

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ ЖОҒАРЫ БІЛІМ МИНИСТРЛІГІ
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ

Автоматика және ақпараттық технологиялар институты
«Электроника, телекоммуникация және ғарыштық технологиялар» кафедрасы



SATBAYEV
UNIVERSITY

№15 ДӘРІС

Тақырыбы: «Логикалық функцияларды қысқарту, алгебралық тәсілдер және Карно карталары»

Оқытушы: Хабай А.

ELC5511 «Электроника және схемотехника»

Алматы 2025 ж.

Логикалық функцияларды
қысқарту, алгебралық тәсілдер
және Карно карталары

F		$x_3 x_4$			
		00	01	11	10
$x_1 x_2$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

S_1
 S_2
 S_3

Дәрістің мақсаты мен міндеттері



1. Логикалық функцияларды алгебралық әдіспен ықшамдауды үйрену;
2. Тікелей орындалатын және қысқартылған өрнектер арасындағы айырмашылықты түсіну;
3. Карно картасының қолданылуын меңгеріп, логикалық функцияны көрсетілген өрнекке жеткізу;
4. Ең аз мүшелі ЕКО (Эквивалентті Қысқартылған Өрнек) табу және форматты өзгерту арқылы оңтайландыруды игеру.

Мазмұны

1. Кіріспе
2. Логикалық тізбектерді қысқарту
3. Карно Карталары
4. Қорытынды
5. Бақылау сұрақтары

Кіріспе

Логикалық функцияларды тікелей жүзеге асыру кейде тиімді болмайды көп транзистор мен қақпа талап етеді. Оны оңтайландыру үшін логикалық өрнектерді қысқарту қажет. Мысалы, өрнекті алгебралық ықшамдау ($7.29 \rightarrow 7.30$) арқылы инвертор, AND және OR қақпаларының саны азаяды. Ал бірнеше айнымалы болған жағдайда, Карно картасы сияқты графикалық әдістер тез әрі нақты нәтиже береді.

ЛОГИКАЛЫҚ ТІЗБЕКТЕРДІ ҚЫСҚАРТУ

Біз, бұл логикалық функцияларды қарапайым немесе минимум мүшелердің суммасы ретінде немесе максимум мүшелердің логикалық өнімі ретінде өрнектеуге болатынын көрдік. Дегенмен, осы өрнектердің кез келгенін тікелей жүзеге асыру, талап етілетін қақпалардың санын барынша азайту тұрғысынан алғанда жақсы схемаға болмауы мүмкін. Мысалы, мынадай тікелей жүзеге асырылатын, логикалық өрнекті қарастырайық

[illegible]

Бұл өрнекб екі инверторды, төрт AND қақпасын және бір OR қақпасын талап етуі мүмкін.

Бірінші жұп мүшелерін таратып, мынаны аламыз:

LEADS

Дегенмен, ~~БІЗ~~, сондықтан біз мынаны аламыз:

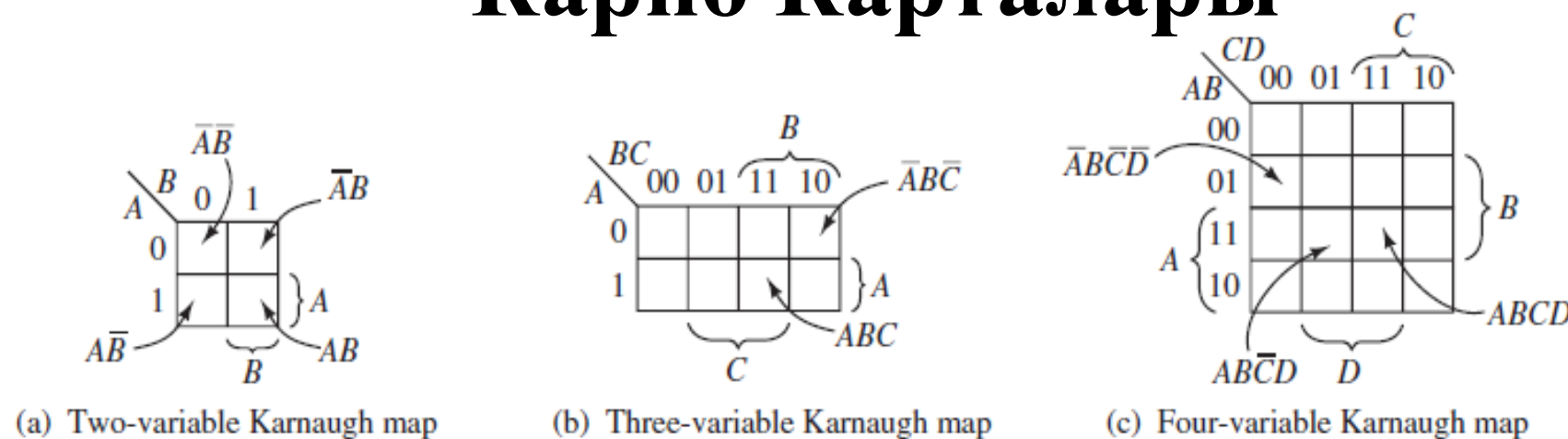
100

Әрине, егер $B \in D$ және D болса $B \in D$ болады. Бұл жағдайда $A \in D$ немесе $B \in D$ болады, себебі: бізде $A \in D$ немесе $A \in D$ болуы керек. Сондықтан $B \in D$ мүшесі:

$$\overline{EAD} \quad (7.30)$$

Тек қана бір инвертор, екі AND қақпасы және бір OR қақпасы бұл өрнекті жүзеге асыруға қажет болады.

Карно Карталары



7.28 - сурет. Карно карталары, кейбір квадраттарға сәйкес келетін минералдарды көрсететін карталар.

Карно картасы - бұл квадраттардың массиві. Әрбір квадрат логикалық айнымалылардың минтерм мәндердің біреуіне немесе сәйкесінше, шындық кестесінің қатар мәндерінің біреуіне сәйкес болады. 7.28- суретте, екі, үш және төрт айнымалыларға арналған Карно карталары көрсетілген. Екі айнымалы карта төрт квадраттан тұрады, олардың әрқайсысы минтермге сәйкес келеді. Осыған ұқсас, үш айнымалы картада сегіз квадрат бар, ал төрт айнымалы картада 16 квадрат болады.

Кейбір квадраттарға сәйкес келетін минтермдер 7.28-суретте көрсетілген. Мысалы, үш айнымалы карта үшін, минтермге ABC жоғарғы оң жақ квадратқа сәйкес келеді. Сондай-ақ, шындық кестесінің қатарына сәйкес келетін биттік комбинация, астыңғы сол жақта және картаның жоғарғы жағында көрсетілген. Мысалы, төрт айнымалы картада, шындық картасының 1101 қатары үшін, ABCD төрт биттік сөзі шындық кестесінің үшінші жолының (яғни 11-мен таңбаланған жол) және екінші бағанының (яғни, 11-мен таңбаланған баған) квадратына сәйкес келеді. Осылайша, кез-келген минтермге сәйкесті немесе кез-келген шындық кестесінің қатарына сәйкесті квадратты оңай табамыз.

Төрт айнымалы Карно картасының бүйірлік немесе жоғары жағындағы биттік үлгілердің тәртібі туралы ойланатын болсаңыз (мысалы, 00 01 11 10), бұл екі битті Грей код екенін ескеріңіз. Осылайша, жалпы жағы бар квадраттарға арналған үлгілер, тек бір битпен ерекшеленеді, осылайша, ұқсас минтермдер бірге топтастырылады. Мысалы, A-ны қамтитын(-дан басқа) минтермдер, әрбір картаның төменгі жартысында түседі. Төрт айнымалы картада, B-ны қамтитын минтермдер ортаңғы екі жолда болады, және сол сияқты. AB-ны қамтитын минтермдер үшінші жолда және сол сияқты. Осындай ұқсас мүшелерді топтастыру - логикалық тізбектерді жеңілдетудің кілті болып табылады.

Карно картасы – әр квадраты логикалық айнымалылардың минтермнің біреуін білдіретін, квадраттың тік төртбұрышты массиві.

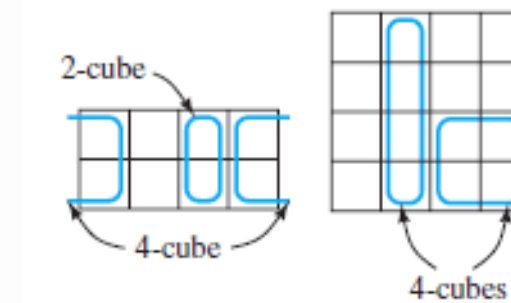
7.16 жаттығу

а. 7.28(с)-суретіндегі, Квадраттың жоғарғы оң жағына сәйкес келетін минтермдерін жазыңыз. **б.** Квадраттың астыңғы сол жағына сәйкес келетін минтермді жазыңыз.

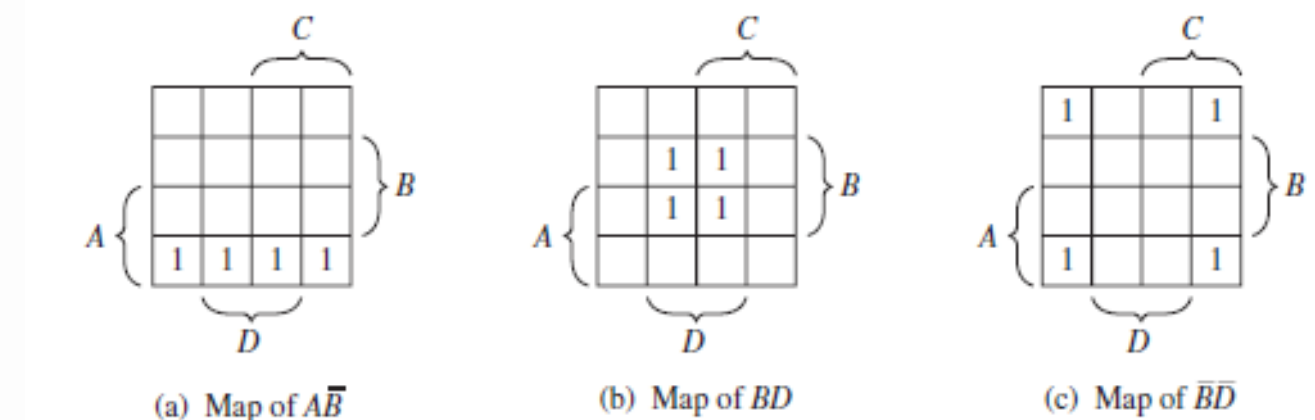
Жауабы: а. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; б. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Карно картасының сол және оң жақ (жоғарғы және төменгі жағы) шеті көршілес болып саналады.

Біз, ортақ екі шеті бар кубты екі квадрат деп атаймыз. Сол сияқты, ортақ шеттері бар төрт квадрат 4-куб деп аталады. Кубтарды орналастырған кезінде, карталар жоғарыдан төменге және солдан оңға қарай бүктеледі деп қарастырылады. Сол себепті, оң жағындағы квадраттар сол жақтағыларға іргелес болып саналады, және картаның жоғарғы жағы түбіне жалғасады. Демек, карта бұрыштарындағы төрт квадрат 4-кубты құрайды. Кейбір кубтар 7.29-суретте бейнеленген.



7.29-сурет. Кубтерді бейнелеген Карно картасы.



7.30-сурет. Екі айнымалының өнімдері, төрт айнымалы Карно картасында 4 куб ретінде бейнеленеді.

7.16 жаттығу

Логикалық функцияны бейнелеу үшін, логикалық функция 1 мәнін қабылдайтын квадратқа 1ді орналастырамыз. Өнім текшелерінде бірлерді көрсетеді. Мысалы, кейбір өнім терминдері 7.30-суретте бейнеленген.

Карно картасындағы іргелес квадраттардың тікбұрышты массивтері (текшелер деп те аталады) логикалық айнымалылардың немесе олардың инверсияларының өнімдері болып табылады.

Логикалық өрнек 1ге тең болатын аймақ үшін, ең аз және ең үлкен текшені тауып (араласуы да ықтимал), логикалық өрнек үшін ең аз ЕКО-ны аламыз.

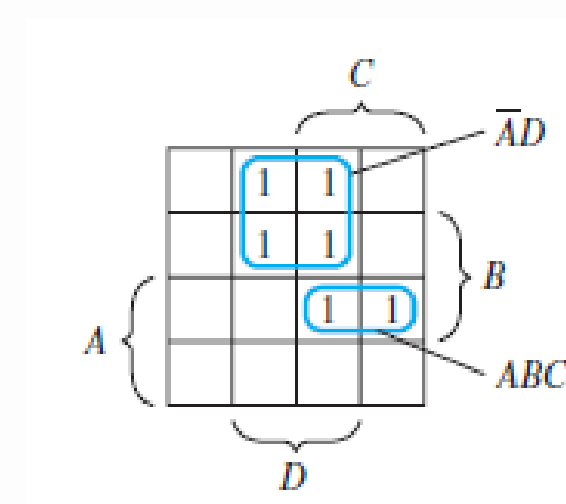
Төрт айнымалы карта - 16 квадраттан, бір логикалық айнымалыдан немесе оның инверсиясынан, 8-текшеден тұрады. Екі айнымалының өнімі (AB немесе $A\bar{B}$ сияқты) 4-текшені қамтиды. Үш айнымалының өнімі 2 текшеде бейнеленеді. Логикалық функцияның Карно картасы 7.31-суретте көрсетілген.

$$\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}} \quad (7.31)$$

1 ден тұратын квадраттар $\overline{AD}$ өніміне сәйкес келетін 4 текшеден және AB - ға сәйкес келетін 2 текшеден тұрады. Бұл картада 1 ді қамтитын ең үлкен текшелер болады. Осылайша, F үшін ең аз өнімнің суммасының (ӨС) өрнегі

$$\overline{FAD} \quad (7.32)$$

Карно картасында 1 ді қамтитын ірі текшелер жиынтығын табу оңай болғандықтан, біз логикалық функцияны бірден азайта аламыз.



7.31-сурет. 7.31-теңдеуінің логикалық функциясы үшін Карнауг картасы.
Картада $\overline{FAD}$ екендігі анық.

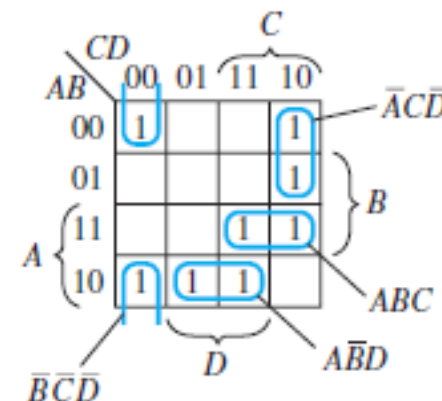
ЕКО-ның минимумы

Осы уақытқа дейін, біз логикалық сұлбалардың ЕКО минимумын табуға тырыстық. Дегенмен, төмендегі қадамдарды орындау арқылы, минималды ЕКО тізбектерін табу әдістерін оңай кеңейте аламыз:

1. Күткен нәтиже үшін Карно картасын жасаңыз.
 2. Карно картасын төңкеріп, 1лерді 0дерге және керісінше ауыстыр.
 3. Төңкерілген карта қамтитын, ең үлкен өлшемдегі ең аз текшені іздеңіз. Содан кейін, ең төменгі ЕКО өрнегін күтілген нәтиже үшін кері жазыңыз.
 4. ЕКО сөздерін ΘC өрнегіне аудару үшін Де Морган заңдарын қолданыңыз.
- Біз мысал келтірейік.

7.11-мысалдағы Логикалық айнымалы E үшін ΘC минимумын табыңыз.

Шешімі: E үшін Карно картасы 7.32-суретінде көрсетілген. $\bar{E}$ -ге арналған карта 1 лерді 0 дермен (бос квадраттар) ауыстыру арқылы немесе керісінше алмастырып алынады. Нәтиже 7.33-суретте көрсетілген.



7.33-сурет. 7.12-мысалдың Карно картасы. (бұл, 7.32-суретте көрсетілген картаның төңкерілген түрі).

Енді, картаның ішіндегі, бірлерді қамтитын, кішкене сандардың ең үлкен өлшемдегі текшелерін іздейміз. Әрине, 7.33-суретте, 8-текшелер немесе 4-текшелер жоқ. Картада жалпы сегіз бірлер пайда болады. Осылайша, картаны төрт 2-текшелермен жаба аламыз. Топтаудың бір нұсқасы суретте көрсетілген, ол мынадай болады:



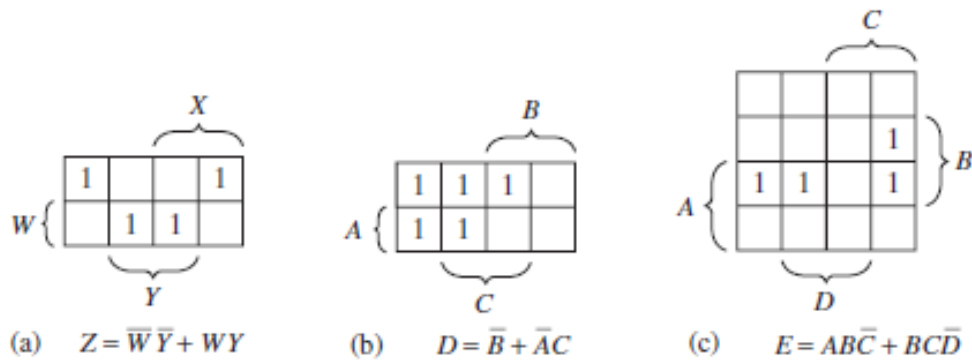
Келесінде, минимум СӨ-ні табу үшін, Де Морганның заңын пайдаланамыз



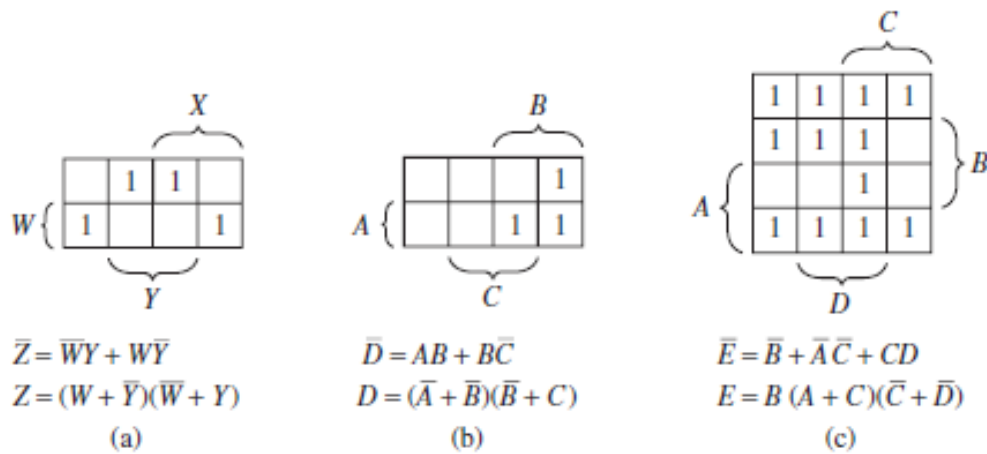
өзгеше топтастыруды тандап, 7.33-суретте көрсетілгендей, басқаша, бірдей болаты, жақсы форманы аламыз:



Сосын, Де Морганның заңын қолдансақ, СӨ-нің минимумының басқа түрін береді:



7.34-сурет. 7.17-жаттығудың жауабы.



7.35-сурет. 7.18-жаттығудың жауабы.

Қорытынды:

Алгебралық ықшамдау логикалық функцияларды жүзеге асырудағы аппараттық күрделілікті азайтады — AND және OR қақпаларының санын төмендетеді. Карно картасы — картографиялық тәсіл, ол логикалық функцияны жеңілдетуге көмектеседі: минтермдерді үлкен текшелерге топтастырып, ЕКО минимумын анықтайды. Сонымен қатар, Карно картасын төңкеріп ас эквивалентті СӨ (СОМПЛЕМЕНТТІ Өрнек) табуға болады, әрі Де Морган заңдарын пайдаланып, оны ӨС (Өнімнің Суммасы — SOP) түріне айналдыруға мүмкіндік бар.

Бақылау сұрақтары

1. Өрнекті алгебралық ықшамдауда қандай негізгі қадамдар қолданылды?
2. 7.29 және 7.30 өрнектері арасындағы айырмашылық неде?
3. Карно картасы дегеніміз не және ол не үшін қолданылады?
4. Карно картасындағы текшелер (кубтар) дегеніміз не және олар қалай табылады?
5. ЕКО мен СӨ арасындағы айырмашылық қалай анықталады?
6. Де Морган заңдары қандай жағдайда қолданылады және логикалық өрнектің түрленуіне қалай әсер етеді?
7. Карно картасын төңкеру арқылы не нәрсе табуға болады?
8. Ақпаратты игеру үшін бұл тақырып қандай практикалық мәнге ие?

Назарларыңызға рақмет!

