

# 3-ДӘРІС



---

Асқарұлы Қыдыр  
PhD., қауымдастырылған профессор

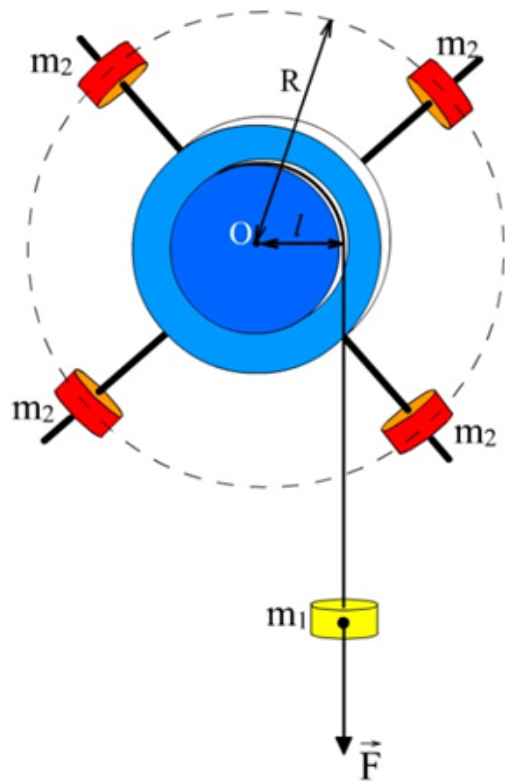
### *3 Қатты дененің айналмалы қозғалыс динамикасы*

Қатты дененің айналмалы қозғалыс динамикасын жылжымайтын осы бар Обербек маятнігінде бақылауға болады (3.1-сур.). Оның төрт жағындағы жүк массаларын ( $m_1$  және  $m_2$ ) және олардың айналу осыне қатысты симметриялы орналасу нүктелерін ( $l$  және  $R$ ) тәуелсіз өзгертуге болады. Бұл жүктерді өзгерткен кезде бұрыштық жылдамдық қалай өзгертінін қарастырайық (қалған үшеуі өзгермейді). 1) Егер  $m_1$  массаны арттырсақ  $F = m_1 g$  күшінің әсерінен маятник жылдам айналады, яғни айналып жатқан дененің бұрыштық үдеуі оған әсер етуші күштің шамасына ( $\varepsilon \sim F$ ) тәуелді болады.

2) Жіптің ұзындығы  $l$  артқан сайын маятник жылдам айналады. Демек, *айналып жатқан дененің бұрыштық үдеуі оған әсер етуші күштің айналу осі бойынша орналасуына байланысты* ( $\varepsilon \sim l$ ).

3) Егер  $m_2$ -ні арттырсақ маятник ақырын айналады, яғни оның бұрыштық үдеуі азаяды. Демек, *айналып жатқан дененің бұрыштық үдеуі оның массасына тәуелді*  $\varepsilon \sim \frac{1}{m_2}$ . 4) Жүктер ( $m_2$ ) орналасқан қашықтықты  $R$ -ды

арттырсақ маятник баяу айналады. Яғни, *айналып жатқан дененің бұрыштық үдеуі оның массасының айналу осі бойынша орналасуына* ( $\varepsilon \sim \frac{1}{R}$ ) тәуелді.



3.1-сурет. Обербек маятнігі

векторы.  $\vec{M}$  векторы  $O$  нүктесі арқылы өтеді. Ол сурет жазықтығына перпендикуляр және бізге қарай бағытталған.

Тәжірибе бойынша алынған нәтижеге жаңа екі физикалық шама енгізуімізге тура келеді; біріншісі бірдей уақытта күштің әсер етуін қарастырса, екіншісі айналып тұрған дене массасының бұрыштық жылдамдыққа әсерін сипаттайды. Бұл физикалық шамаларды күш моменті ( $\vec{M}$ ) және инерция моменті ( $J$ ) деп аталады.

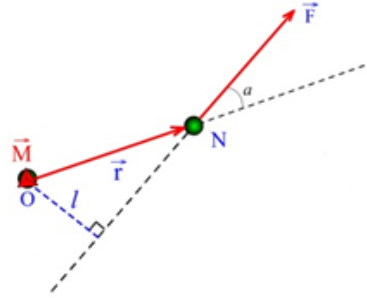
### 3.1 Күш моменті

Дене айналу үшін оған түсірілетін күш оське байланысты момент тудыруы қажет.  $\vec{F}$  күшінің моменті деп қозғалмайтын  $O$  (3.2-сур.) нүктесіне қатысты векторды айтамыз.

$$\vec{M} = \left[ \begin{array}{c} \vec{r} \\ \vec{F} \end{array} \right],$$

(3.1)

мұндағы  $\vec{r}$  - күштің түсірілу нүктесінің радиус-



3.2-сурет. Күш моменті

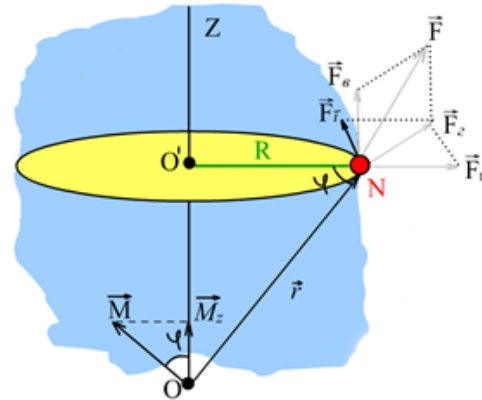
Мұндағы  $l = r \sin \alpha$  - күш иіні деп аталады ( $O$  нүктесінен күш сызығына жүргізілген перпендикуляр). Қозғалмайтын  $Z$  ось айналасында дене айналған кезде айналу моментін оған әсер етуші бір ғана күштің құраушысы тудырады (3.3-сурет), дәлірек айтқанда  $\vec{F}_\tau$ - нүкте траекториясына жүргізілген жанама. Демек,  $\vec{F}$  күшінің моменті  $O$  координат басына байланысты мынаған тең:

Күш моментінің модулінің теңдеуі:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot l, \quad (3.2)$$

Мұндағы  $l = r \sin \alpha$  - күш иіні деп аталады ( $O$  нүктесінен күш сызығына жүргізілген перпендикуляр). Қозғалмайтын  $Z$  ось айналасында дене айналған кезде айналу моментін оған әсер етуші бір ғана күштің құраушысы тудырады (3.3-

сурет), дәлірек айтқанда  $\vec{F}_\tau$ - нүкте траекториясына жүргізілген жанама. Демек,  $\vec{F}$  күшінің моменті  $O$  координат басына байланысты мынаған тең:



3.3-сурет. Қозғалмайтын  $Z$  осі бойымен дененің айналуы

Ол  $Z$  осі бойынша бағытталған, нақты нүктесі жоқ, оның модулі мынаған тең:

$$M_z = M \cos \varphi = F_\tau \cdot r \cdot \cos \varphi = F_\tau \cdot R, \quad (3.5)$$

мұндағы  $R$  -  $Z$  айналу осінен  $\vec{F}_\tau$  күш сызығына дейінгі қашықтық.

$$\vec{M} = \left[ \vec{r} \vec{F}_\tau \right]. \quad (3.3)$$

$\vec{M}$  векторының бағыты суретте көрсетілген. Оның модулі мынаған тең:

$$M = F_\tau \cdot r. \quad (3.4)$$

$Z$  осі бойынша  $\vec{M}_z$  күш моменті (3.3-сур.)  $\vec{M}$  векторының осы оське түсірілген проекциясы.

### 3.2 Дененің инерция моменті

Дененің инерция моменті - дененің айналу кезіндегі инерттілігін сипаттайтын шама.

Ілгерілемелі қозғалыс динамикасында дененің инерттілігін оның массасы анықтайды. Дененің айналмалы қозғалыс динамикасындағы қасиеттері ілгерілемелі қозғалысқа қарағанда күрделі болады.

*Материялық нүктенің  $J_z$  инерция моменті* айналу осі бойынша нүкте массасының  $m$  нүктеден осы оське дейінгі  $R$  арақашықтығының квадратына көбейтіндісіне тең:

$$J_z = m \cdot R^2 . \quad (3.6)$$

Дененің инерция моменті айналу осіне байланысты оның барлық материялық нүктелерінің инерция моменттерінің қосындысына тең:

$$J_Z = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \cdot R_i^2 . \quad (3.7)$$

Айналмалы қозғалыс кезіндегі дененің инерттілігіне дене пішіні мен геометриялық өлшемі, айналу осінен қандай қашықтықта орналасуы, массаның көлемдік орналасуы әсер етеді.



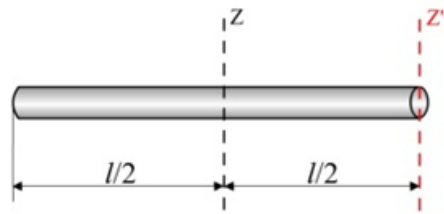
3.1 - кестеде кейбір дұрыс геометриялық пішінді денелердің инерция моменттері келтірілген.

3.1- кесте

Дене	Айналу осінің орналасуы	Инерция моменті
Қуыс жұқа қабырғалы радиусы $R$ цилиндр	Симметрия осі	$mR^2$
Радиусы $R$ тұтас цилиндр немесе дискі	Симметрия осі	$\frac{1}{2}mR^2$
Ұзындығы $l$ жіңішке стержень	Ось стерженнің ортасы арқылы өтеді және оған перпендикуляр.	$\frac{1}{12}ml^2$
Радиусы $R$ тұтас шар	Симметрия осі	$\frac{2}{5}mR^2$



Егер айналу осі дененің масса центрі арқылы өтпейтін болса, оның инерция моменті *Штейнер теоремасы* арқылы анықталады. *Штейнер теоремасы* кез-келген оське қатысты дененің инерция моментін  $J_Z$  осы оське параллель және массалар центрі арқылы өтетін оське қатысты дененің  $J_C$  инерция моментін осы осьтер арақашықтығының квадратын дене массасына көбейтіп қосқанға тең.



3.4-сурет. Біртекті жіңішке стержень

$$J_Z = J_C + m \cdot a^2. \quad (3.8)$$

Мысалы, біртекті жіңішке ұзындығы  $l$  массасы  $m$  стерженнің инерция моменті (3.4-сур.)  $Z'$  осьіне қатысты мынаған тең:

$$J_{Z'} = J_C + ma^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3}ml^2.$$

Айналу осін массалар центрінен стержень ұшына көшірсек, оның инерция моменті 4 есе артады.

---

*Бақылау сұрақтары:*

1. Айналмалы қозғалыс кезіндегі дененің инерция моментінің маңызы қандай және ол неге байланысты?
2. Қозғалмайтын нүктеге қатысты күш моменті дегеніміз не?
3. Қозғалмайтын оське қатысты күш моменті дегеніміз не?
4. Күш моментінің бағыты қалай анықталады?
5. Айналмалы және ілгерілімелі қозғалыс динамикасының негізгі теңдеулерін жаз.
6. Штейнер теоремасын қорытыңыз және жазыңыз.\_

---

Назарларыңызға рахмет!!!