СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Курс лекций по дисциплине «Начертательная геометрия»

лектор

Каражанова Дарига Дюсеновна

Кандидат педагогических наук

ассоциированный профессор Satbayev University

Лекция 6

Основные позиционные задачи

К.п.н., ассоциированный профессор

Каражанова Дарига Дюсеновна

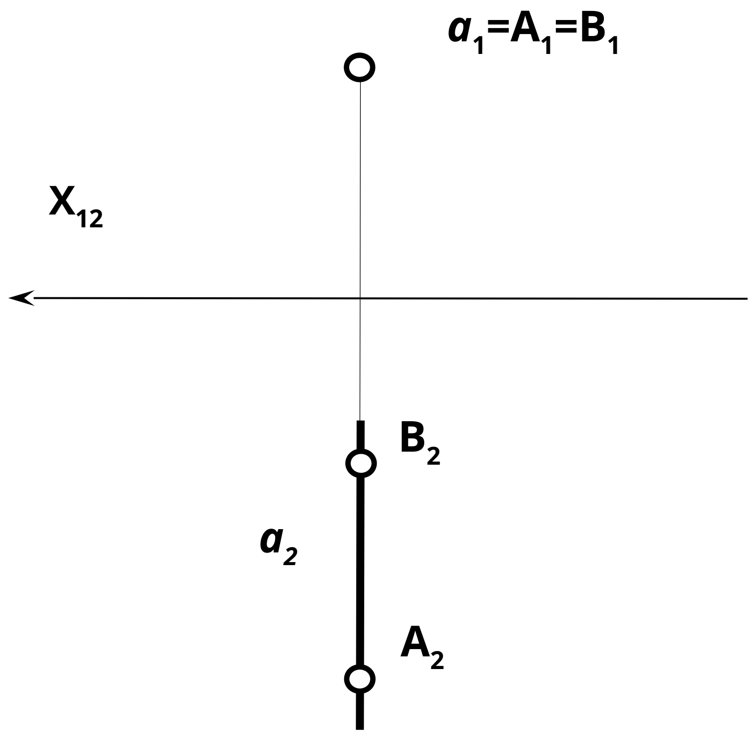
Основные позиционные задачи

Задачи, в которых определяется взаимное расположение точек, прямых и плоскостей, называются **позиционными**.

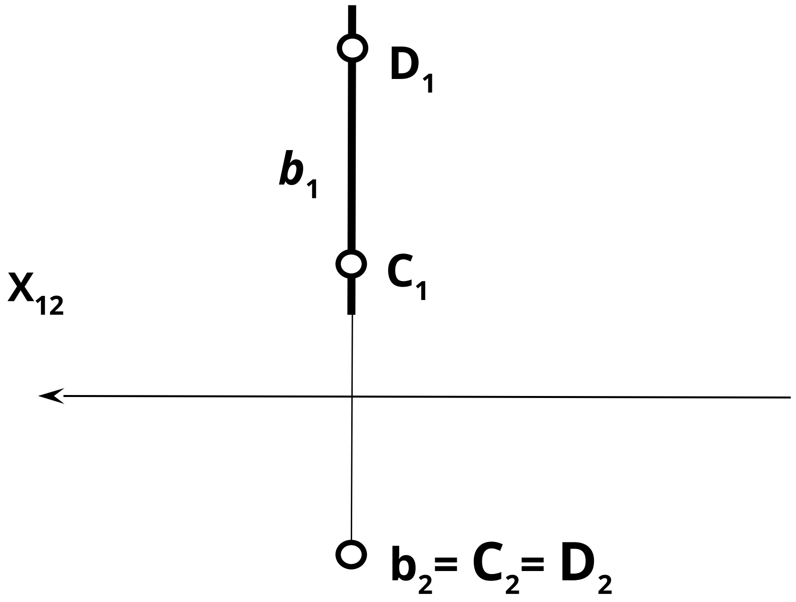
Всего определяют шесть позиционных задач:

1. Взаимное расположение точек;
2. Взаимное расположение точек и прямой;
3. Взаимное расположение двух прямых;
4. Взаимное расположение точек и плоскости;
5. Взаимное расположение прямой и плоскости;
6. Взаимное расположение плоскостей.

1. Взаимное расположение точек.



а) фронтально конкурирующие точки А и В



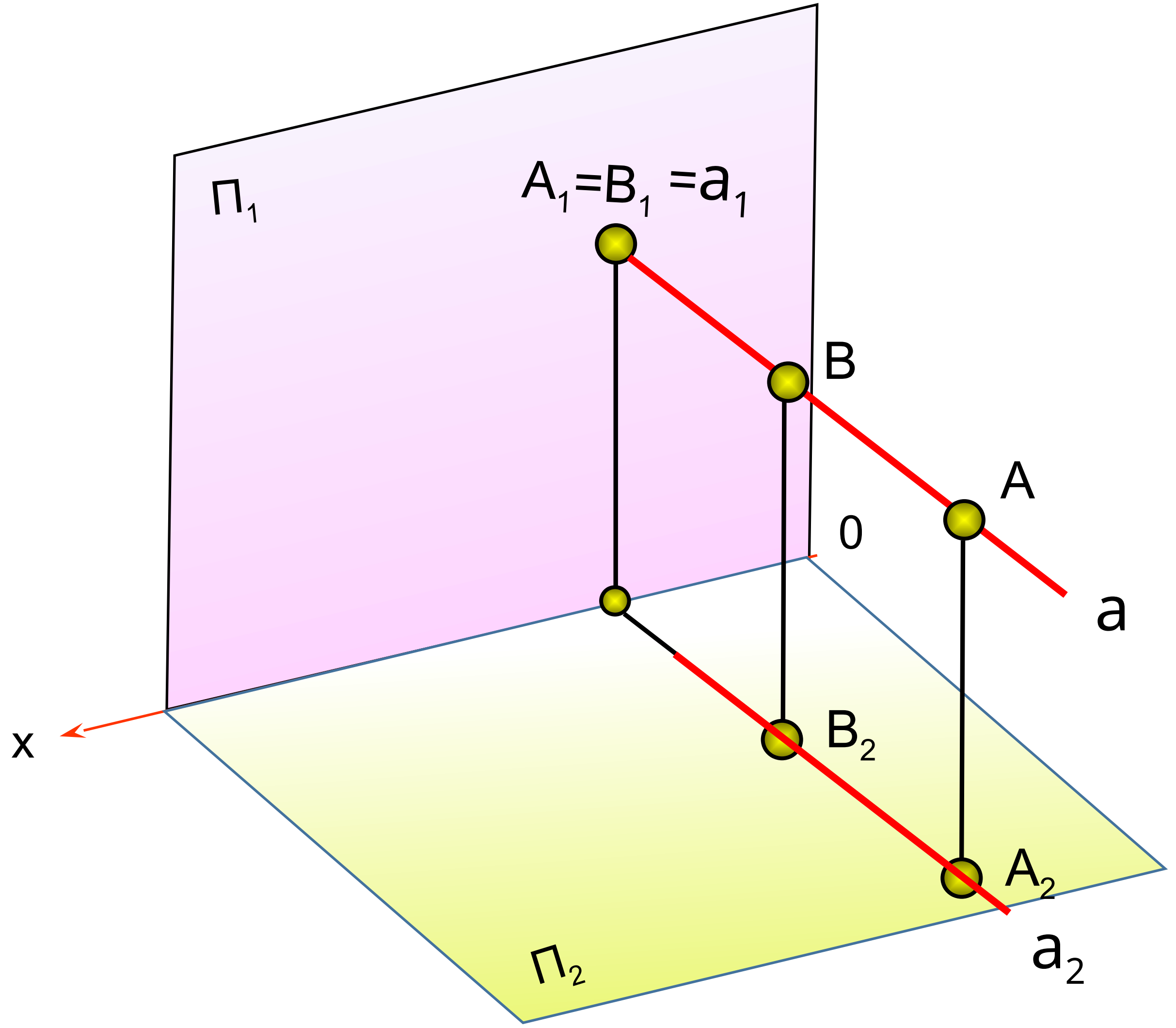
б) горизонтально конкурирующие точки С и D

В начертательной геометрии интерес представляют точки, расположенные на проецирующих прямых, так называемые **конкурирующие** точки.

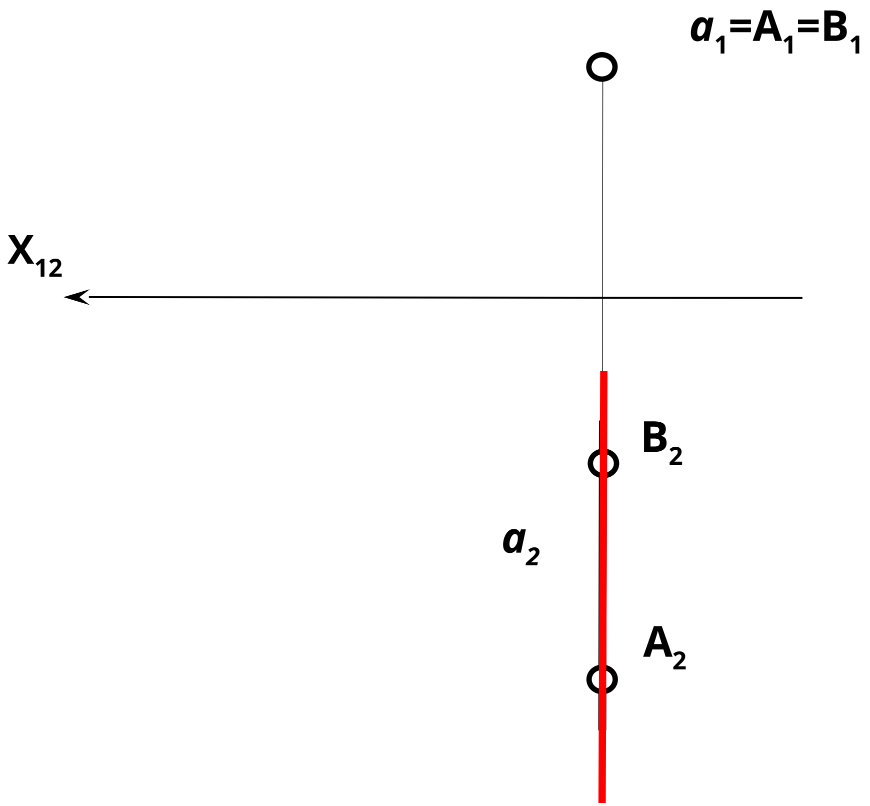
На рисунке а) показаны фронтально конкурирующие точки А и В; фронтальные проекции точек совпадают, прямая a является фронтально проецирующей (фронтальная проекция прямой вырождается в точку).

На рисунке б) показаны горизонтально конкурирующие точки С и D; горизонтальные проекции точек совпадают, прямая *b* является горизонтально проецирующей (горизонтальная проекция прямой вырождается в точку).

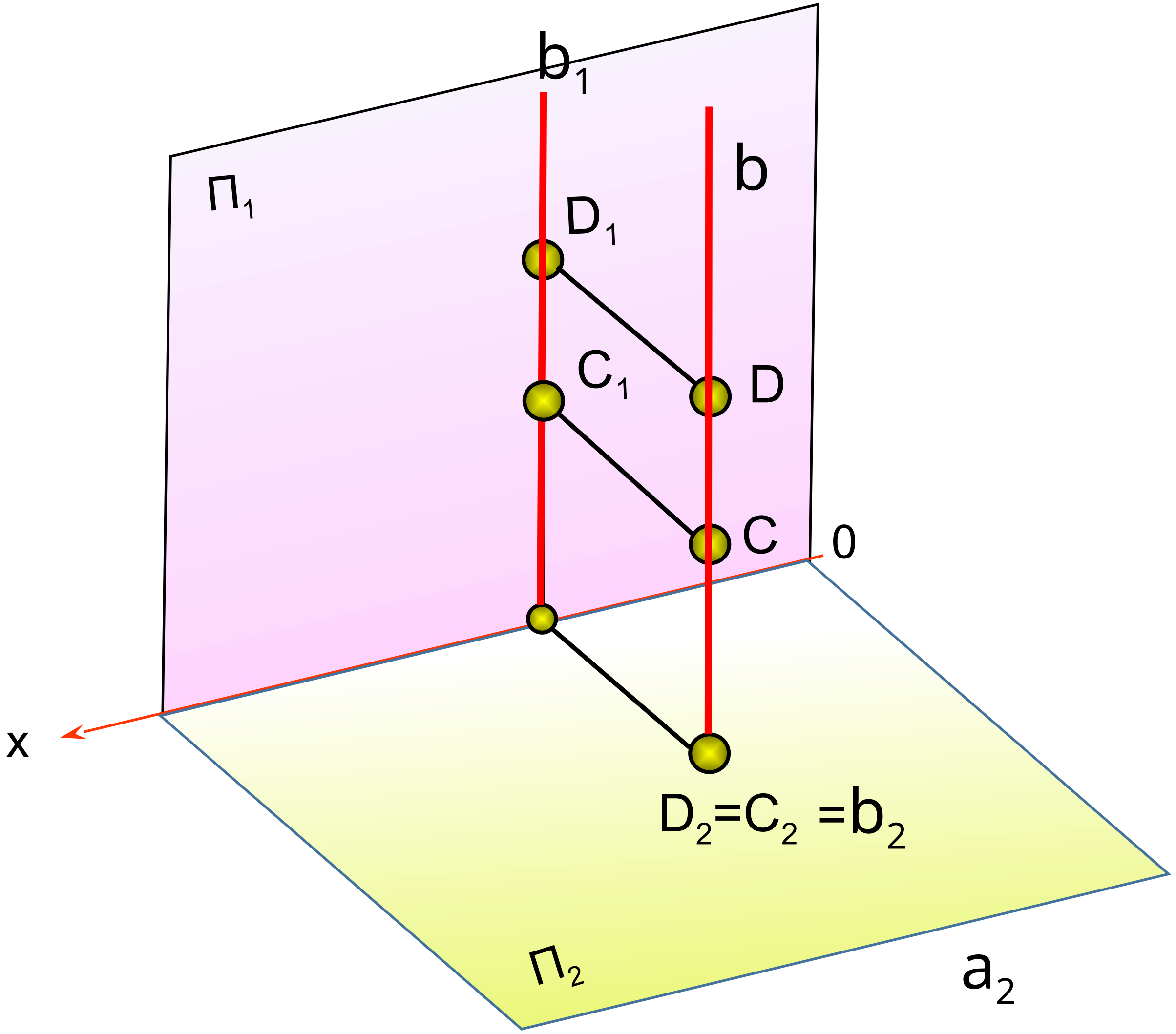
Конкурирующие точки применяют **при определении видимости** геометрических элементов на эпюре (Способ конкурирующих точек).



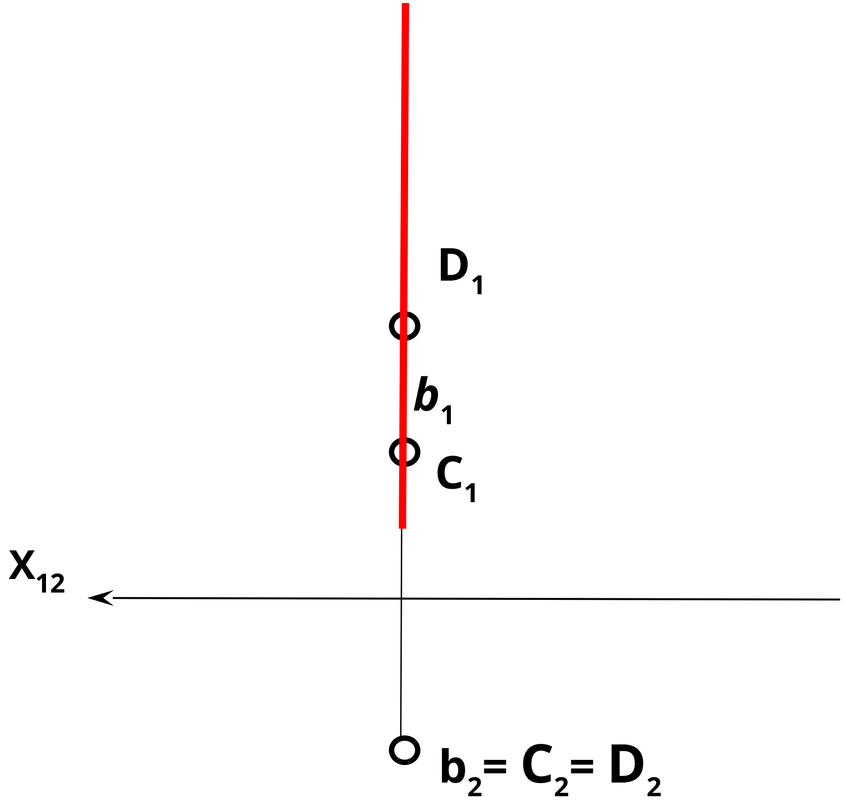
Π1
A1=B1 =a1
B
A
0
a
x
B2
A2
a2
Π2



a1=A1=B1
X12
B2
a2
A2

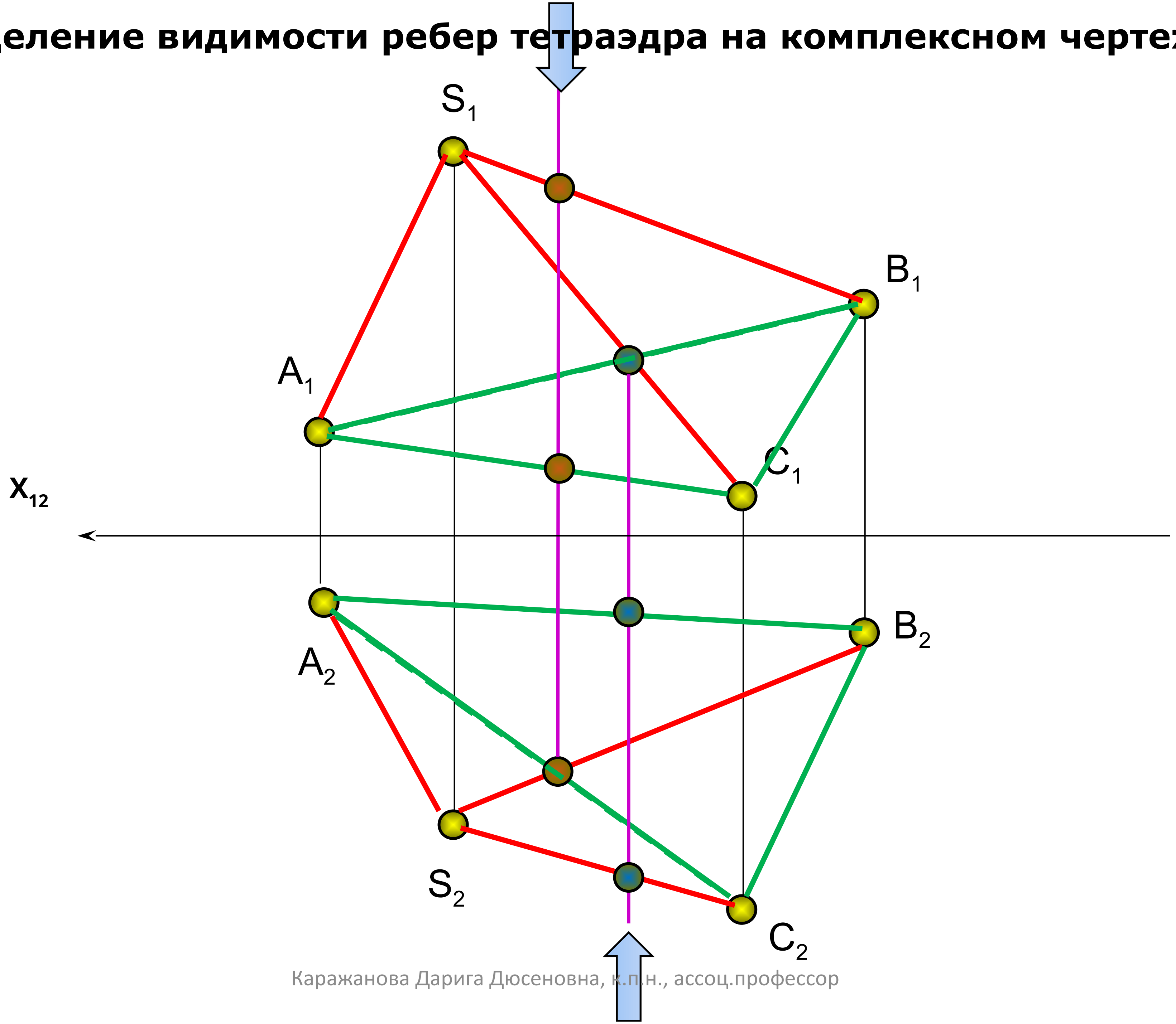


b1
b
П1
D1
C1
D
C
0
x
D2=C2 =b2
П2
a2



D1
b1
C1
X12
b2= C2= D2

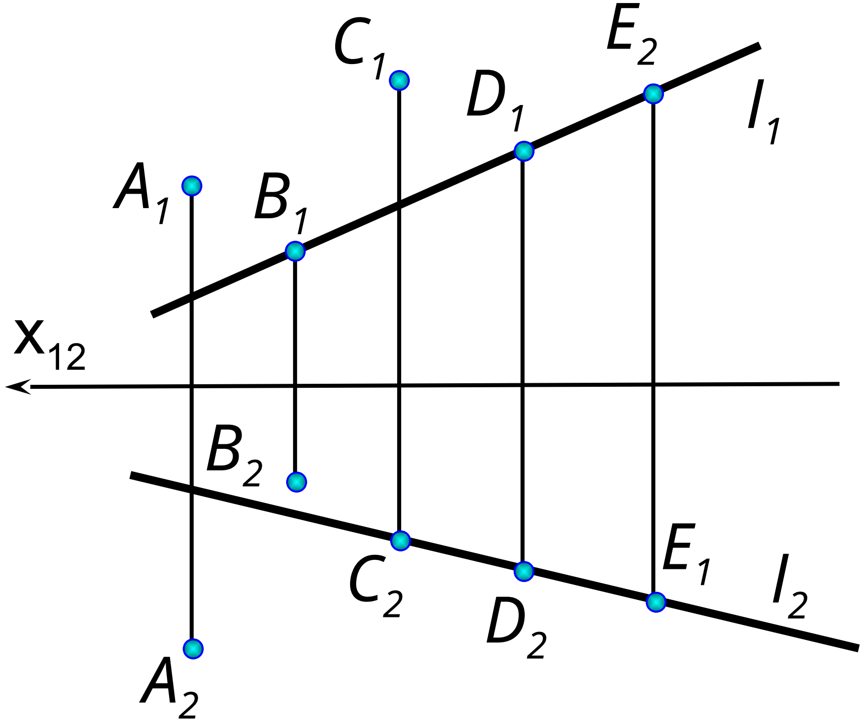
Определение видимости ребер тетраэдра на комплексном чертеже



Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор

2. Взаимное расположение точек и прямой.

Точка может принадлежать прямой, а также находиться вне ее. На рисунке показан пример взаимного положения точек A, B, C и прямой l. Точка B принадлежит прямой (т.к. обе проекции точки принадлежат проекциям прямой), Точки A и C не принадлежат прямой (т.к. одна из проекций точек не принадлежит проекции прямой):



$$D_1 \in l_1, D_2 \in l_2 \Rightarrow D \in l.$$

3. Взаимное расположение двух прямых.

а) Параллельные прямые. Если прямые a и b параллельны, то одноименные проекции этих прямых взаимно параллельны

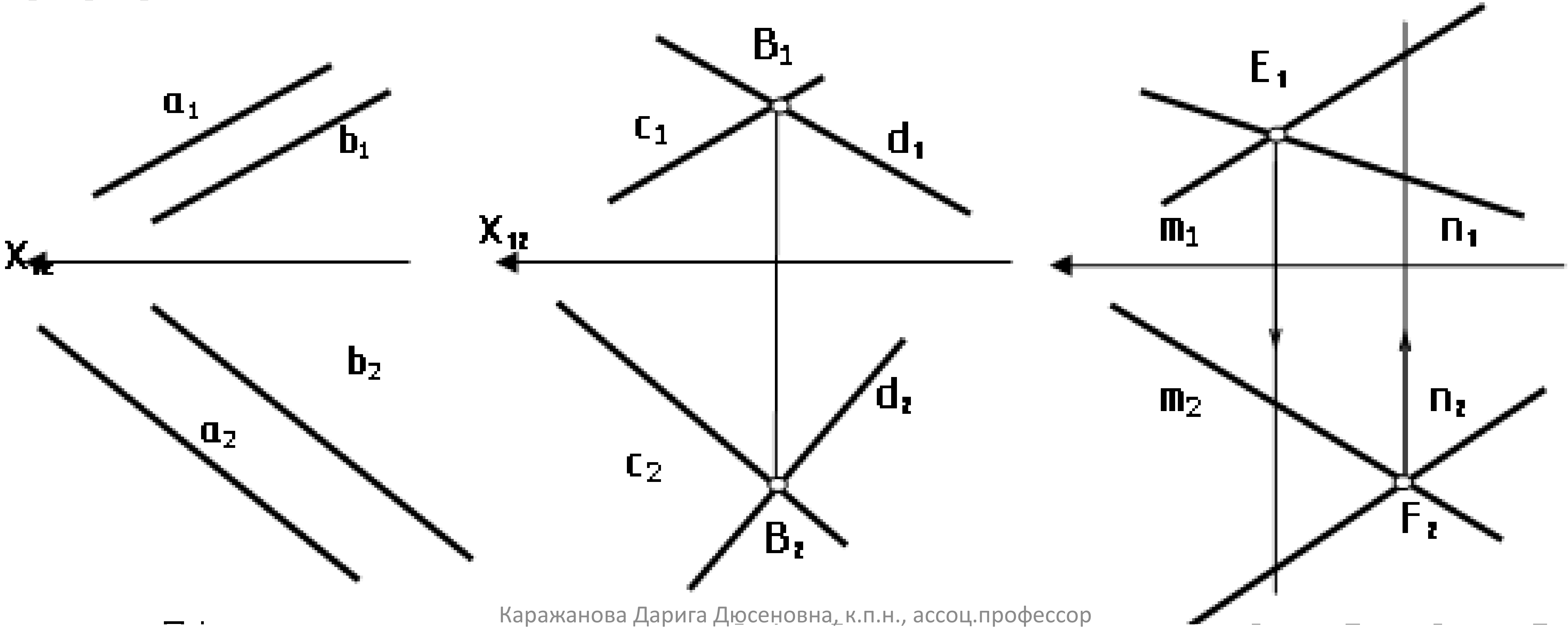
$a \parallel b \quad a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$;

б) Пересекающиеся прямые. Если прямые c и d пересекаются, то на эпюре точки пересечения B_1 и B_2 одноименных проекци

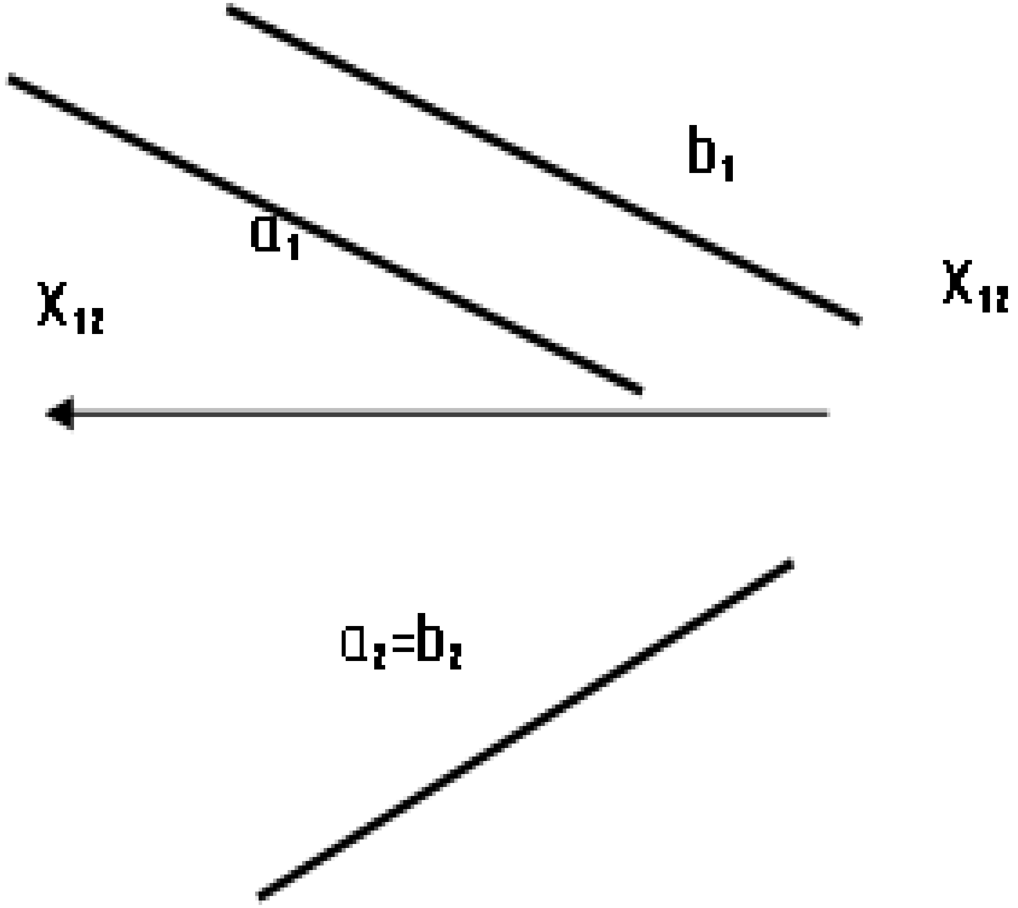
прямых должны располагаться на одной и той же вертикальной линии проекционной связи $c \cap d = B$;

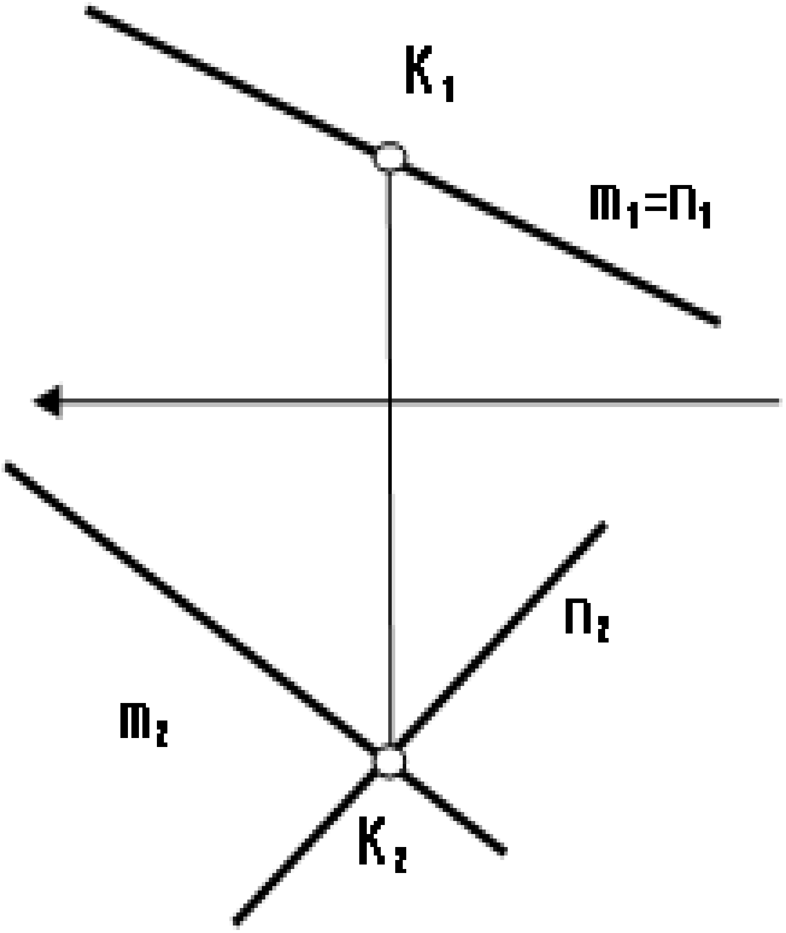
в) Скрещивающиеся прямые. Если прямые m и n скрещивающиеся, то точки пересечения одноименных проекций прямых лежат на разных линиях проекционной связи

$m_1 \cap n_1 =$ E1, $m_2 \cap n_2 = F_2 \quad m \dot{-} n$;



г) Конкурирующие прямые. Если одна пара проекций двух проекций прямых совпадают, то такие прямые являются конкурирующими.



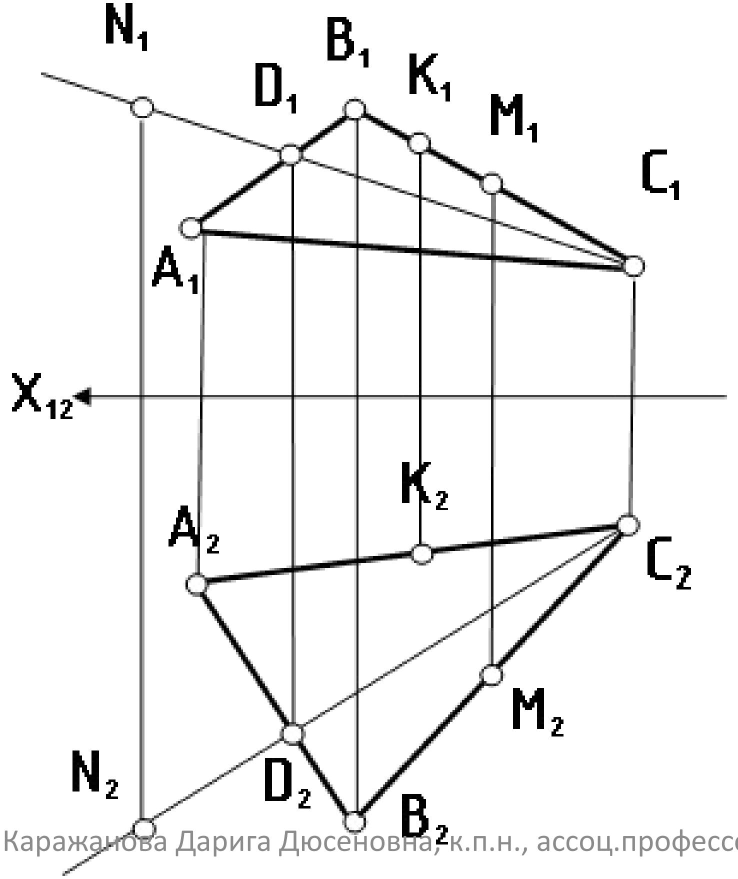


4. Взаимное расположение точек и плоскости. Точка может принадлежать плоскости и располагаться вне ее. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

Точка M принадлежит плоскости $\beta(\Delta ABC)$, так как ее проекции M_1 и M_2 принадлежат одноименным проекциям отрезка BC, точка N также принадлежит плоскости β, проекции этой точки принадлежат проекциям прямой l (DC), лежащей в этой плоскости.

$M, N \in \beta\ (\Delta ABC)$

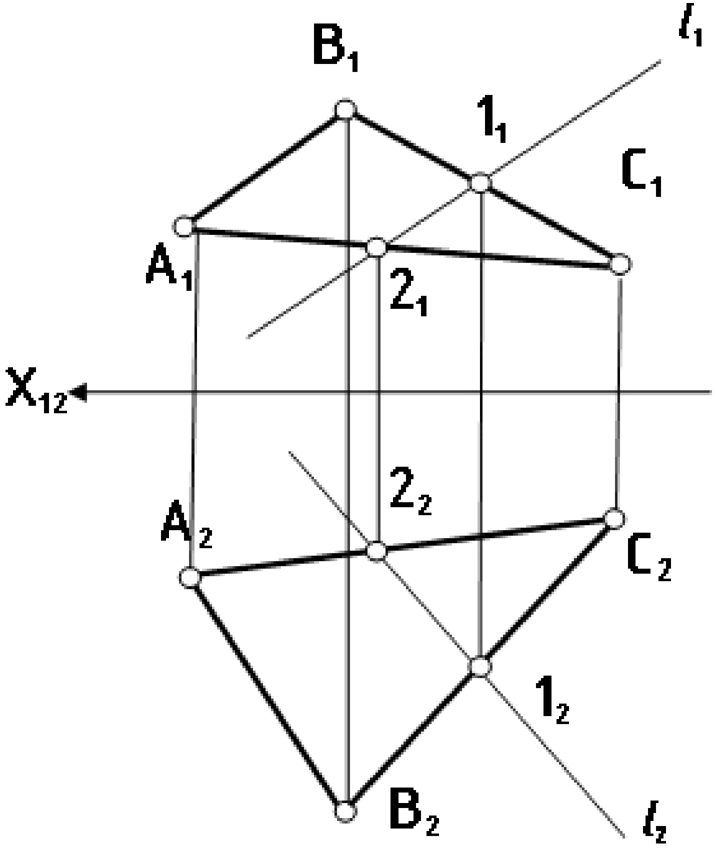
$K \notin \beta\ (\Delta ABC)$

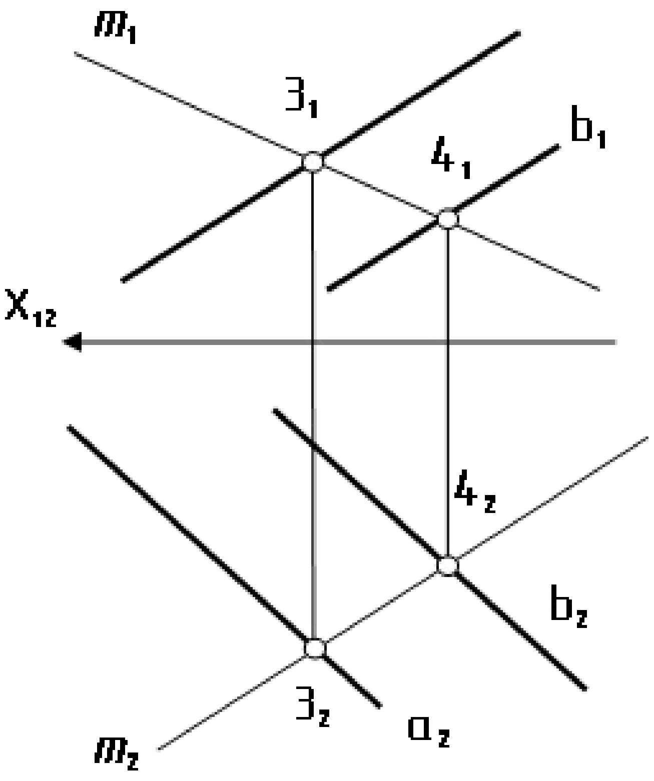


5. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Возможны следующие отношения прямой и плоскости: прямая принадлежит плоскости, прямая параллельна плоскости, прямая пересекает плоскость.

а) **Прямая принадлежит плоскости.** Если две точки прямой принадлежат данной плоскости, то и сама прямая лежит в этой плоскости.





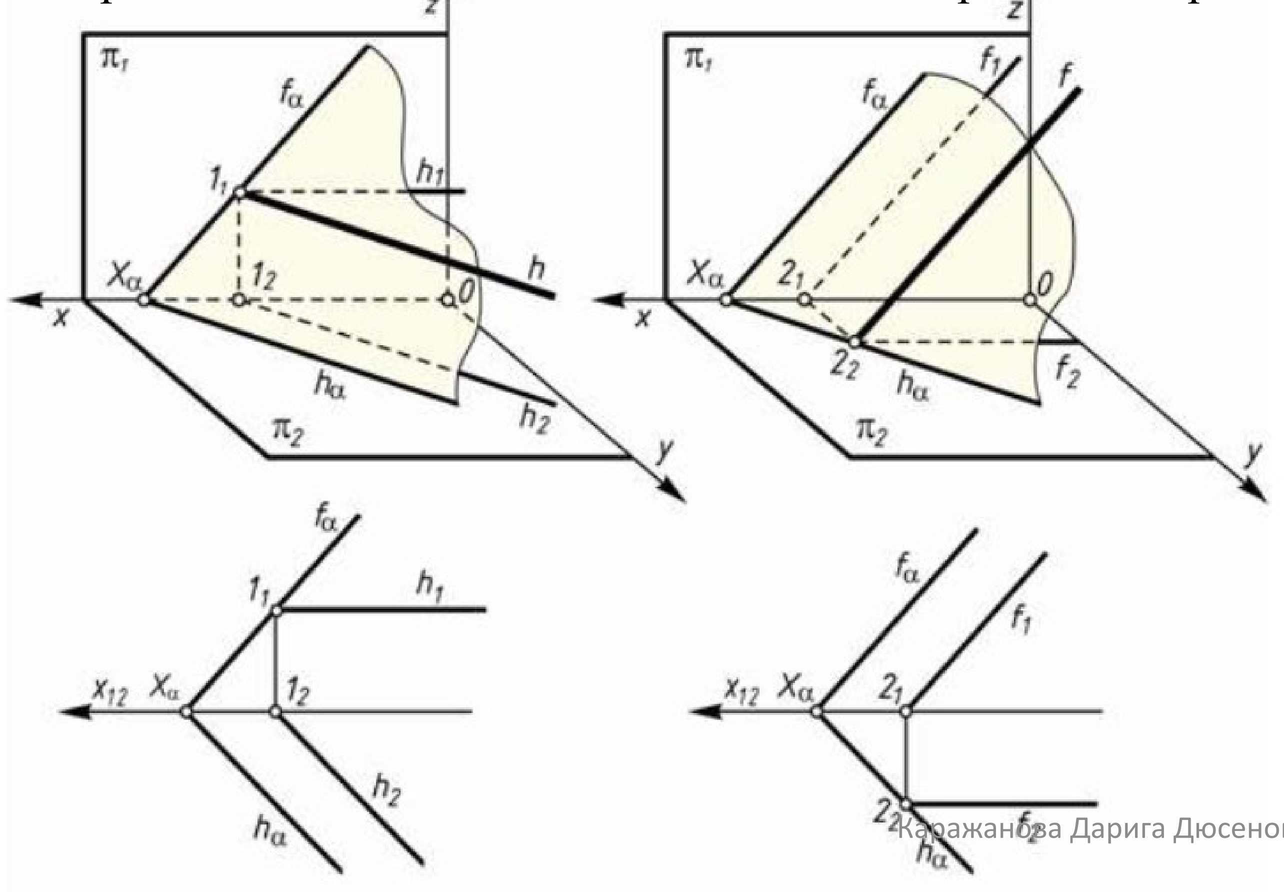
Из числа прямых, лежащих в плоскости, выделяются прямые особого положения:

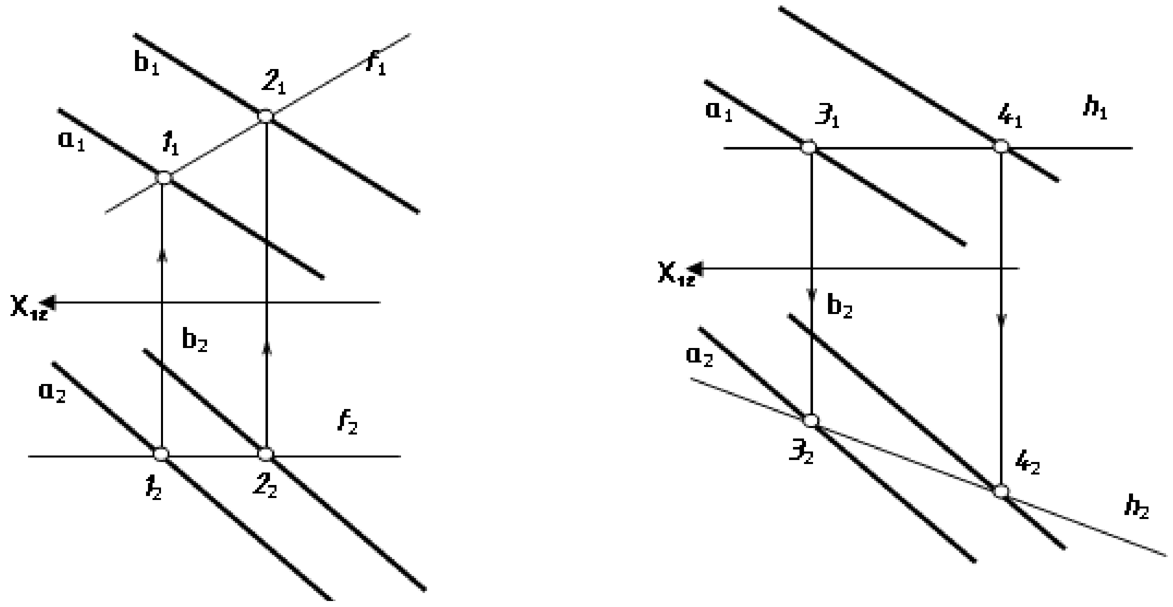
Фронталью плоскости называется прямая ***f***, лежащая в этой плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_1}$.

Горизонталью плоскости называется прямая ***h***, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_2}$.

Профильная прямая плоскости – это прямая ***p*** лежащая в плоскости и параллельная профильной плоскости проекций $\boldsymbol{\pi_3}$.

Линия наибольшего ската – это прямая ***v***, лежащая в плоскости и перпендикулярная к горизонталям плоскости. На эпюре линию наибольшего ската начинают строить на горизонтальной проекции плоскости.

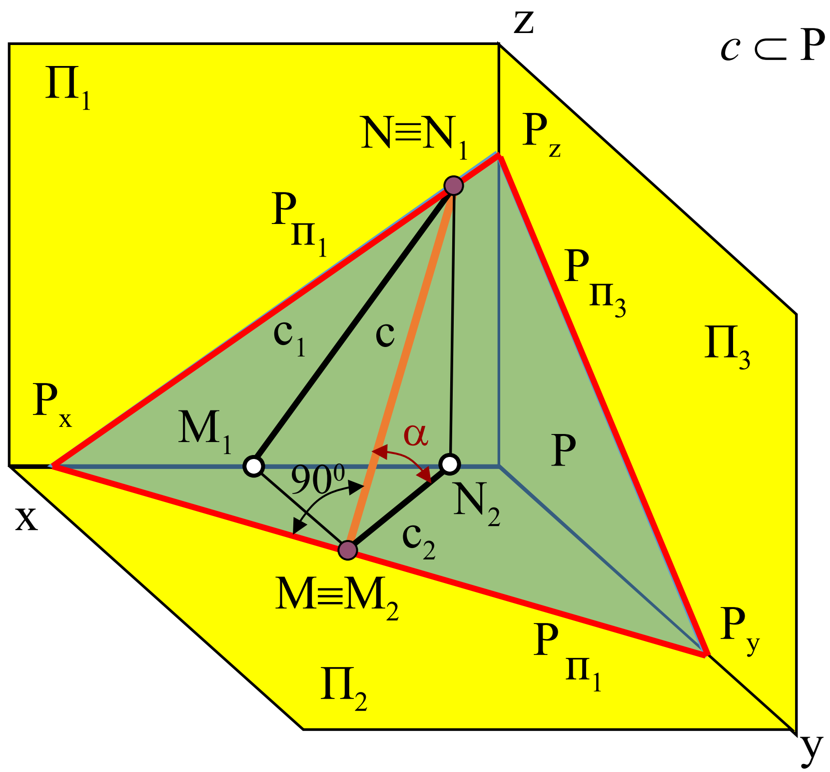


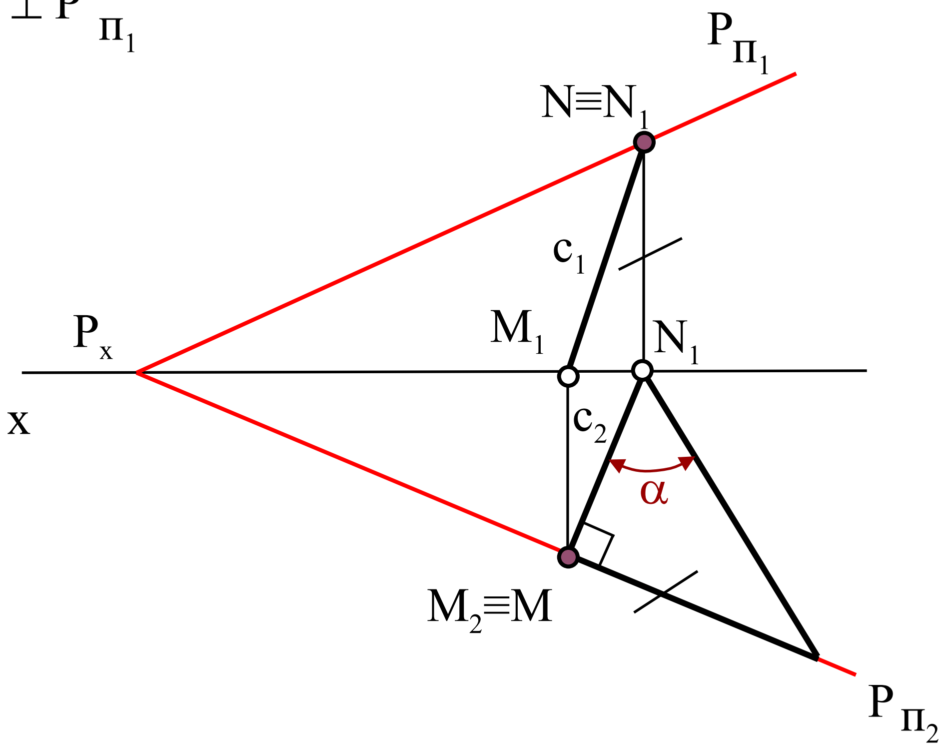


ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО СКАТА ПЛОСКОСТИ

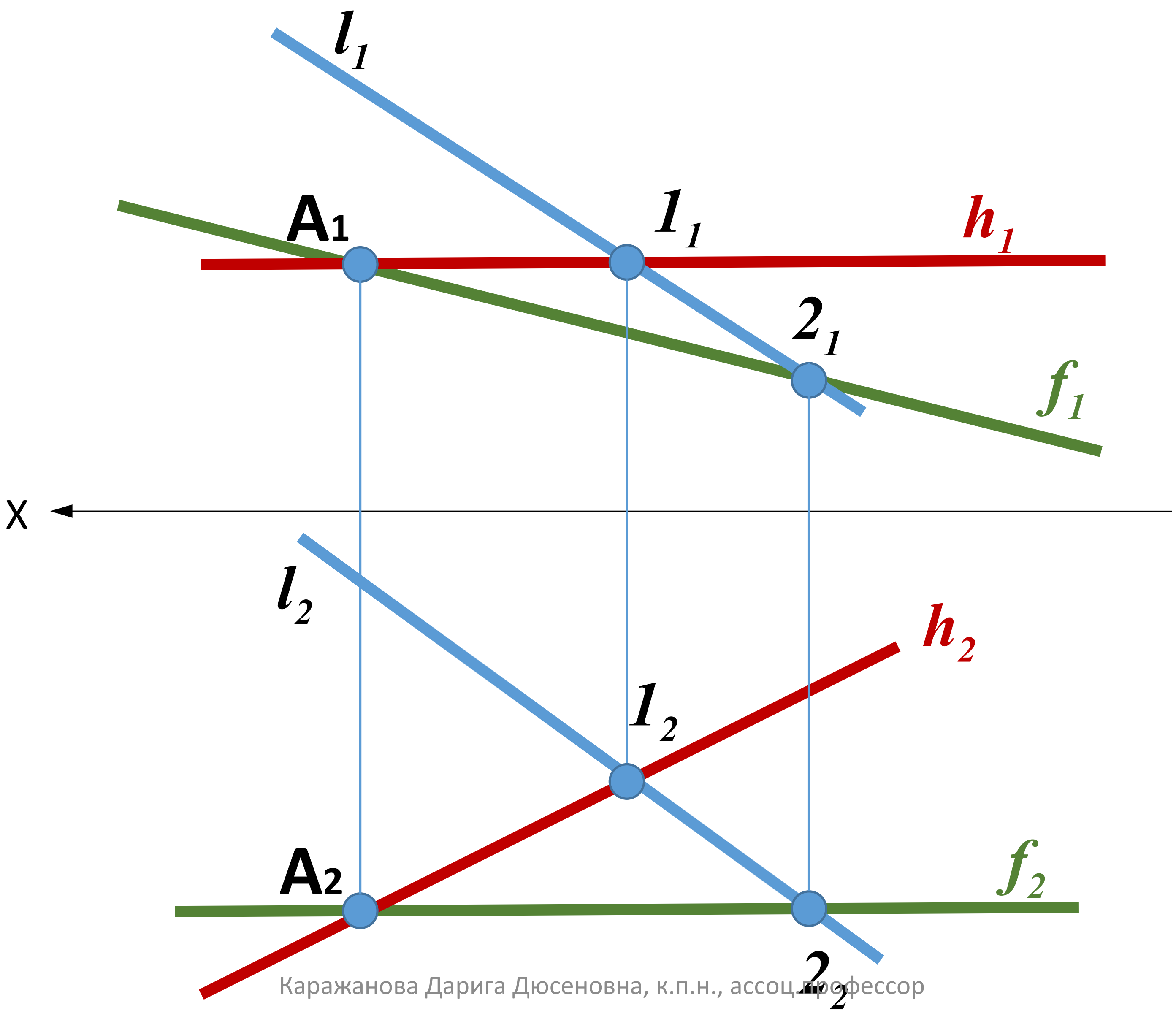
Линией наибольшего ската плоскости называется прямая, лежащая в данной плоскости и перпендикулярная всем горизонталям плоскости, в том числе и горизонтальному следу плоскости (нулевая горизонталь).

$c \subset P; \ c \perp P_{\pi_1}$

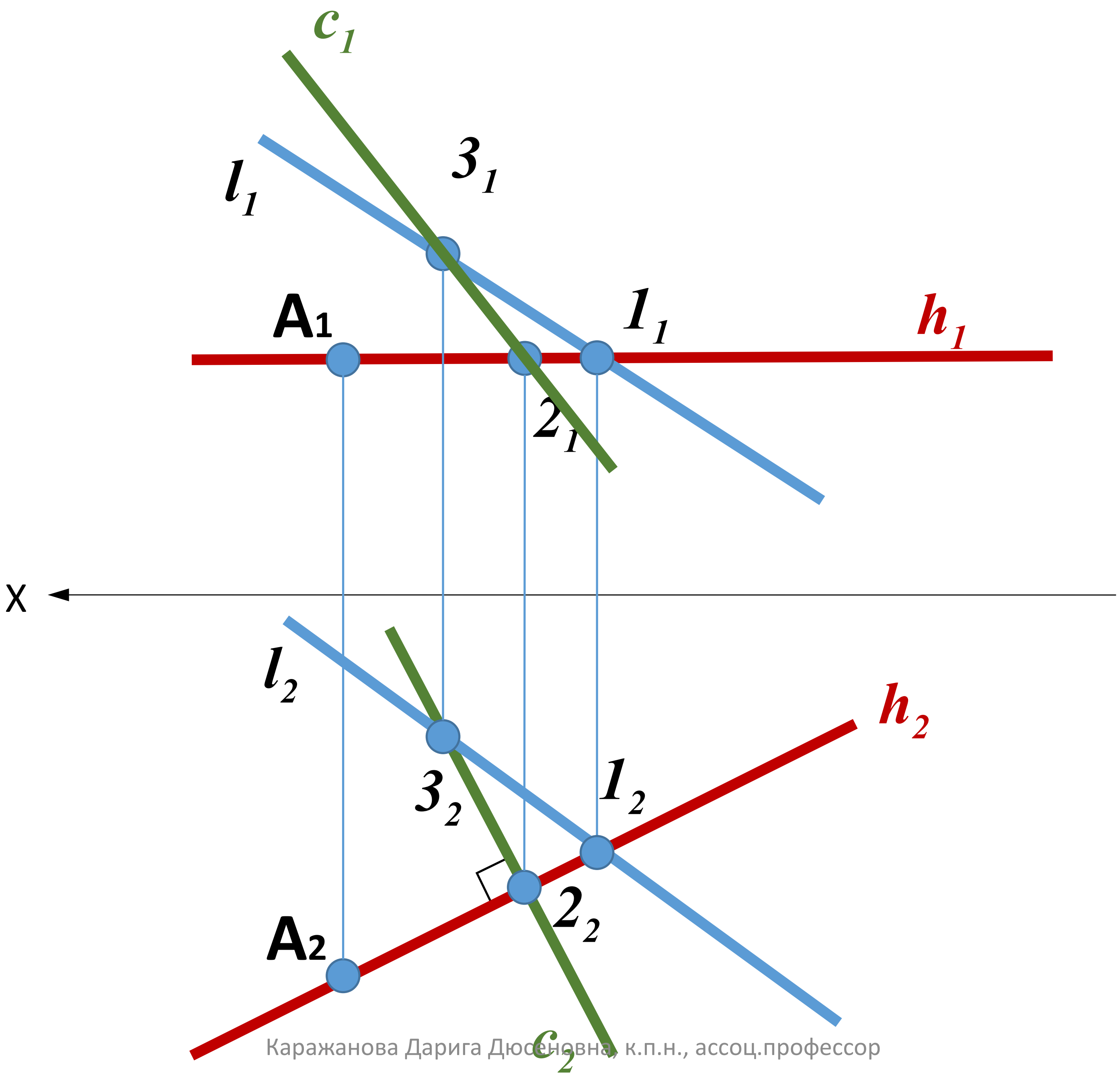




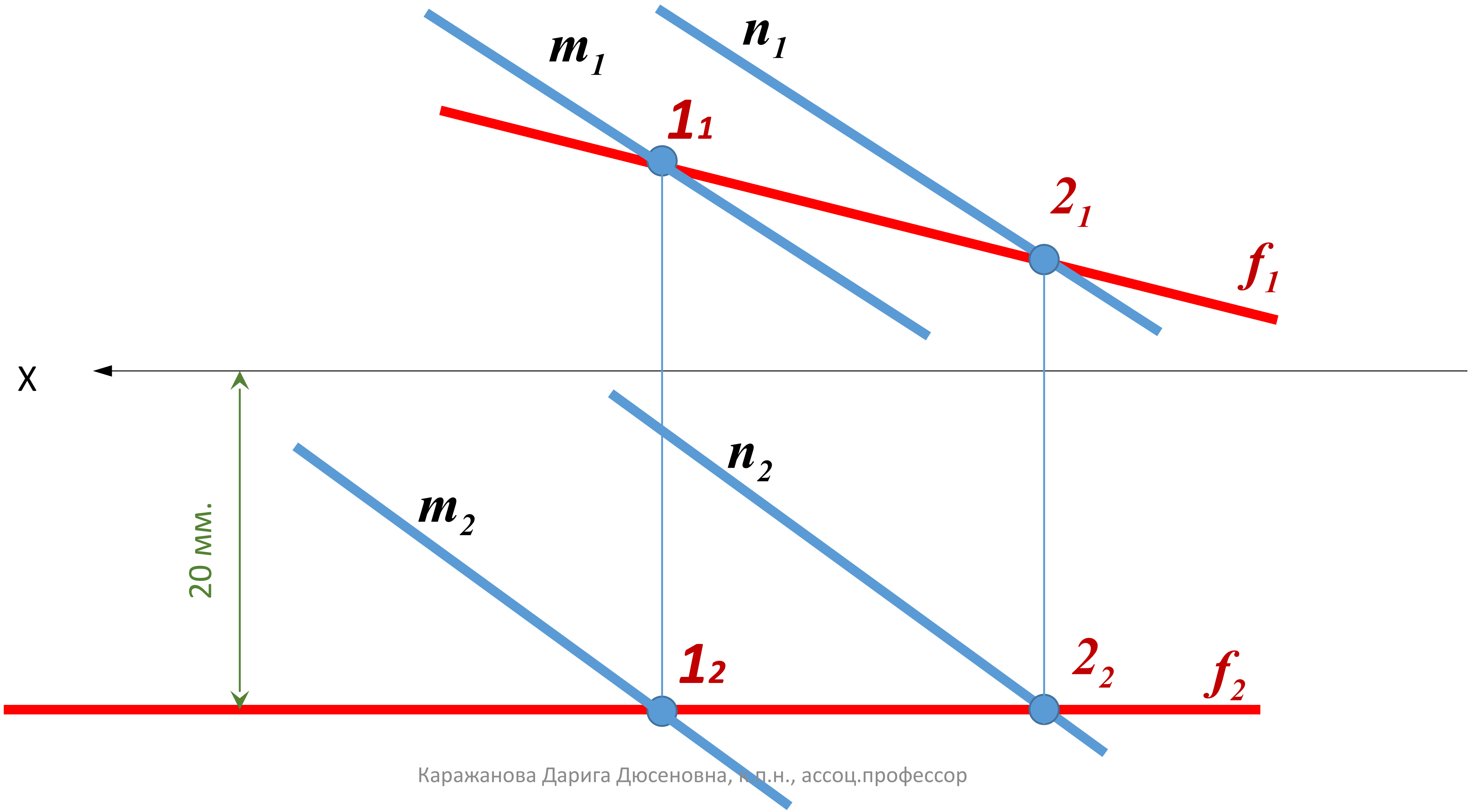
Задача. В плоскости, заданной точкой А и прямой *l*, построить фронталь и горизонталь



Задача. В плоскости, заданной точкой А и прямой *l*, линию наибольшего ската



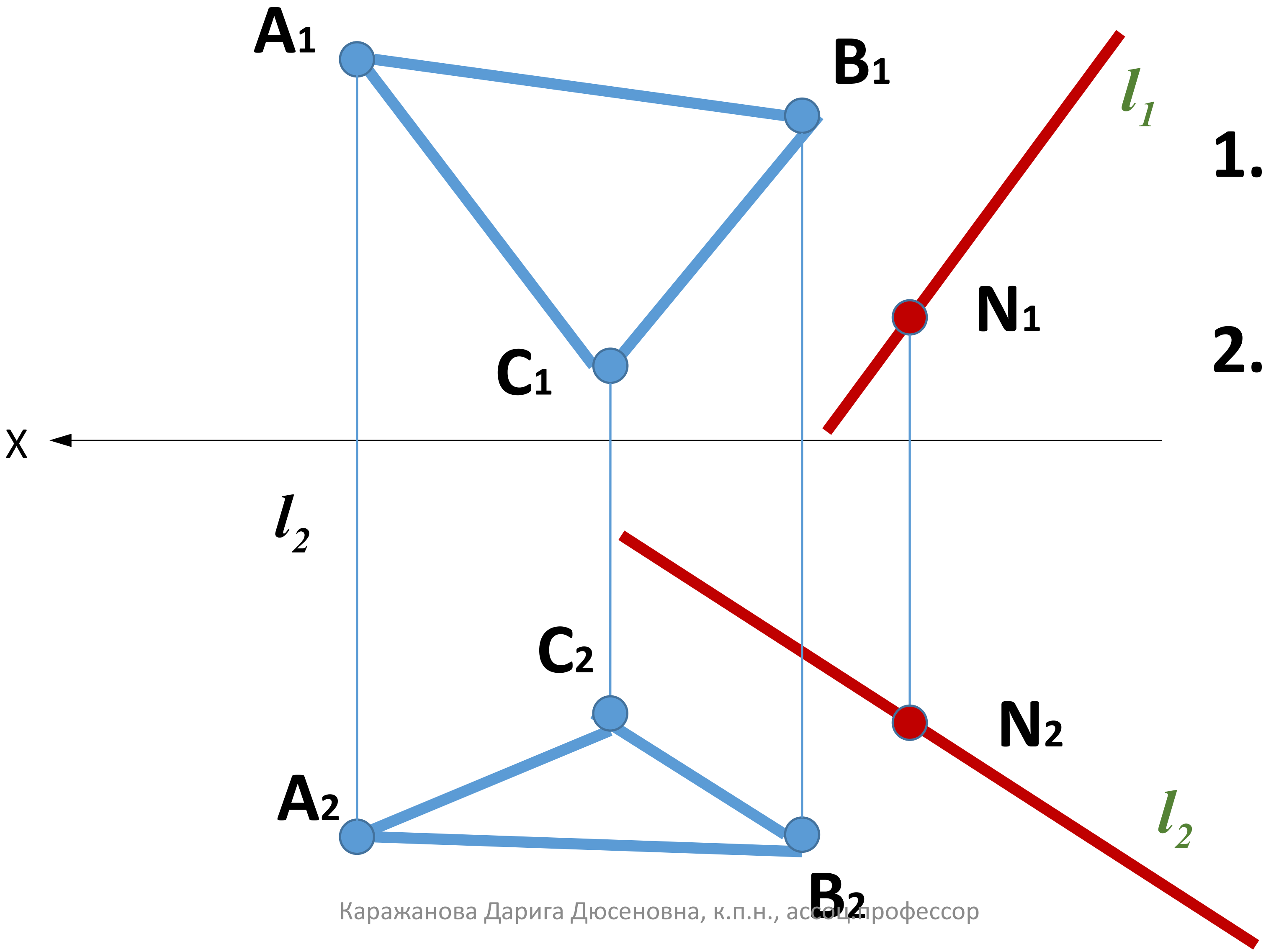
В плоскости, заданной параллельными прямыми *m* и *n* построить фронталь, расположенную на расстоянии 20мм от плоскости π_1.



.

б) Прямая параллельна плоскости. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача . Через точку N провести прямую, параллельную плоскости α(△A,B,C)



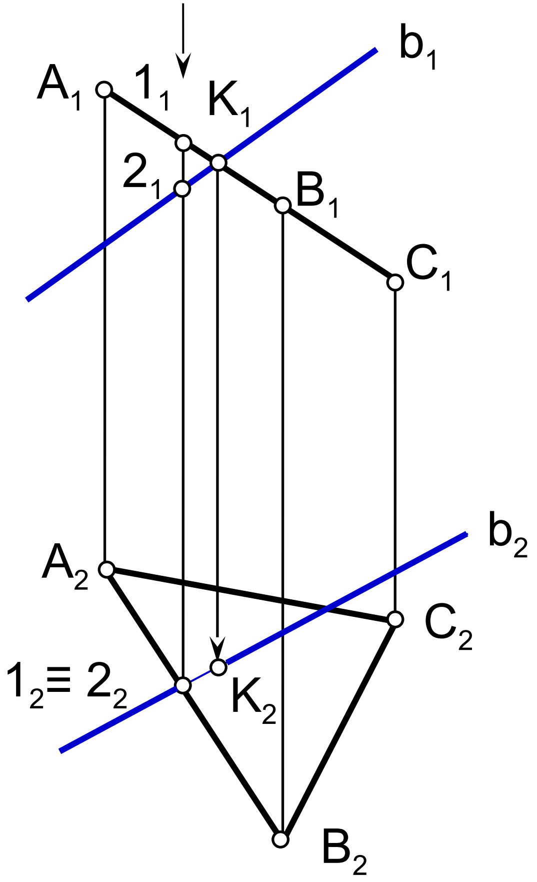
1. $N_1 \in l_1 \parallel (C_1B_1)$

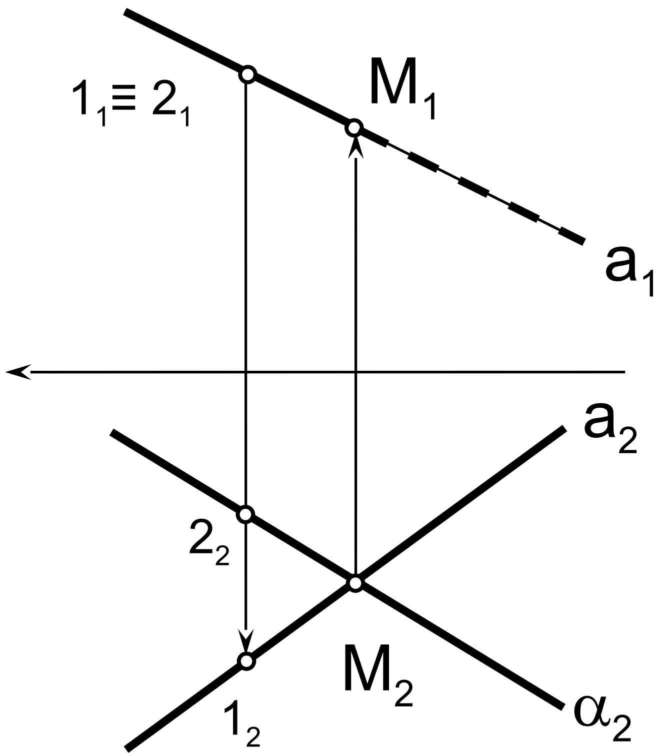
2. $N_2 \in l_2 \parallel (C_2B_2)$

.

в) Прямая пересекает плоскость. Если прямая не параллельна плоскости, то она пересекается с ней.

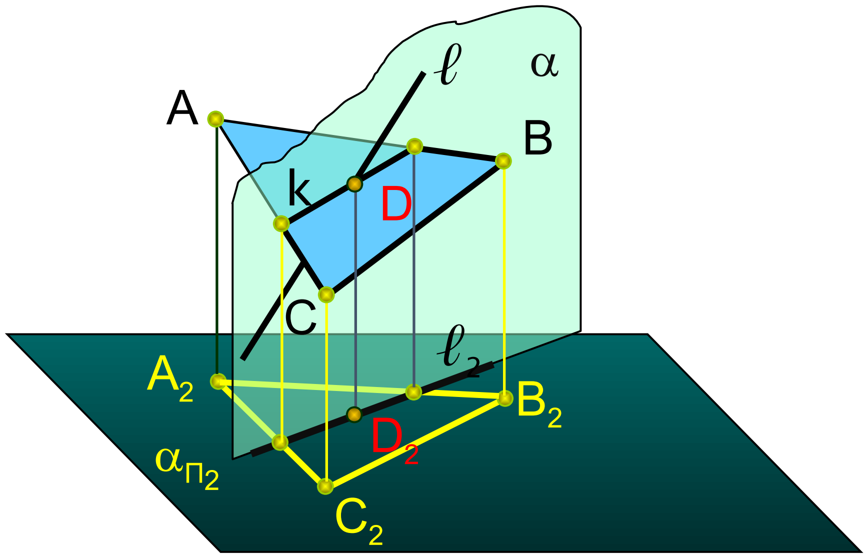
Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью





(Плоскость задана следом)

Пересечение прямой *общего положения* с плоскостью *общего положения*



$\alpha_{\Pi_2} \equiv \ell_2$

Алгоритм решения задачи:

1.Прямая заключается во вспомогательную плоскость

$\ell \subset \alpha \perp \Pi_2$

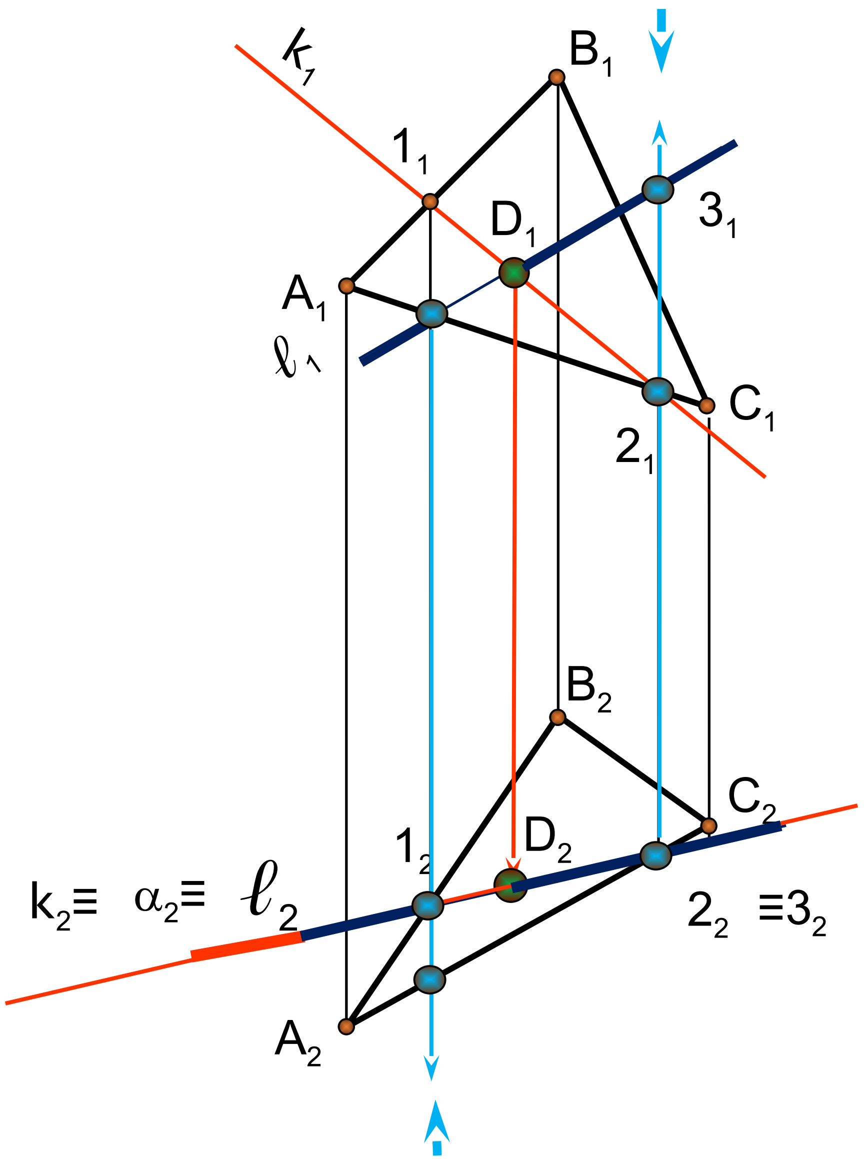
2.Определяется линия пересечения заданной плоскости со вспомогательной

$\alpha \cap \beta = k$

3.Отмечается искомая точка на пересечении данной прямой с линией пересечения плоскостей

$k \cap \ell = D$

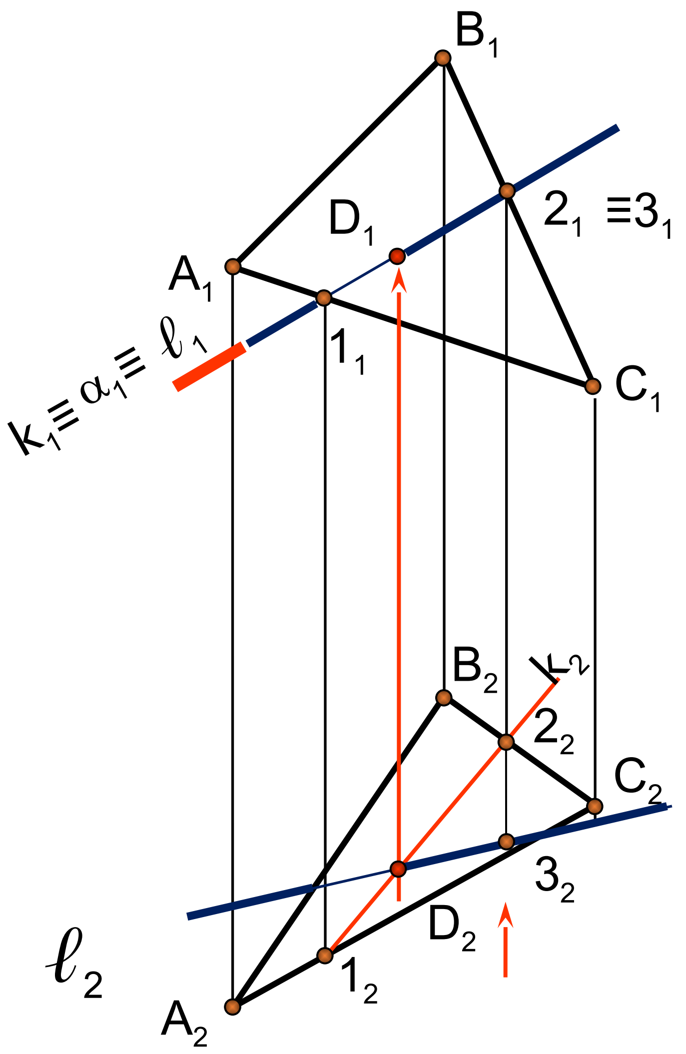
Пересечение прямой *общего положения* с плоскостью *общего положения*



Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор

Задача

Найти точку пересечения прямой ℓ с плоскостью (A,B,C)



Через прямую l проводим фронтально-проецирующую плоскость α;

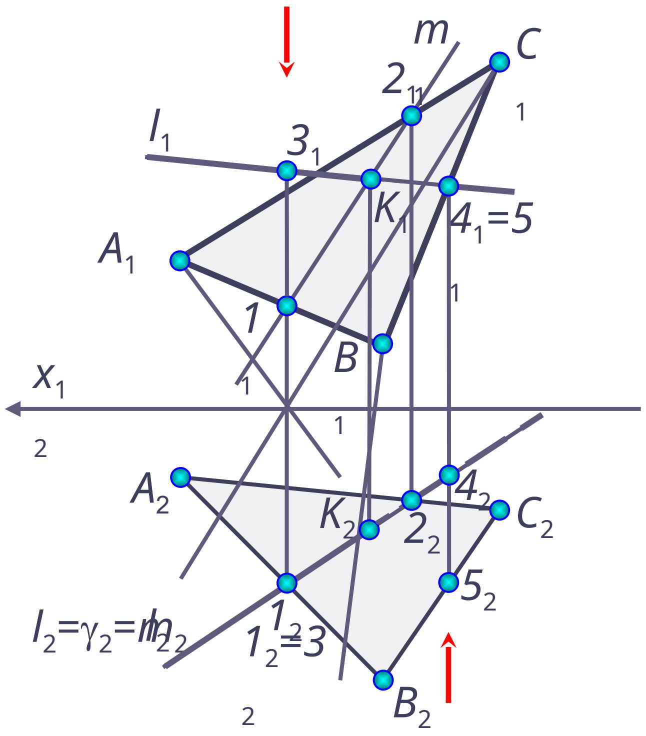
$$\alpha_1 \subset \ell_1;$$

$$\alpha_1 \cap (A_1B_1C_1) = k_1;$$

$$k_2 \cap \ell_2 = D_2;$$

$$\ell \cap (ABC) = D$$

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. Через прямую l проводим горизонтально-проецирующую плоскость γ;

2. Определяем линию пересечения вспомогательной плоскости γ с заданной плоскостью α: $m=(\alpha\cap\gamma)$.
Прямые m и l лежат в горизонтально-проецирующей плоскости γ, т.е. Являются горизонально-конкурирующими, поэтому:
$l_2=\gamma_2=m_2$.

$m_2\cap(A_2B_2)=1_2$. $m_2\cap(A_2C_2)=2_2$.

$1_2\uparrow 1_1\in(A_1B_1)$. $2_2\uparrow 2_1\in(A_1C_1)$.

$(1_1\wedge 2_1)=m_1$.

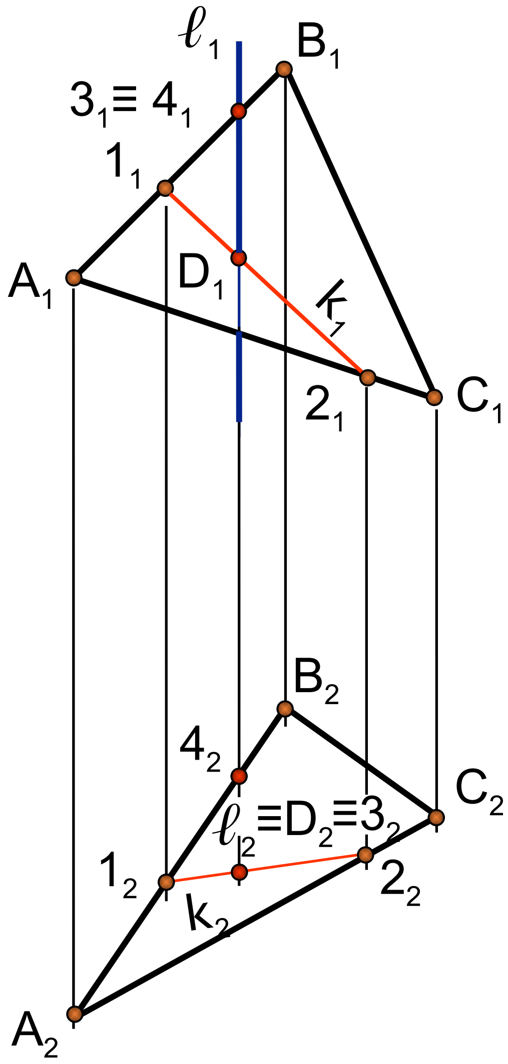
3. а) $m_1=l_1 \Rightarrow l\in\alpha$;
ә) $m_1 || l_1 \Rightarrow l || \alpha$;
б) $m_1\cap l_1 \Rightarrow l\cap\alpha$.

$(m_1\cap l_1)=K_1$.
$K_1\downarrow K_2\in l_2$.
$K=(l\cap\alpha)$.

$1\in(AB)$, $3\in l$
Точки 1 и 3 – горизонтально-конкурирующие.
Точка 3 расположена выше, поэтому на горизонтальной проекции междк K_2 и 2_2 прямая l будет невидимая

$4\in l$, $5\in(BC)$
Точки 4 и 5 – фронтально-конкурирующие.
Точка 5 расположена ближе, поэтому на фронтальной проекции между K_1 и 4_1 прямая l будет невидимая

Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения



$\ell \perp \Pi_2$

$\ell \cap \alpha(ABC) = D$

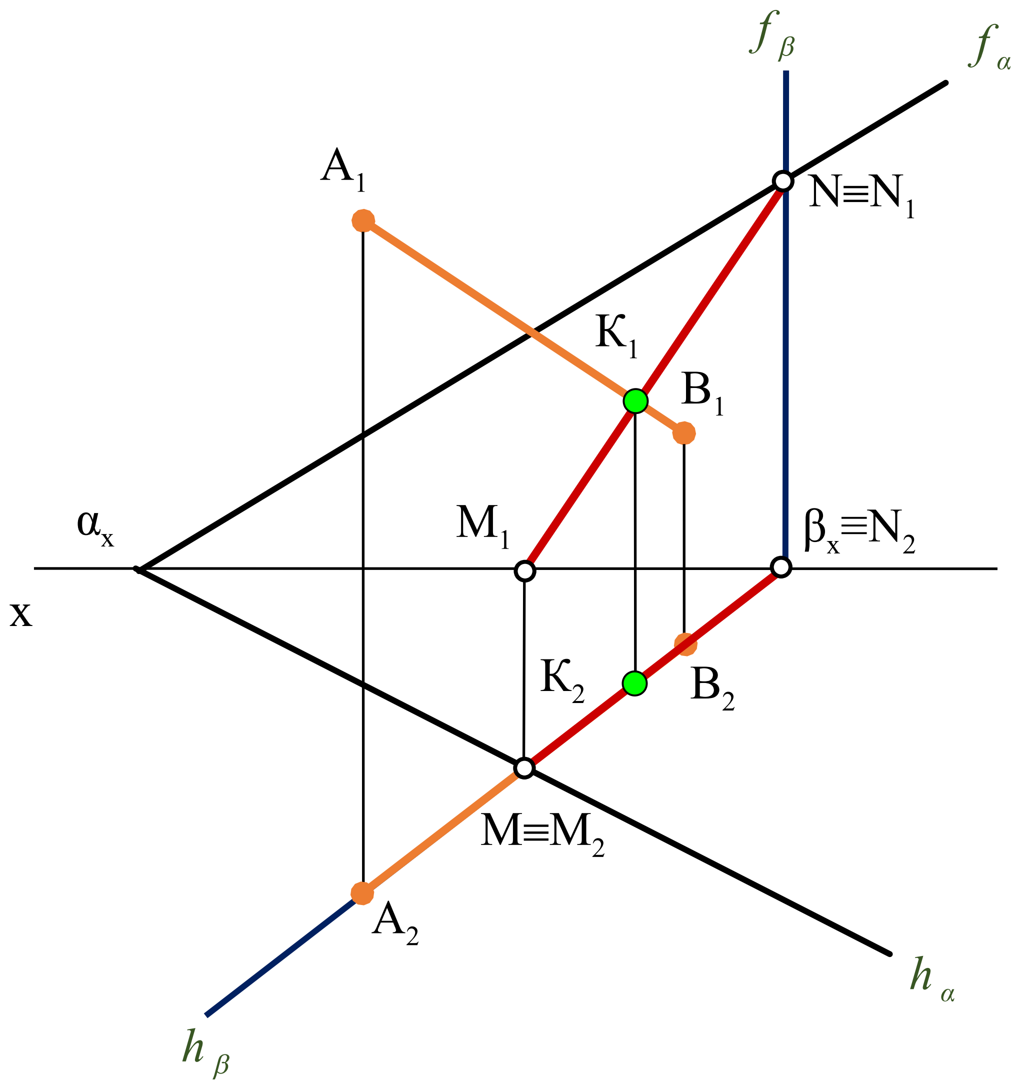
Задача. Построить точку пересечения прямой (AB) с плоскостью P, заданную следами.

1) $[AB] \subset \beta$

2) $\alpha \cap \beta = (MN)$

3) $(MN) \cap (AB) = K$

$K = (AB) \cap \alpha$



6. Взаимное расположение плоскостей.

Две различные плоскости пересекаются по собственной или несобственной прямой. Плоскости, которые пересекаются по несобственной прямой, принято называть параллельными.

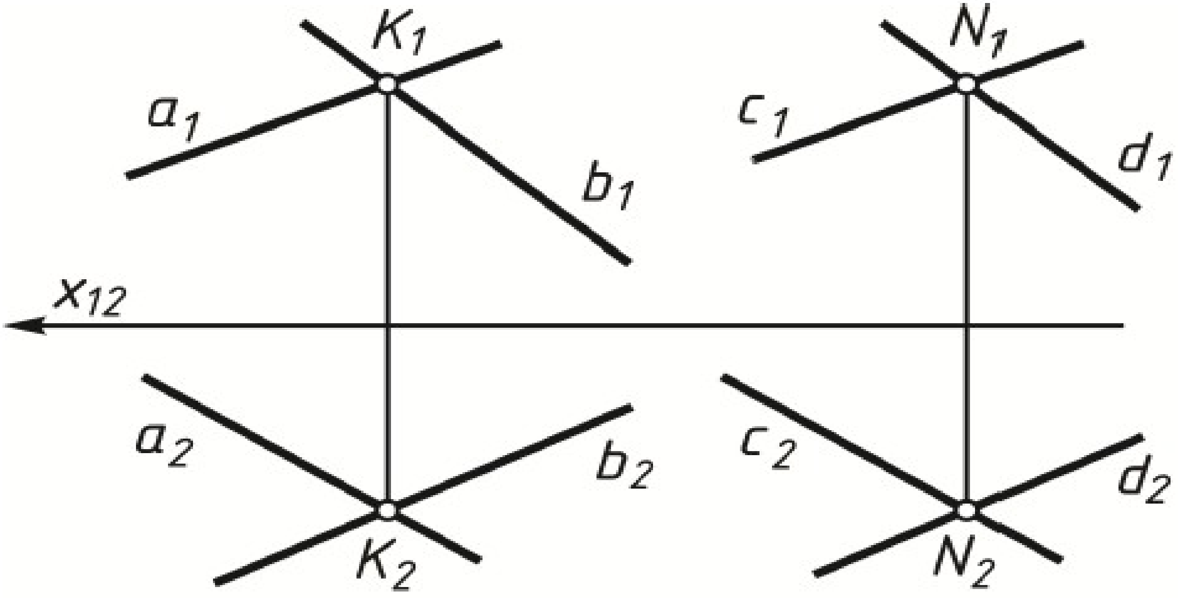
а) **Параллельные плоскости.** Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то такие плоскости параллельны. Также признаком параллельности плоскостей на эпюре является параллельность их соответствующих следов.

б) **Пересекающиеся плоскости.** Общим элементом двух пересекающихся плоскостей является прямая, поэтому для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно найти две их общие точки.

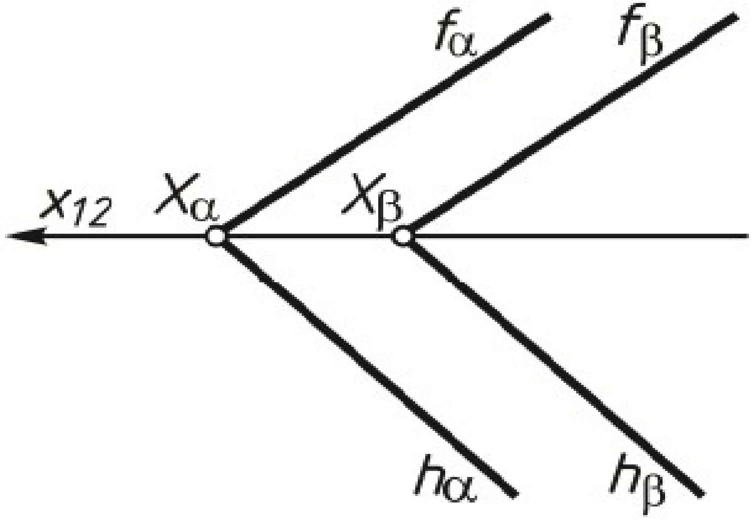
а) **Параллельные плоскости**

Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Также признаком параллельности плоскостей на эпюре является параллельность их соответствующих следов.



а



б

$$c \parallel a\ (c_1 \parallel a_1,\ c_2 \parallel a_2\ ),\ \ d \parallel b\ (d_1 \parallel b_1,\ d_2 \parallel b_2\ )$$

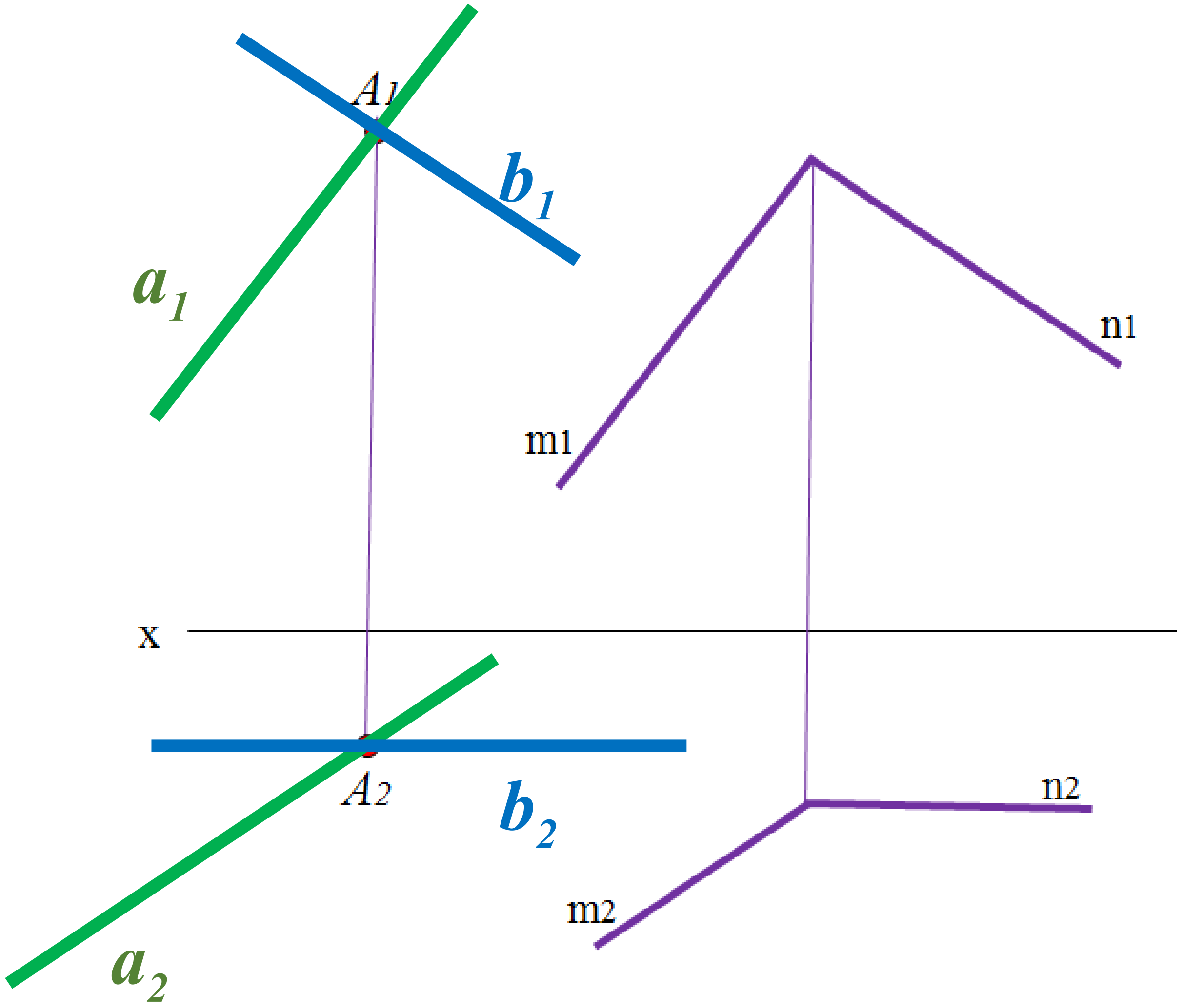
$$\alpha(a \cap b) \parallel \beta(c \cap d)$$

$$f_\alpha \parallel f_\beta\ ,\ h_\alpha \parallel h_\beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

Задача

Через точку А провести плоскость, параллельную плоскости, заданной пересекающимися прямыми *m* и *n*.

.



‖m

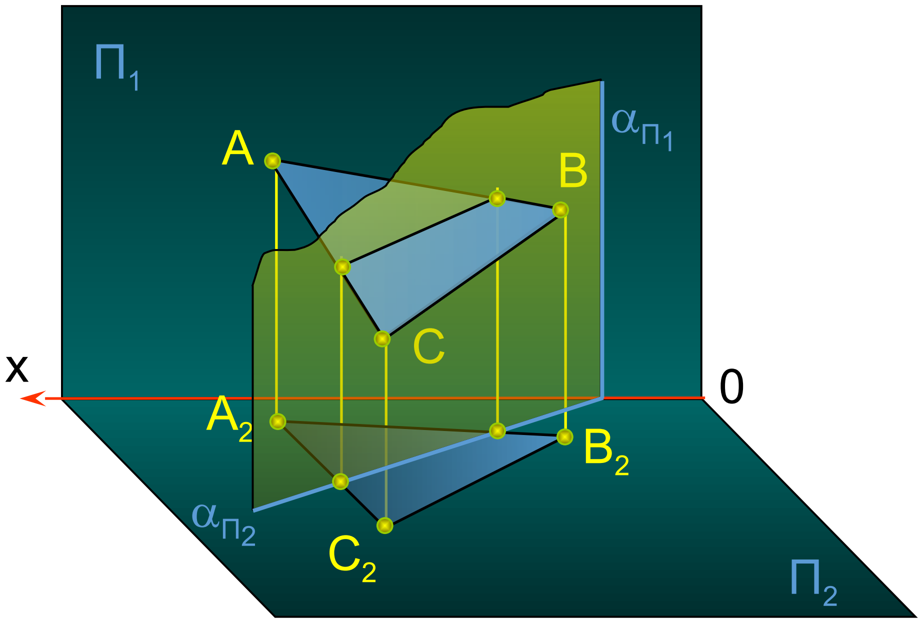
‖m

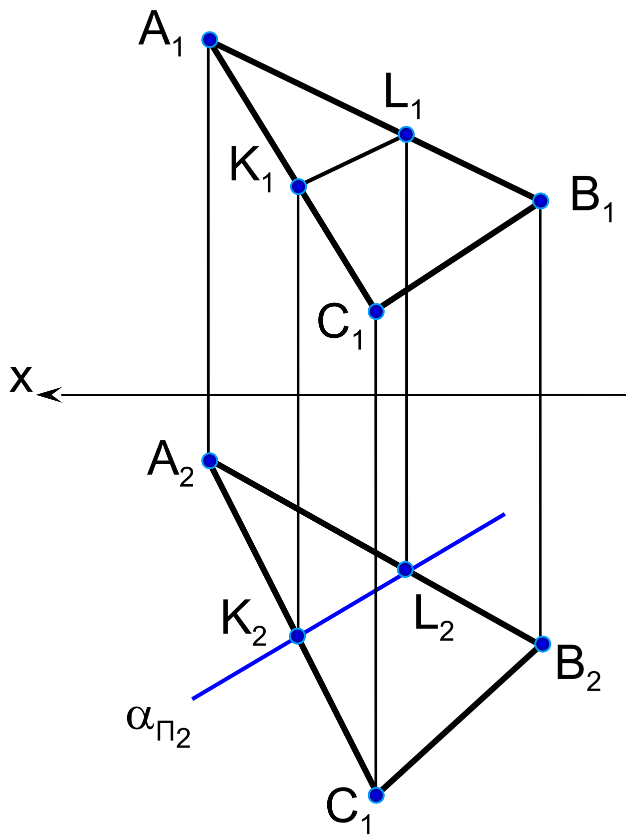
‖n

‖n

б) **Пересекающиеся плоскости.**

Пересечение *плоскости общего положения с проецирующей плоскостью*





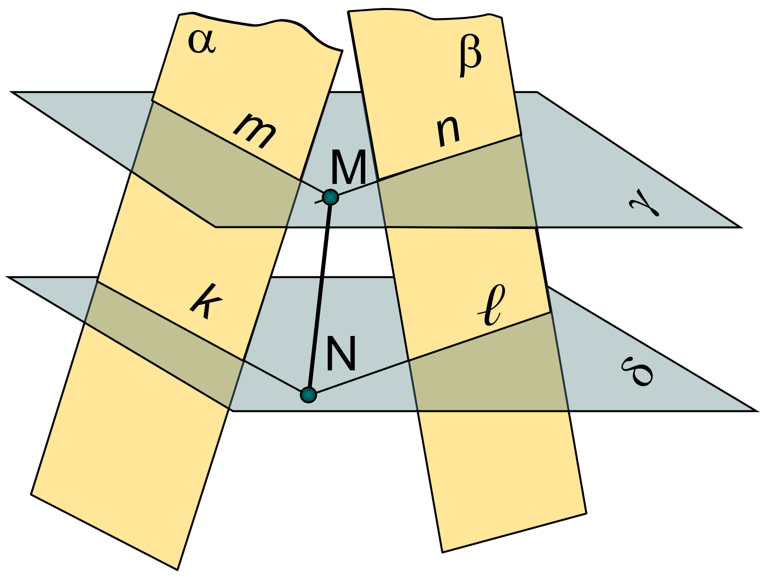
$$\alpha_{П1} \cap \beta(\,|\,ABC) = KL$$

$$K_1L_1 \equiv \alpha_1$$

Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор

Пересечение двух плоскостей *общего положения*

Алгоритм:

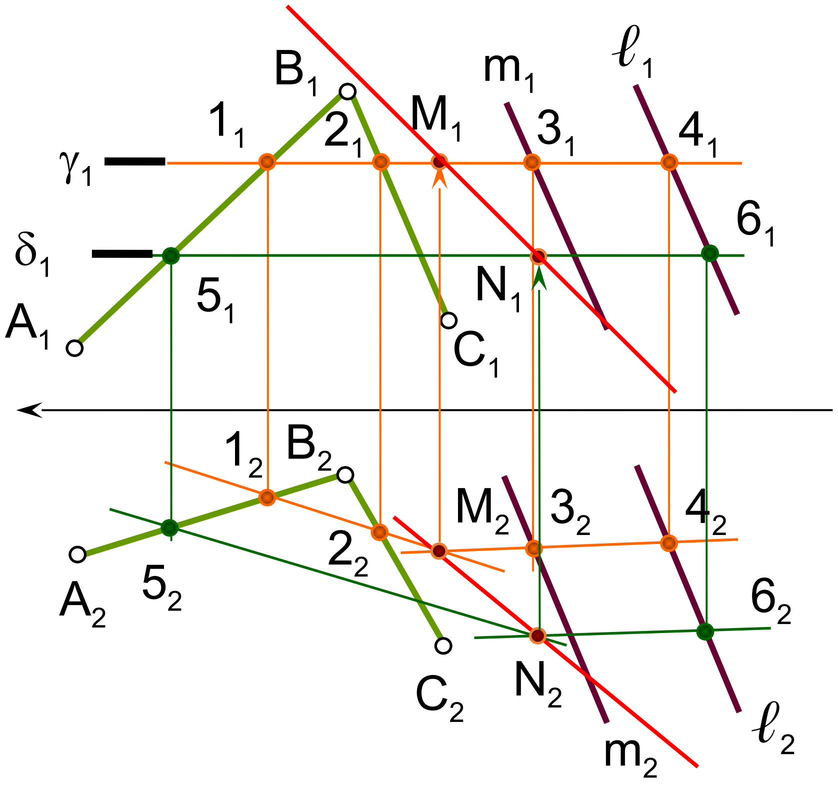


1. Вводится посредник – проецирующая плоскость γ
2. Определяется линия пересечения m плоскости α и посредника γ : $\alpha \cap \gamma = m$
3. Определяется линия n пересечения плоскости β и посредника γ : $\beta \cap \gamma = n$
4. Отмечается точка пересечения линий m и n: $m \cap n = M$
5. Вводится второй посредник δ

6. $\alpha \cap \delta = k$ 7. $\beta \cap \delta = \ell$ 8. $k \cap \ell = N$ 9. $\alpha \cap \beta = MN$

Задача

Построить линию пересечения плоскостей α *и* β



$\alpha(AB \cap BC)$

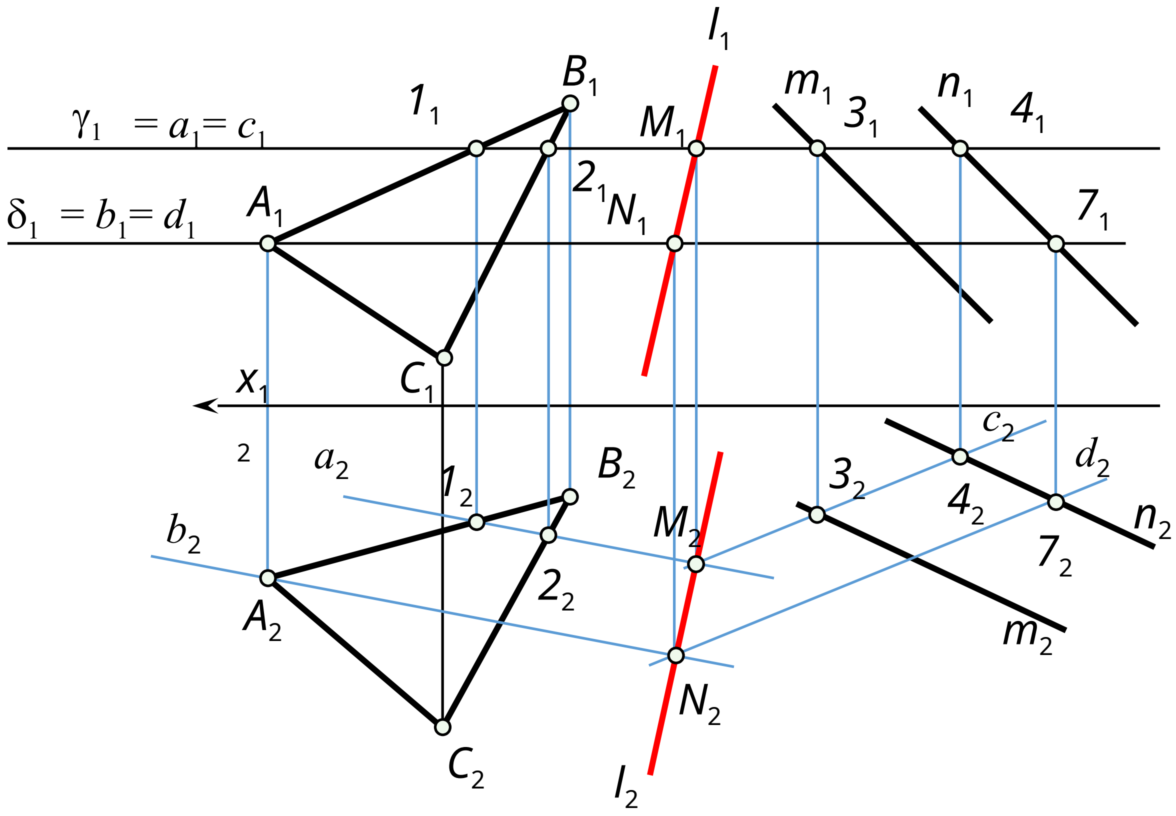
$\beta\ (m \parallel \ell)$

$\gamma_{П_1} \cap a = 12; \quad \gamma_{П_1} \cap a = 34;$

$12 \cap 34 = M;$

$a \cap \beta = MN$

Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор



$\alpha(ABC)$

$\beta(m \| n)$

$\gamma \perp \pi_1$

$\gamma \cap \alpha = a$

$\gamma \cap \beta = c$

$a \cap c = M$

$\delta \perp \pi_1$

$\delta \cap \alpha = b$

$\delta \cap \alpha = d$

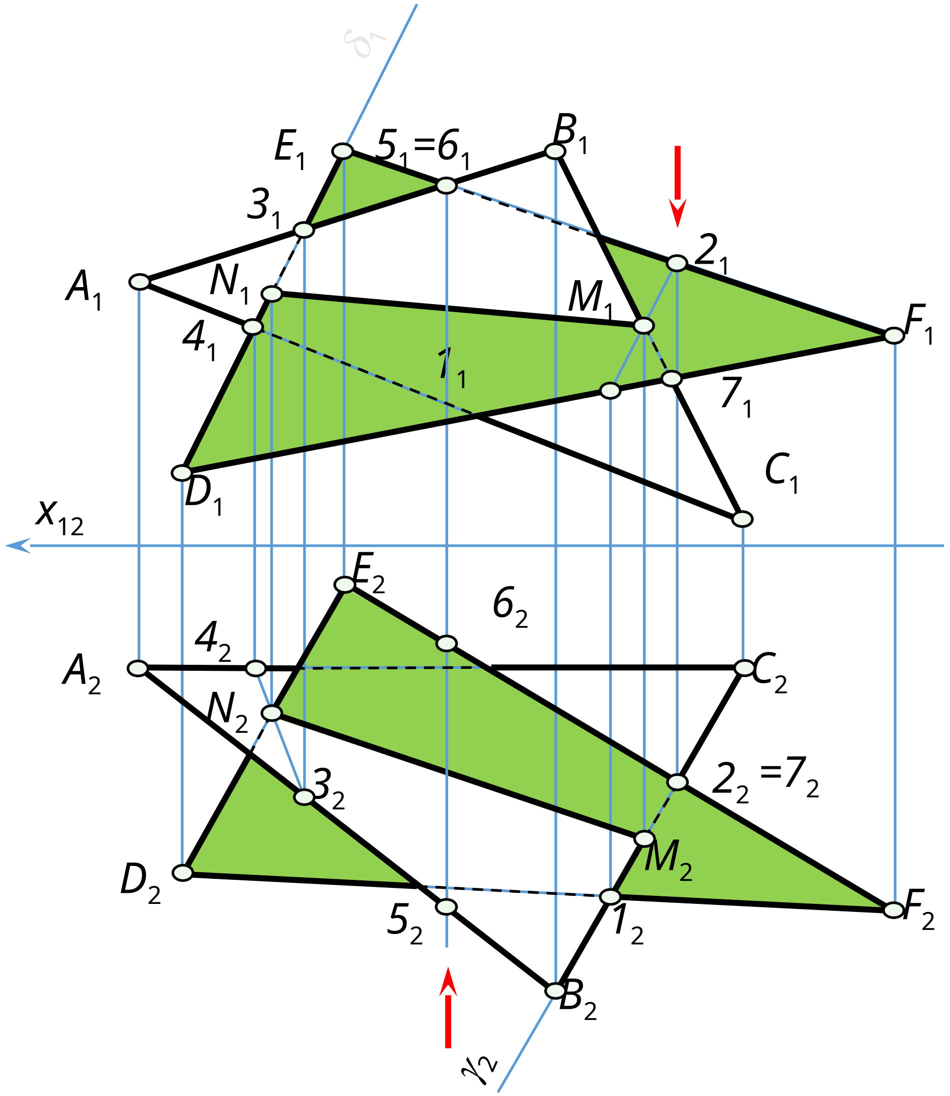
$b \cap d = N$

$M_2 \wedge N_2 = l_2$

$M_1 \wedge N_1 = l_1$

Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор

Построение линии пересечения двух плоскостей



$\alpha(ABC)$ $\beta(DEF)$

$\alpha(ABC)\cap\beta(DEF)=(MN)$

$(BC)\in\gamma,\quad \gamma\perp\pi_2$

$\gamma\cap\beta(DEF)=(12)$

$(12)\cap(BC)=M$

$(DE)\in\delta,\quad \delta\perp\pi_1$

$\delta\cap\alpha(ABC)=(34)$

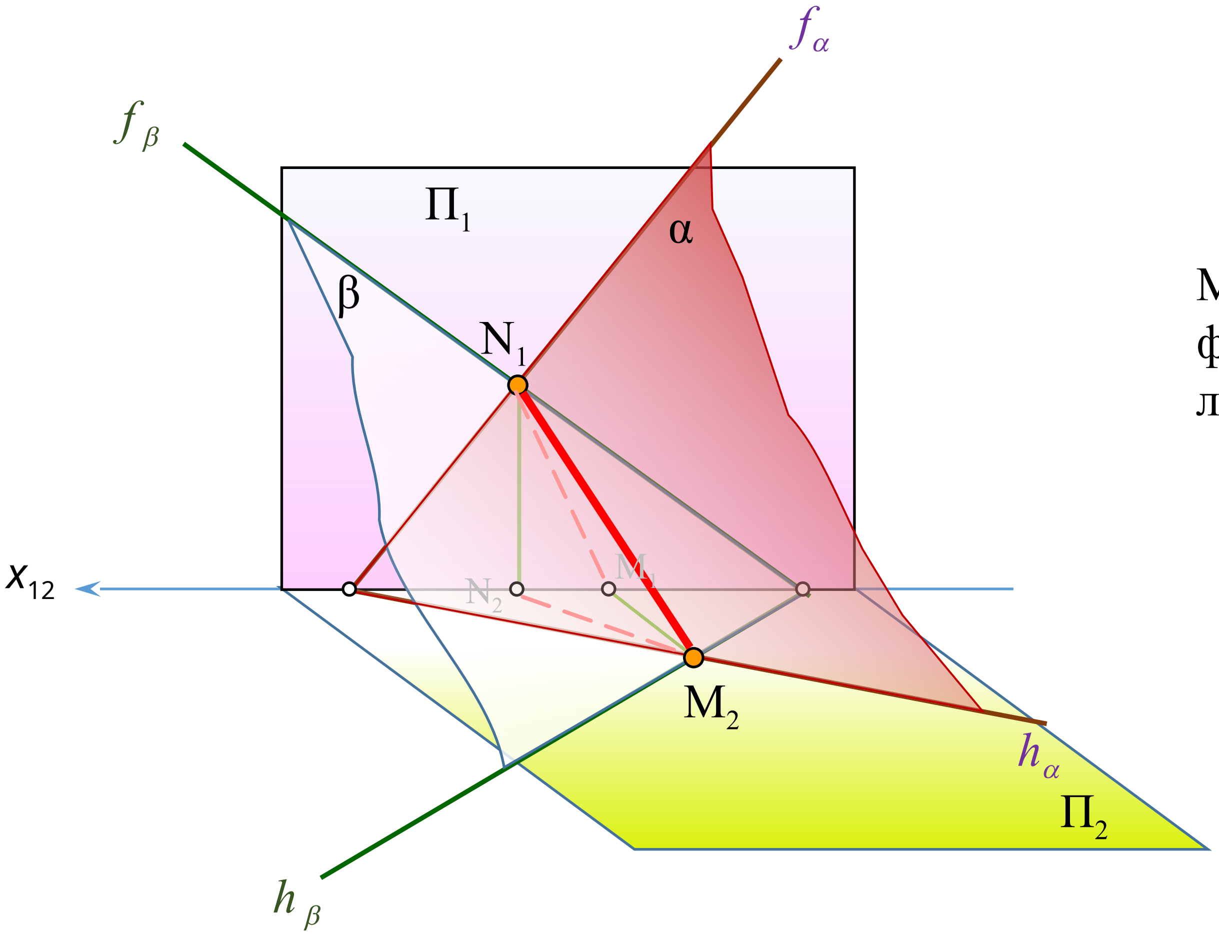
$(34)\cap(DE)=N$

$M_1\wedge N_1$

$M_2\wedge N_2$

Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор

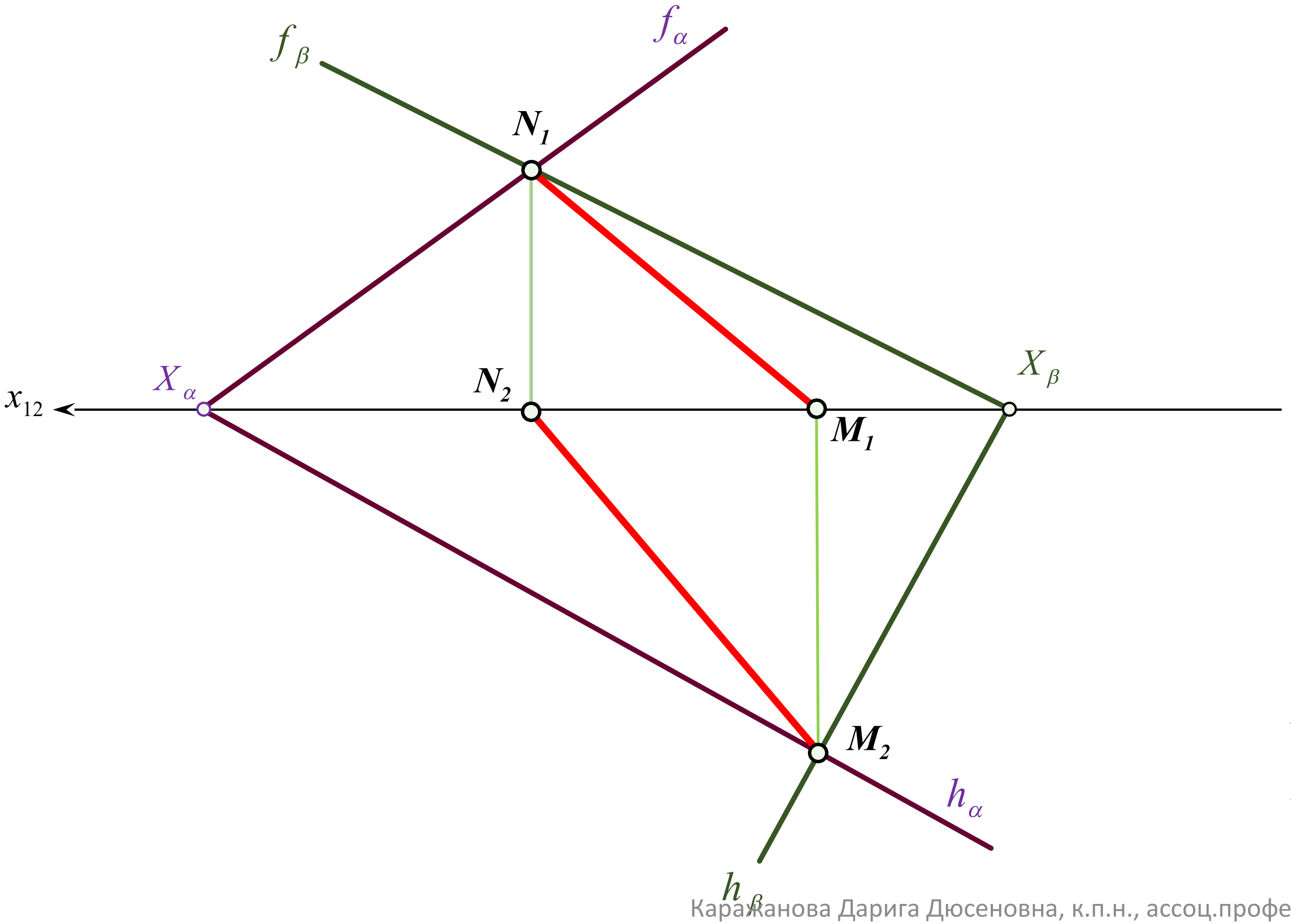
Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами



[MN]=α∩β

M,N–горизонтальный и фронтальный следы линии пересечения

Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами



$\alpha(f_\alpha , h_\alpha)$

$\beta(f_\beta , h_\beta)$

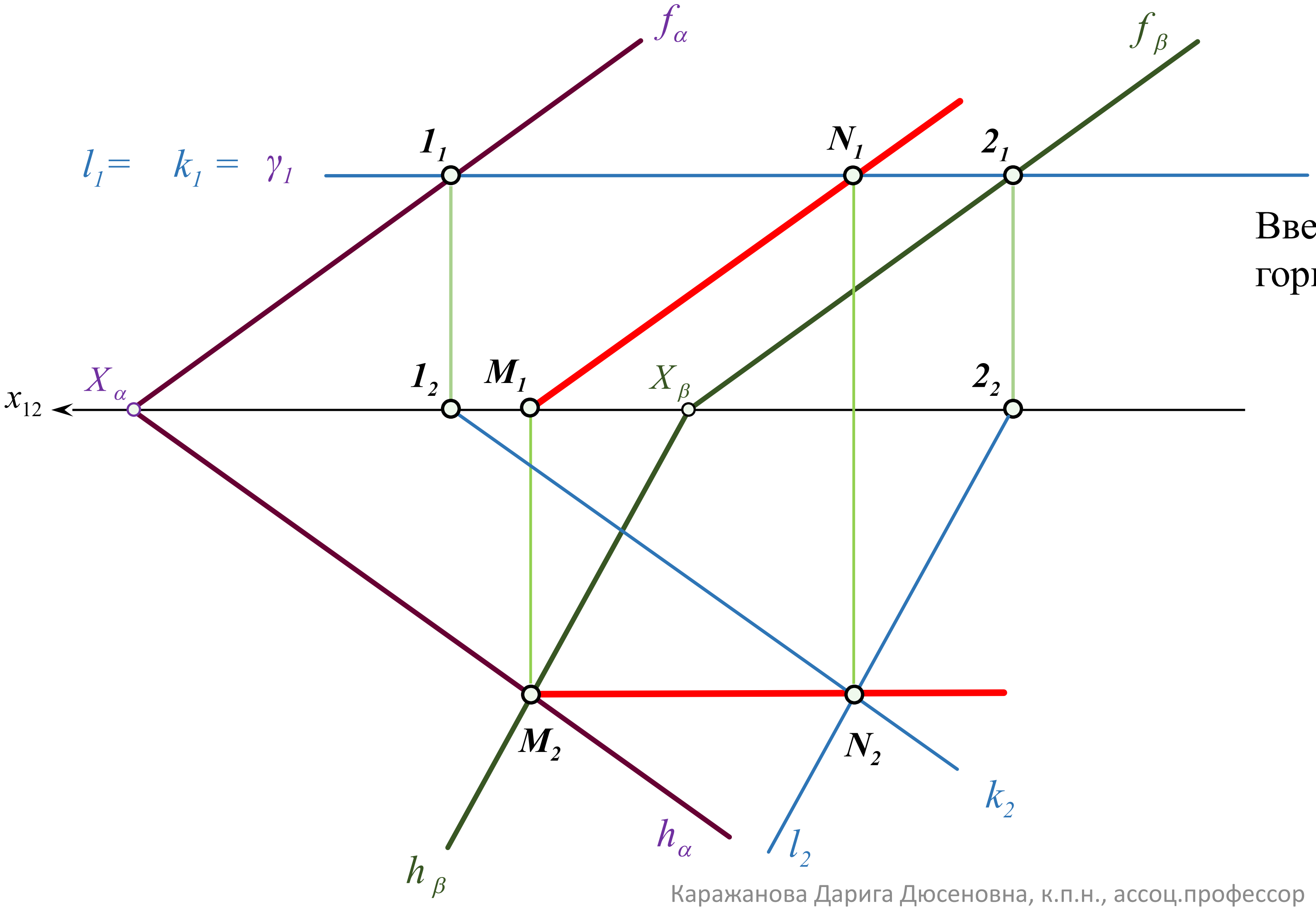
$h_\alpha \cap h_\beta = M$

$f_\alpha \cap f_\beta = N$

$\alpha(f_\alpha, h_\alpha) \cap \beta(f_\beta, h_\beta) = (MN)$

M – Горизонтальный след линии пересечения плоскостей α и β
N – Фронтальный след линии пересечения двух плоскостей α и β

Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами



$\alpha(f_\alpha , h_\alpha)$

$\beta(f_\beta , h_\beta)$

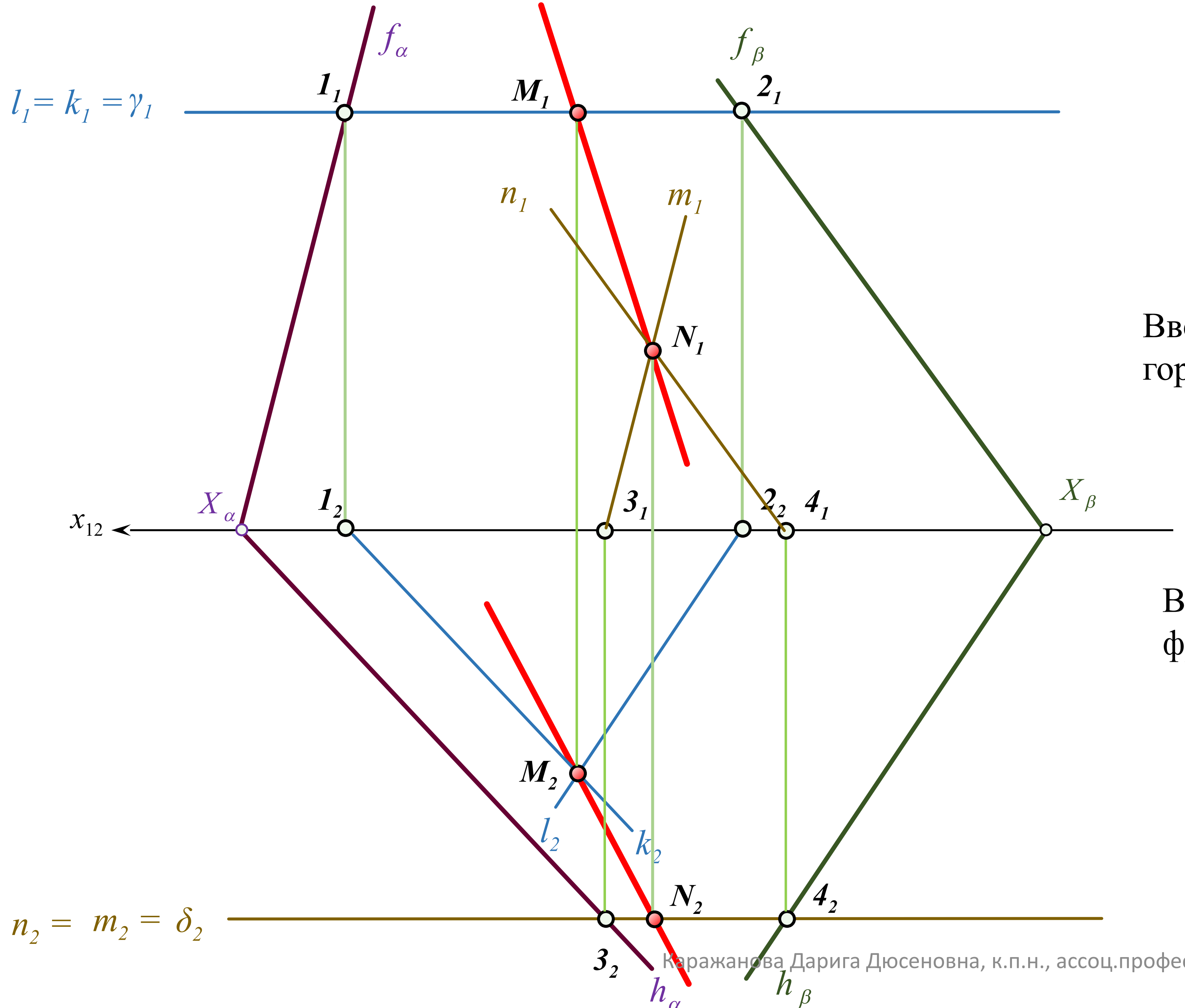
причём, f_β II f_α

Введем в чертеж вспомогательную горизонтальную секущую плоскость γ (γ_1)

$\alpha \cap \gamma = k$

$\beta \cap \gamma = l$

Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами



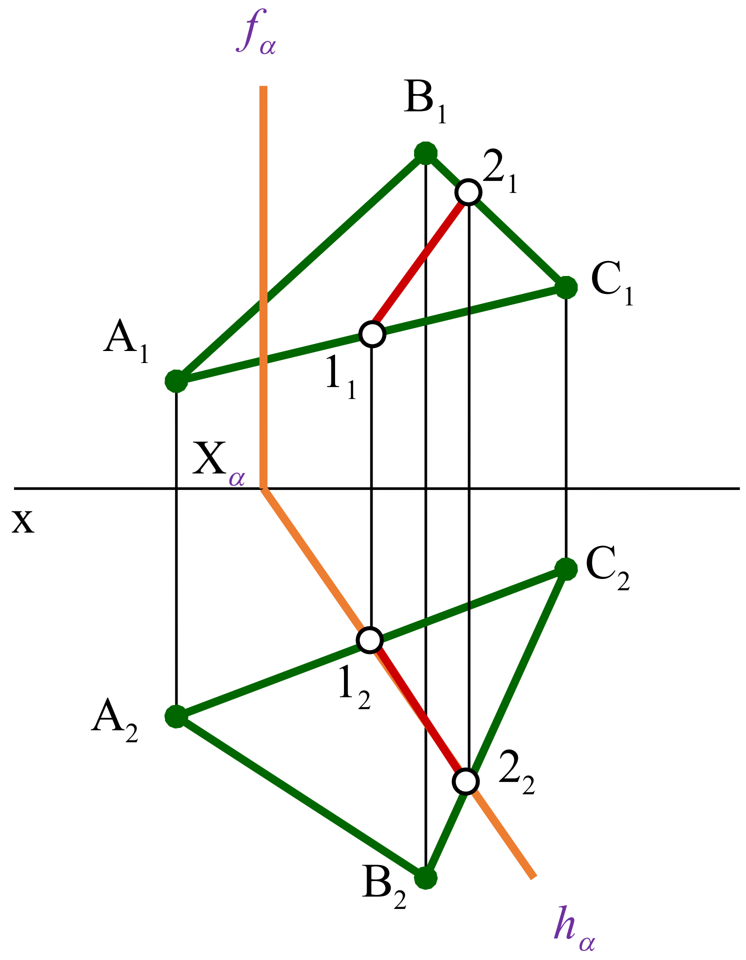
$\alpha(f_\alpha , h_\alpha)$

$\beta(f_\beta , h_\beta)$

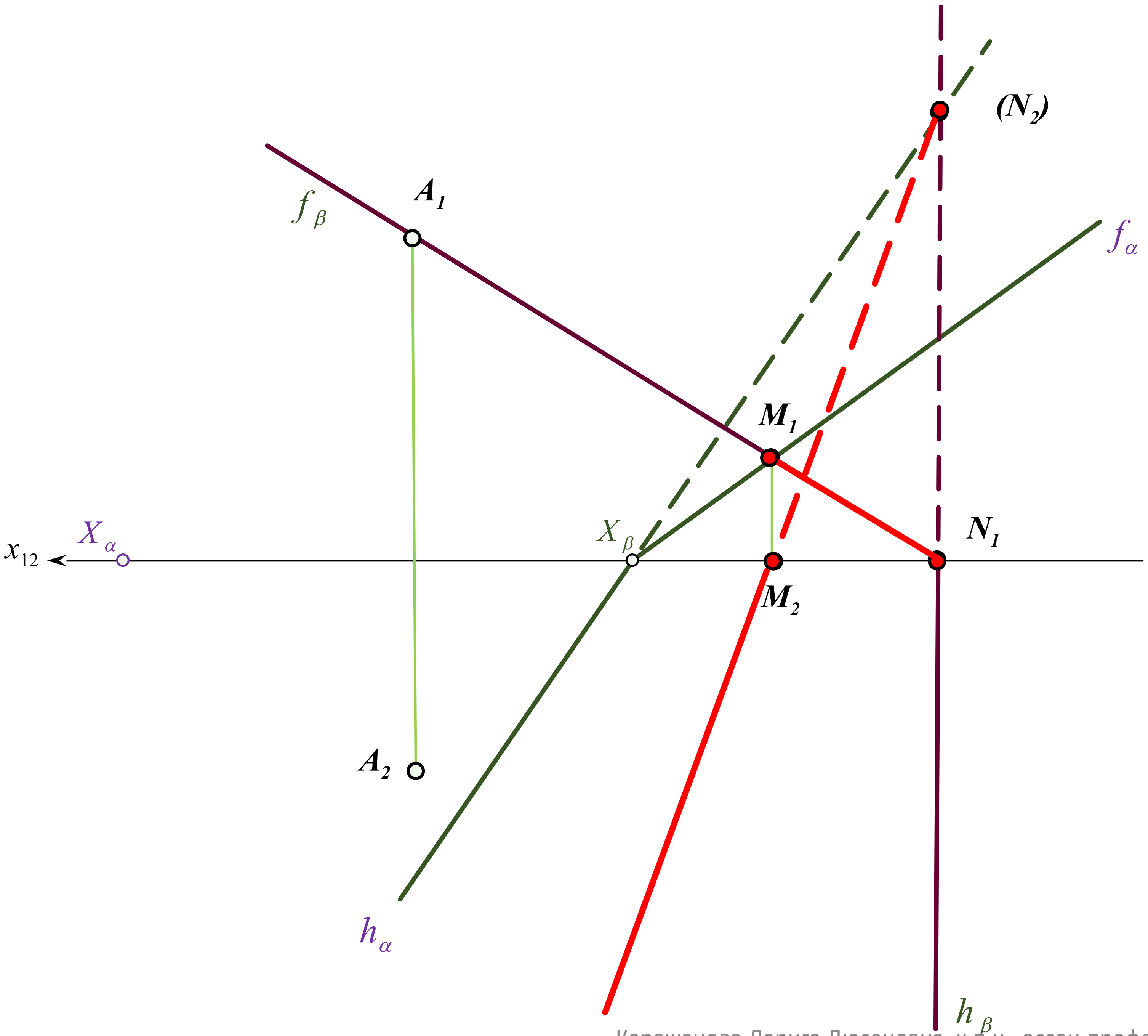
Введем в чертеж вспомогательную горизонтальную секущую плоскость γ (γ_1)

Введем в чертеж вспомогательную фронтальную секущую плоскость δ (δ_2)

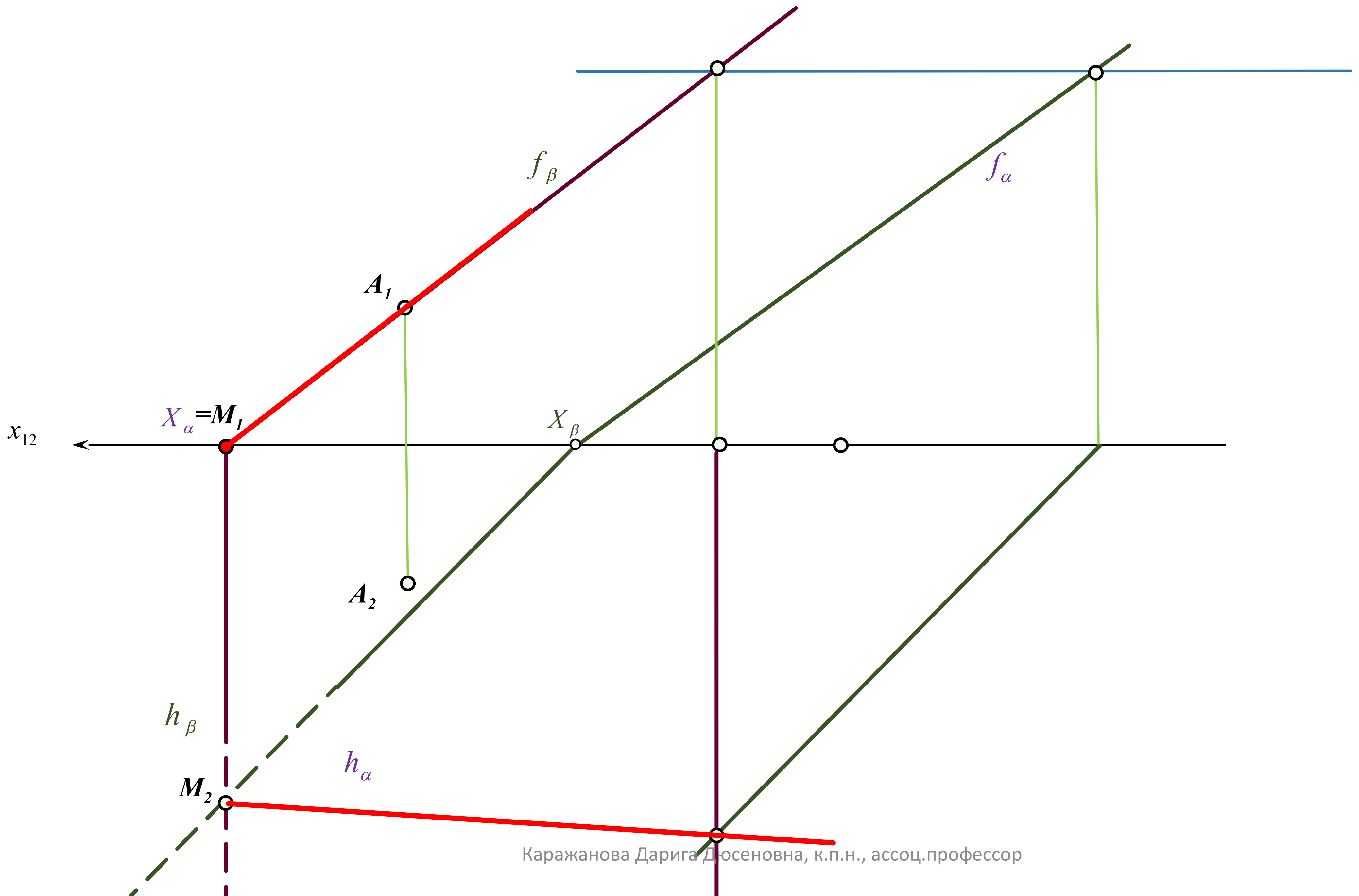
Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор



f_α
B_1
2_1
C_1
A_1
1_1
X_α
x
C_2
1_2
A_2
2_2
B_2
h_α



(N_2)
A_1
f_β
f_α
M_1
X_β
N_1
X_α
x_{12}
M_2
A_2
h_α
h_β



Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор