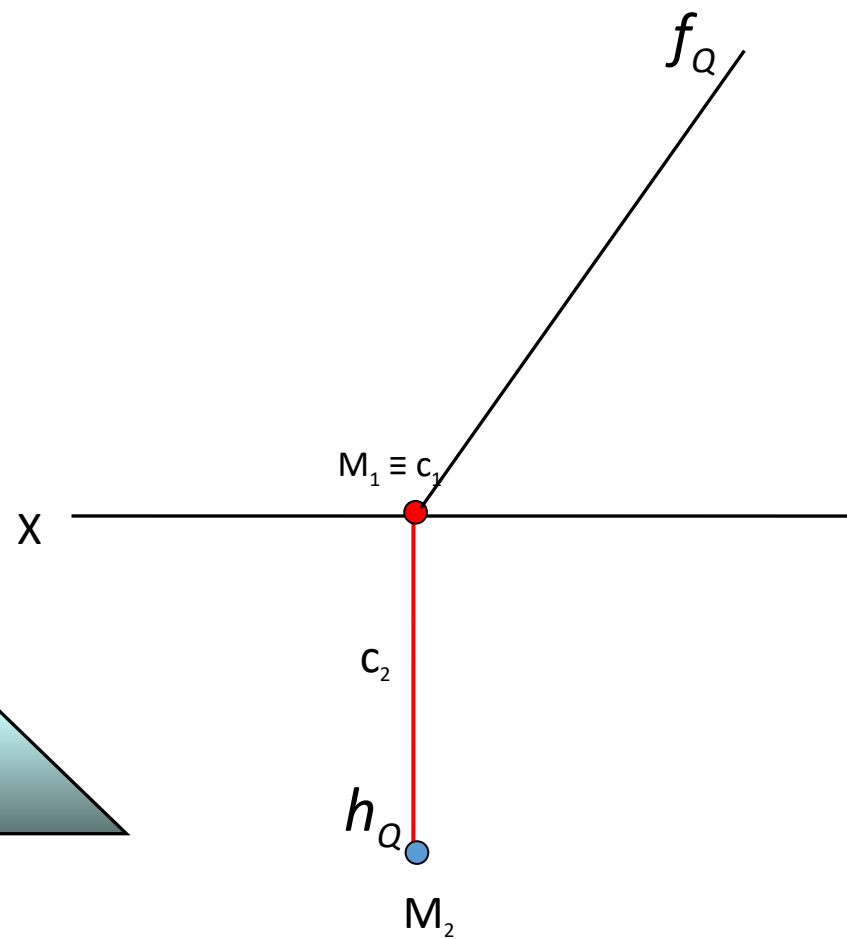
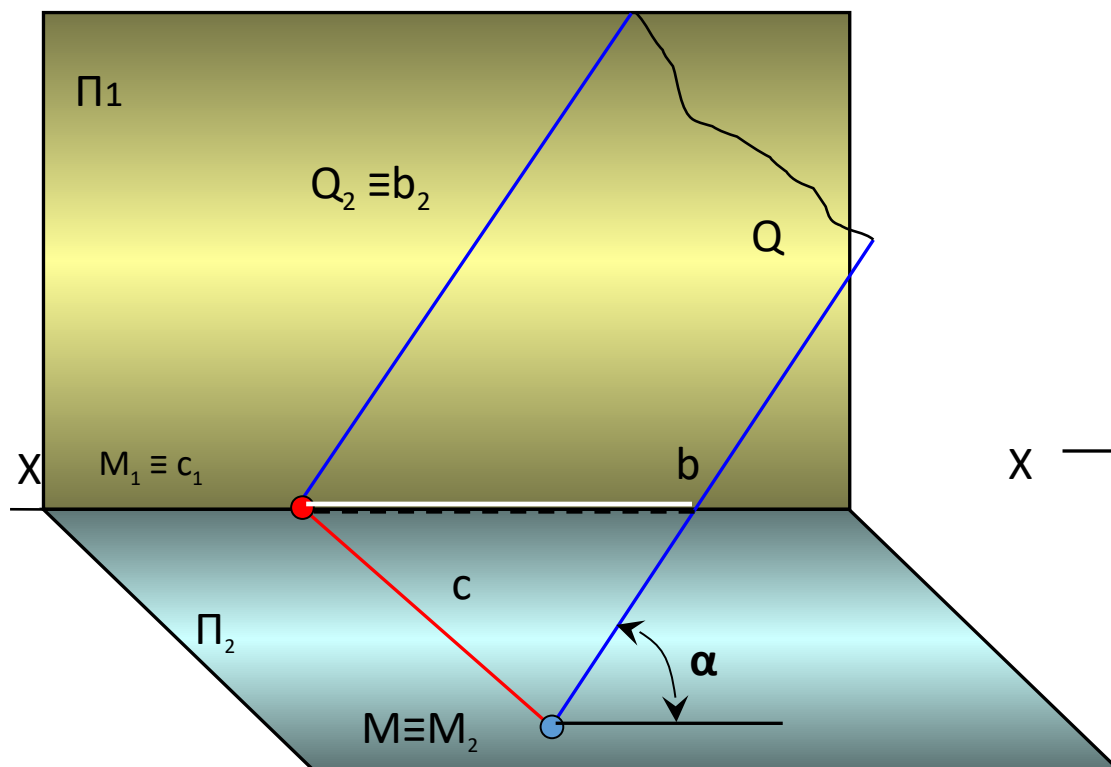
- это плоскости, перпендикулярные к одной из плоскостей проекций



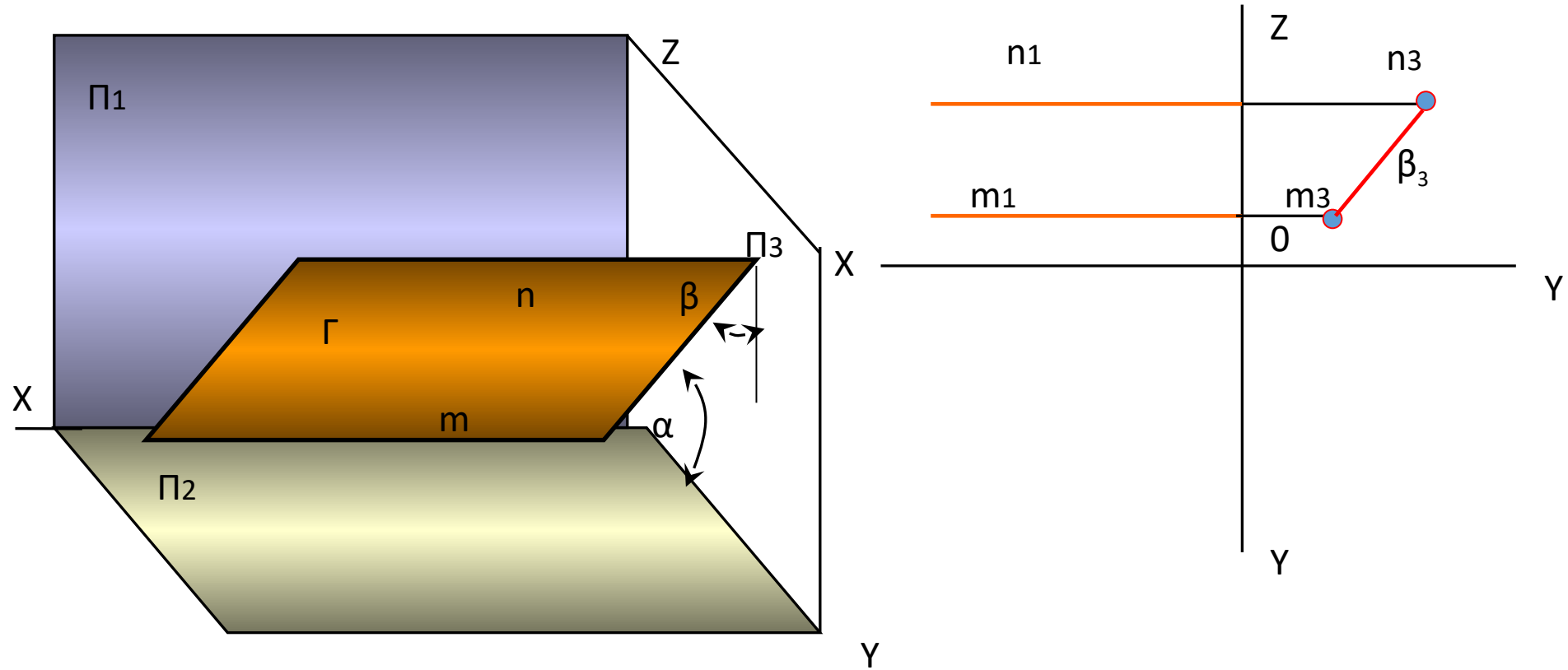
- **Горизонтально проецирующая плоскость** – это плоскость перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций π_2 . Горизонтальная проекция такой плоскости представляет собой прямую, совпадающую с горизонтальным следом этой плоскости;
- **Фронтально проецирующая плоскость** – это плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций π_1 . Фронтальная проекция такой плоскости вырождается в прямую, совпадающую с фронтальным следом этой плоскости;
- **Профильно проецирующая плоскость** – это плоскость перпендикулярная профильной плоскости проекций π_3 . Профильная проекция такой плоскости вырождается в прямую.



Фронтально-проецирующая плоскость-

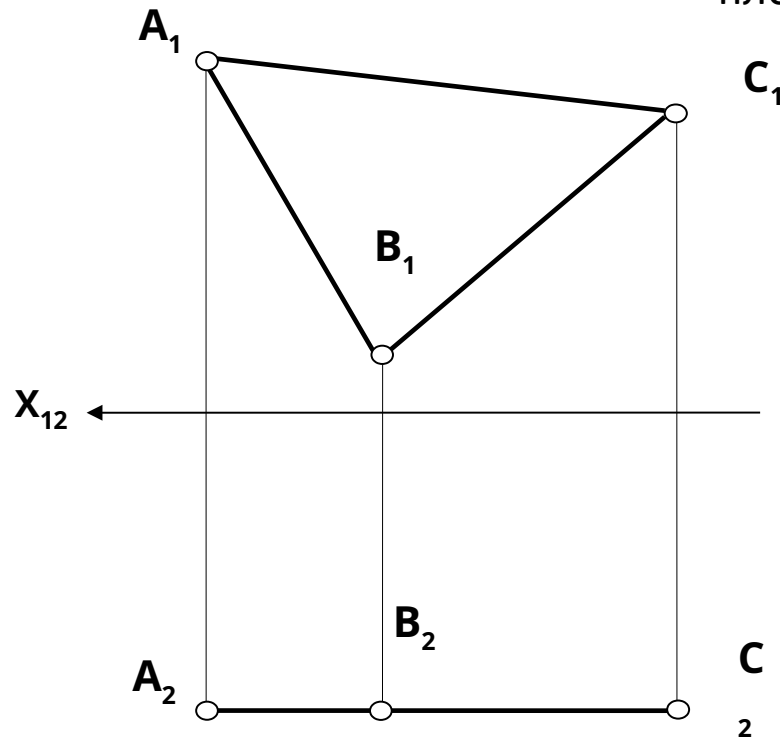


Профильно-проецирующая плоскость-

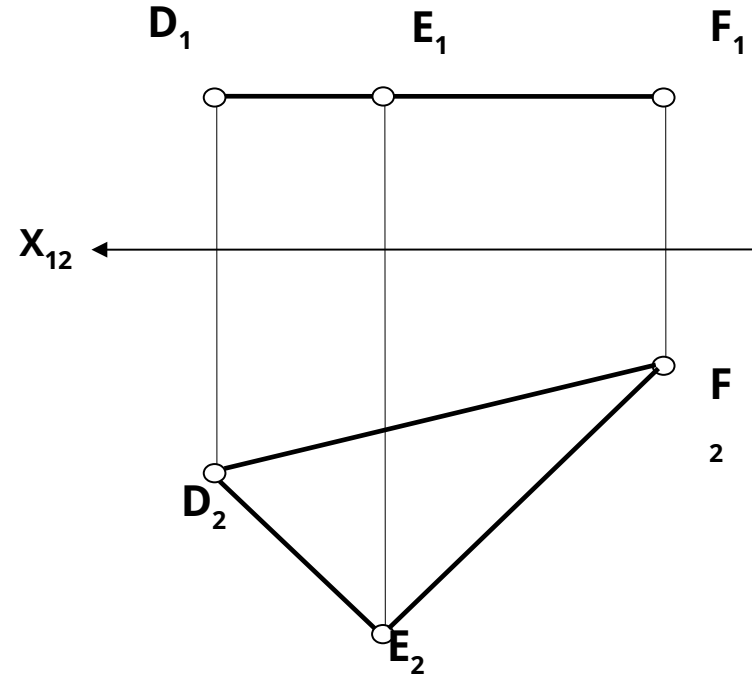


Плоскости уровня

это плоскости, перпендикулярные к двум плоскостям проекций, и, следовательно, параллельные третьей плоскости проекций.



$\alpha (\triangle ABC) \parallel \pi_1$



$\beta (\triangle DEF) \parallel \pi_2$

Называются такие плоскости так же, как и плоскость проекций, параллельно которой они расположены:

- **Горизонтальная плоскость** – это плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_2 ;
- **Фронтальная плоскость** – это плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций π_1 ;
- **Профильная плоскость** – это плоскость параллельная профильной плоскости проекций π_3 .

