6-ДӘРІС

Асқарұлы Қыдыр
PhD., қауымдастырылған профессор

Тербелістер мен толқындар

Тербеліс деп белгілі уақыт өткен сайын қайталанып отыратын қозғалыстар мен процестерді айтады. Тербелістер физикалық табиғатына қарай *механикалық, электрмагниттік, электрмеханикалық және т.б.* болып бөлінеді.

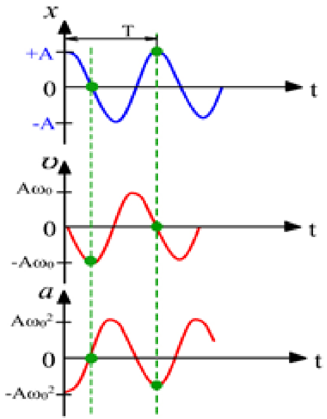
Еркін тербелістер деп жүйенің өз энергиясы есебінен жүретін тербелістерді айтады. *Еріксіз тербеліс*тер деп сыртқы периодты күш әсерінен жүретін тербелістерді айтады.

6.1 Механикалық гармониялық тербелістер және олардың сипаттамалары

Материялық нүктенің тепе-теңдіктен ауытқуы уақыт бойынша синус немесе косинус заңына сәйкес өзгеретін болса, ондай тербелістерді *гармониялық тербелістер* деп атайды:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0)\,, \tag{6.1}$$

мұндағы: A – *тербеліс амплитудасы* (нүктенің тепе-теңдіктен ең үлкен ауытқуы); $(\omega_0 t + \alpha_0)$ $-t$ уақыттағы *тербеліс фазасы*; ω_0 – *циклдік жиілік*; α_0 – бастапқы фаза, $t = 0$ болғандағы *тербеліс фазасы*. Нүктенің жылдамдығы мен үдеуі де x сияқты ω_0 жиілікпен гармониялық тербеліс жасайды (6.1-сурет):



6.1 – сурет. Гармониялық тербелістер. *Орын ауыстыру,жылдамдық және үдеу графиктері.*

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0) = A\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2})\,, \tag{6.2}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + \pi)\,. \tag{6.3}$$

Олардың амплитудалары сәйкесінше $A\omega_0$ және $A\omega_0^2$. Жылдамдық фазасы ығысу фазасынан $\frac{\pi}{2}$ алда, ал үдеу мен ығысу қарама-қарсы фазада болады. *Механикалық гармониялық тербелістердің* дифференциалдық теңдеуін (6.3) түрлендіру арқылы анықтауға болады:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0\,. \tag{6.4}$$

6.2 Гармониялық тербелістегі материялық нүкте энергиясы

Массасы m материялық нүкте тепе-теңдіктен x шамаға ауытқығанда, оған x *шамасына пропорционал, ауытқу бағытына кері* бағытталған F күш әсер етеді:

$$F = m \cdot a = m \cdot A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha_0 + \pi) = -m\omega_0^2 \cdot A\cos(\omega_0 t + \alpha_0) = -m\omega_0^2 \cdot x . \quad (6.5)$$

Бұл *квазисерпімді күш* – консервативтік күш. Сондықтан, гармониялық тербеліс кезінде кинетикалық энергия E_k мен потенциалдық энергия E_n бір-біріне түрленіп отырады, ал жүйенің толық энергиясы тұрақты болады.

Түзу сызықты гармониялық тербеліс жасап тұрған материялық нүктенің *кинетикалық, потенциалдық және толық энергиялары* келесі формулалармен анықталады:

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha_0); \qquad (6.6)$$

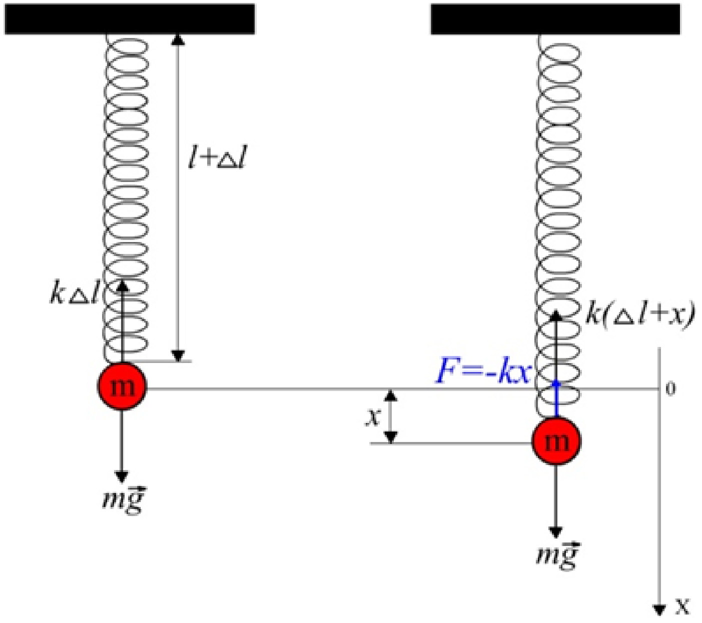
$$E_n = -\int_0^x F_x \cdot dx = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \alpha_0); \qquad (6.7)$$

$$E = E_{\hat{e}} + E_{\ddot{\imath}} = E_{k_{\max}} = E_{\ddot{\imath}\,\max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = const . \qquad (6.8)$$

6.3 Гармониялық осцилляторлар

Гармониялық осциллятор деп қозғалыс заңы (6.4) теңдеу арқылы сипатталатын жүйені айтады. Гармониялық осцилляторға серіппелік, физикалық және математикалық маятниктер мысал бола алады. *Серіппелік маятник* (6.2 – сурет) – абсолют серпімді серіппе мен оған ілінген, квазисерпімді $F=-kx$ (k –серіппе қатаңдығы) күш әсерінен тербелетін массасы m жүктен тұратын жүйе. Маятниктің қозғалыс заңы:

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \quad \text{немесе} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x. \qquad (6.9)$$



6.2 – сурет. Серіппелік маятник

(6.9), (6.4) теңдеулерден серіппелік маятник $x=A\cos(\omega_0 t+\alpha_0)$ заңы бойынша гармониялық тербеліс жасайтынын көреміз. Тербелістің циклдік жиілігі мен периоды келесі өрнектермен анықталады:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{және} \quad T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (6.10)$$

Физикалық маятник (6.3 – сурет) – C масса центрінен тыс жатқан 0 нүктесі арқылы өтетін горизонталь өстің айналасында ауырлық күші әсерінен тербеліс жасайтын қатты дене.

Маятник тепе-теңдік жағдайынан кіші α бұрышқа ауытқығанда оған кері бағытта әсер ететін ауырлық күшінің F_τ құраушысы

$$M = -F_\tau \cdot \ell = -mg\ell \sin\alpha = -m\,g\,l\,\alpha, \tag{6.11}$$

күш моментін тудырады. Мұндағы ℓ - физикалық маятниктің ұзындығы. Бұл өрнекті айналмалы қозғалыс үшін динамиканың негізгі заңына қойсақ:

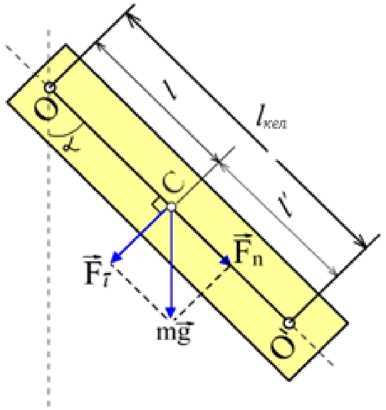
$$J\varepsilon = M\ ,$$

онда: $J\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = -m\,g\,l\,\alpha$, немесе

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2\,\alpha = 0, \tag{6.12}$$

мұндағы: J – маятниктің айналу өсіне қатысты инерция моменті.

Бұл теңдеудің түрі гармониялық осциллятордың қозғалыс заңымен сәйкес келеді. Олай болса физикалық маятник гармониялық тербеліс жасайды. Тербеліс параметрлері:

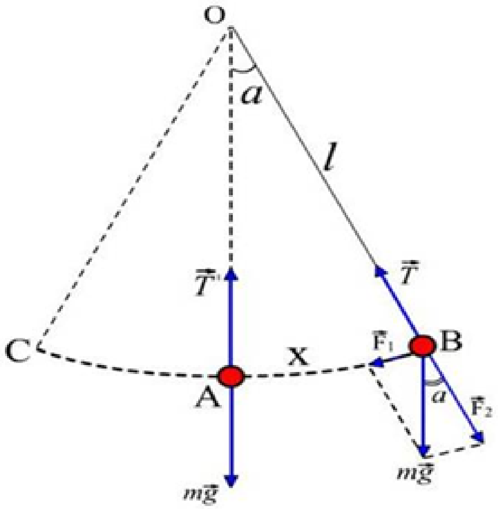


6.3 – сурет. Физикалық маятник

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}} = \sqrt{\frac{g}{\ell_{кел}}}\ ; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{кел}}{g}}\ , \tag{6.13}$$

мұндағы $\ell_{кел}$ - физикалық маятниктің келтірілген ұзындығы деп аталады:

$$\ell_{кел} = \frac{J}{m\ell} \tag{6.14}$$



6.4 – сурет. Математикалық маятник

Математикалық маятник (6.4 – сурет) – салмақсыз, созылмайтын, ұзындығы ℓ жіп пен оған ілінген, тек ауырлық күші әсерінен ғана тербелетін массасы m материялық нүктеден тұратын жүйе. Оны физикалық маятниктің дербес түрі ретінде қарастыруға болады. Сондықтан оның периодын (6.13) формуламен анықтауға болады. Тек J орнына материялық нүктенің O нүктесіне қатысты инерция моментін ($J = m\ell^2$), физикалық маятниктің келтірілген ұзындығының орнына жіптің ұзындығын қою керек:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \qquad (6.15)$$

(6.13) және (6.15) формулаларды салыстырсақ, физикалық маятниктің периоды ұзындығы $\ell_{кел} = \dfrac{J}{m\ell}$ болатын математикалық маятниктің периодымен бірдей болатынын көреміз. Сондықтан *физикалық маятниктің келтірілген ұзындығы* мен математикалық маятниктің ұзындығы тең болса, онда олардың периодтары да бірдей болады.

6.3 Өшетін тербелістер

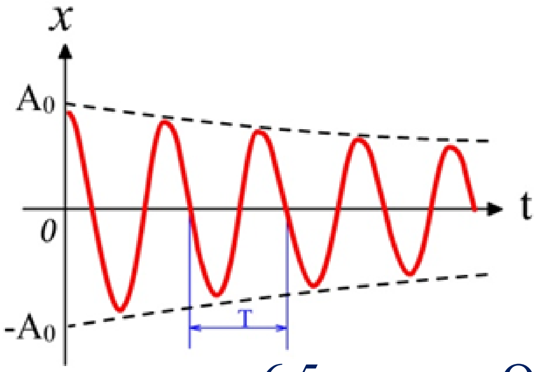
Өшетін тербелістер деп уақыт өткен сайын біртіндеп әлсірей беретін тербелістерді айтады. Жүйенің тербеліс энергиясы негізінен үйкеліске (диссипацияға) байланысты азаяды. Тұтқыр ортада тербелістегі денеге серпімділік (немесе квазисерпімді) күшінен басқа қозғалыс жылдамдығына пропорционал $F_r = -r\upsilon$ үйкеліс күші де әсер етеді, мұндағы r – үйкеліс коэффициенті, $\vec{\upsilon}$ –жылдамдық. Минус таңбасы $\vec{F_r}$ мен $\vec{\upsilon}$ векторларының бағыттары қарама-қарсы болатынын көрсетеді.

Еркін өшетін тербелістердің дифференциалдық теңдеуі: $ma = -kx - r\upsilon$, немесе $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + r\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$, немесе:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (6.16)$$

Мұндағы: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – осы жүйенің *еркін тербелісінің* ($\delta = 0$) *циклдік жиілігі,* $\delta = \dfrac{r}{2m}$ – *үйкеліс коэффициенті.* (6.16) теңдеудің тербелістің өшуі баяу ($\delta << \omega_0$) болғандағы шешуі:

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha). \qquad (6.17)$$



6.5 – сурет. Өшетін тербеліс

6.5 – суретте бұл функцияның графигі тұтас сызықпен көрсетілген.

Тербеліс амплитудасы ($A = A_0\, e^{-\delta t}$) уақыт бойынша экспонента заңымен кемиді (6.5 – суретте үзік-үзік сызықтармен келтірілген).

Амплитуданың <u>*е*</u> *есе кемуіне кеткен уақыт релаксация уақыты деп аталады:* $\tau = \dfrac{1}{\delta}$. *Өшетін тербелістің периоды келесі өрнекпен анықталады:*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}\,. \qquad (6.18)$$

Мұндағы: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – *өшетін тербелістің циклдік жиілігі.*

6.4 Еріксіз тербелістер

Нақты тербелмелі жүйелердегі тербеліс өшпеу үшін оның энергия шығынын сыртқы периодты күштер арқылы толықтырып отыру керек. Сыртқы периодты күштер әсерінен жүретін тербеліс *еріксіз тербеліс* деп аталады. Механикалық тербелмелі жүйеге әсер ететін сыртқы гармоникалық күш: $F_в = F_0 \cos\omega t$. Бұл күштің әсерінен жүйе келесі дифференциалдық теңдеумен сипатталатын еріксіз тербеліс жасайды:

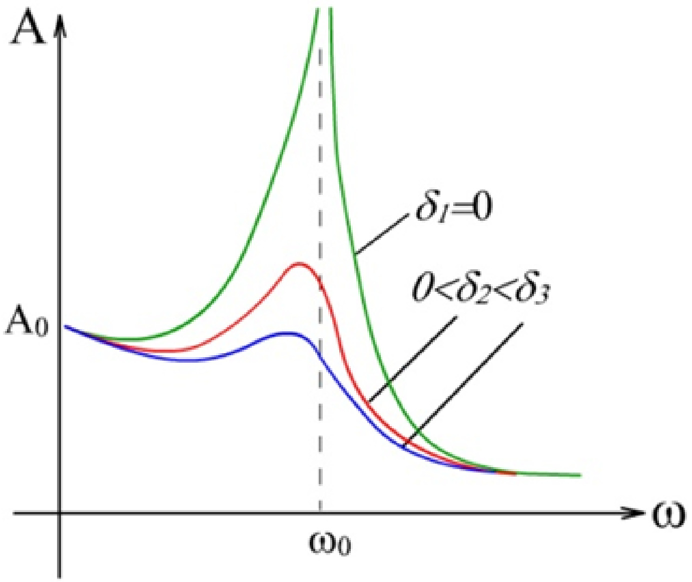
$$m a = -k x - r \upsilon + F_в \quad \text{немесе} \quad \frac{d^2 x}{d t^2} + 2\delta \frac{dx}{d t} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t \,, \qquad (6.19)$$

мұндағы: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – *еркін өшпейтін тербелістің циклдік жиілігі*; $\delta = \frac{r}{2m}$ – *өшу коэффициенті*; $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Бұл сызықтық біртекті емес дифференциалдық теңдеу. Оның шешуі біртекті теңдеудің жалпы шешуі $x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha)$ мен біртекті емес теңдеудің дербес шешуінің қосындысына тең. Жоғарыдағы теңдеудің дербес шешуі $x = A\cos(\omega t - \varphi)$ түрінде болады. Мұндағы A амплитуда мен φ бастапқы фаза келесі формулалармен анықталады:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\delta^2\,\omega^2}} \qquad \text{және} \qquad tg\varphi = -\frac{2\,\delta\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\,. \qquad (6.20)$$

Еріксіз тербеліс жиілігі $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ болғанда амплитуда максимум мәнге те болады.



6.6 – сурет. Резонанстық қисықтар

Бұл жиілік *резонанстық жиілік* деп аталады. Резонанс кезіндегі амплитуда $A_{рез} = \dfrac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$. Егер нөлге ұмтылса, $\omega \to 0$, онда барлық қисықтар *статикалық ауытқу* деп аталатын $A_0 = \dfrac{F_0}{m \cdot \omega_0^2}$ шектік мәнге тең болады.

Қума және тұрғын жазық толқындардың сипаттамалары 6.1 – кестеде берілген.

6.1–кесте

Қума толқын $\xi = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$	Тұрғын толқын $\xi = 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})\cos\omega t$
Тербеліс амплитудасы	
Орта нүктелерінің тербеліс амплитудалары A бірдей	Орта нүктелерінің тербеліс амплитудалары әртүрлі $A_m = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$
Тербеліс фазасы	
Тербеліс фазасы $(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$ қарастырылып отырған нүктенің x координатасына тәуелді	Екі түйіннің арасындағы барлық нүктелер бірдей фазада тербеледі. Түйін арқылы өткенде тербеліс фазасы π -ге өзгереді.
Энергия тасымалдануы	
Тербелмелі қозғалыс энергиясы толқынның таралу бағытында тасымалданады.	Энергия тасымалданбайды, λ_m шегінде энергияның өзара түрлену процесі жүреді

Бақылау сұрақтары:

1. Гармониялық тербеліске, оның амплитудасына, фазасына, периодына, циклдік жиілігіне анықтама беріңіз.

2. Гармониялық тербелістегі нүктенің жылдамдығы мен үдеуінің формуласын қорытып шығарыңыз.

3. Маятниктердің қандай түрлері сізге белгілі? Олардың ерекшеліктері қандай?

4. Гармониялық тербелістегі нүктенің кинетикалық, потенциалдық және толық энергияларының формуласын қорытып шығарыңыз және оны түсіндіріңіз.

Назарларыңызға рахмет!!!