

Электротехниканың теориялық негіздері I

5-дәріс

Тармақталған тұрақты ток тізбектерін есептеу әдістері: контурлық токтар және түйіндік потенциалдар

Оқытушы: Мамадияров Максат Муратович, PhD, қауымдастырылған профессор

«Электроника, телекоммуникация және ғарыштық технологиялар» кафедрасы

m.mamadiyarov@satbayev.university

01

Кирхгоф әдісінің шектеулері және теңдеулер санын азайту

02

Контурлық токтар әдісі (КТӘ): идеясы және канондық теңдеулері

03

КТӘ бойынша есептеу алгоритмі мен мысалы

04

Түйіндік потенциалдар әдісі (ТПӘ): идеясы және теңдеулері

05

Екі түйін әдісі (Миллман теоремасы)

06

Көздерді түрлендіру және ток көзі бар тізбектер

07

Әдістерді салыстыру және компьютерлік есептеу

Дәріс соңында студент:

1

Тізбек үшін қажетті теңдеулер санын әр әдіс бойынша бағалайды

2

Меншікті және ортақ кедергілерді, контурлық ЭҚК-терді анықтайды

3

Контурлық токтар әдісімен тармақ токтарын есептейді

4

Түйіндік өткізгіштік матрицасын құрып, түйін потенциалдарын табады

5

Екі түйінді тізбекті Миллман формуласымен шешеді

6

Нақты есеп үшін ең тиімді әдісті таңдайды

Неліктен жаңа әдістер қажет?



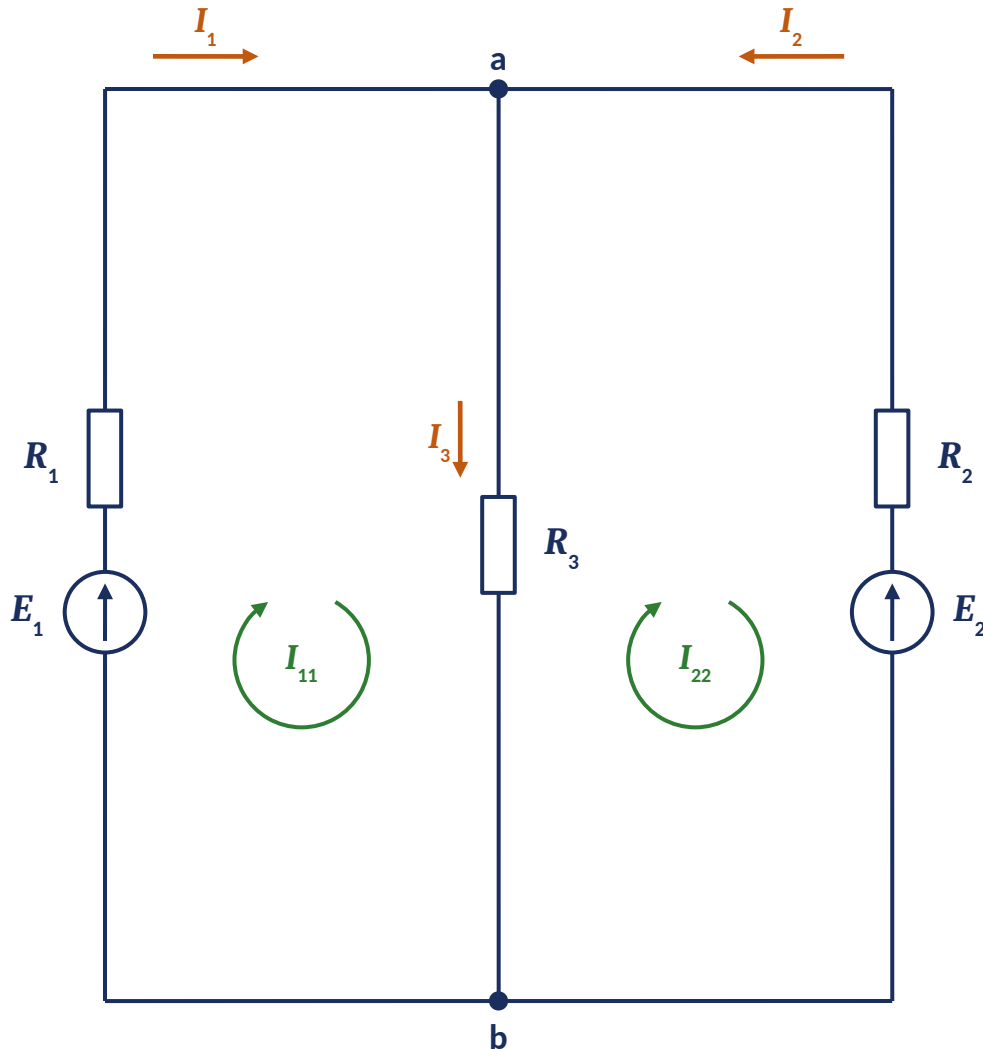
Кирхгоф заңдары бойынша белгісіз саны тармақтар санына p тең. Күрделі тізбектерде бұл өте көп теңдеу береді.

Әдіс	Белгісіздер	Теңдеулер саны	$p = 6, q = 4$ мысалы
Кирхгоф заңдары	тармақ токтары	p	6
Контурлық токтар әдісі	контурлық токтар	$p - q + 1$	3
Түйіндік потенциалдар әдісі	түйін потенциалдары	$q - 1$	3
Екі түйін әдісі ($q = 2$)	түйіндер арасындағы кернеу	1	—

НЕГІЗГІ ОЙ

Жалпы ереже: $p - q + 1 < q - 1$ болса — КТӘ, керісінше — ТПӘ тиімдірек.

Контурлық токтар әдісі: негізгі идея



Идея

- Әр тәуелсіз контурда шартты **контурлық ток** (I_{11}, I_{22}) айналады деп есептеледі
- Сыртқы тармақтағы нақты ток = сол контурдың тогы: $I_1 = I_{11}$
- Ортақ тармақтағы ток = контурлық токтардың алгебралық қосындысы: $I_3 = I_{11} - I_{22}$
- Кирхгофтың 1-заңы **автоматты түрде** орындалады

Екі тәуелсіз контурға арналған теңдеулер жүйесі (кез келген n контурға осылай кеңейтіледі):

$$R_{11} I_{11} + R_{12} I_{22} = E_{11}$$

$$R_{21} I_{11} + R_{22} I_{22} = E_{22}$$

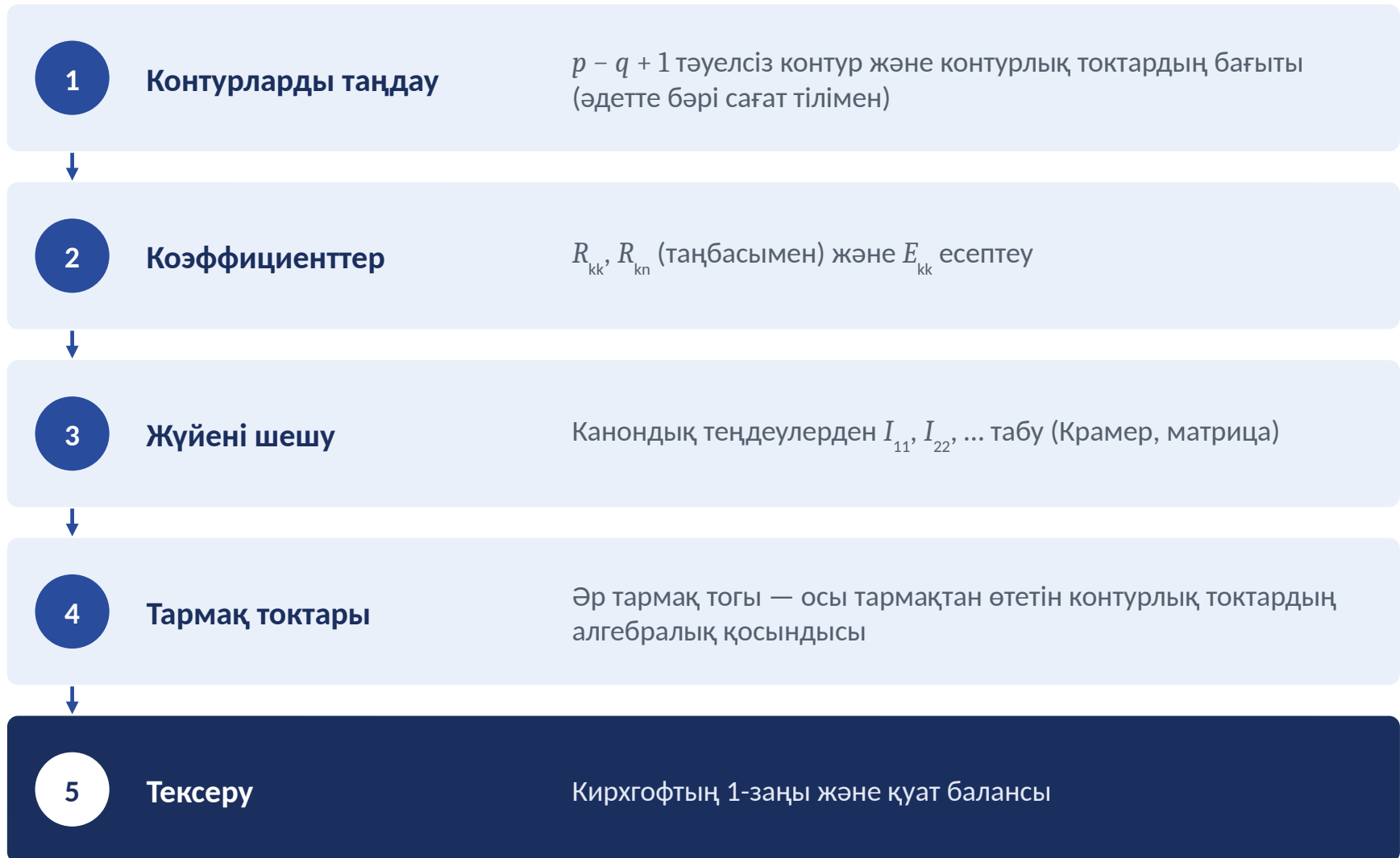
Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
R_{kk}	меншікті кедергі — k -контурдағы барлық кедергілердің қосындысы (әрқашан +)	Ом
R_{kn}	ортақ кедергі — k мен n контурларына ортақ тармақ кедергісі; контурлық токтар онда бағыттас болса «+», қарсы болса «-»	Ом
E_{kk}	контурлық ЭҚК — контурдағы ЭҚК-тердің алгебралық қосындысы	В

ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Әр теңдеу — Кирхгофтың 2-заңы, бірақ белгісіз ретінде тек контурлық токтар алынған.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Матрицалық түрде: $[R][I_k] = [E_k]$. Кедергі матрицасы симметриялы: $R_{kn} = R_{nk}$.



Мысал: 4-дәрістегі тізбекті КТӘ-мен шешу



БЕРІЛГЕНІ

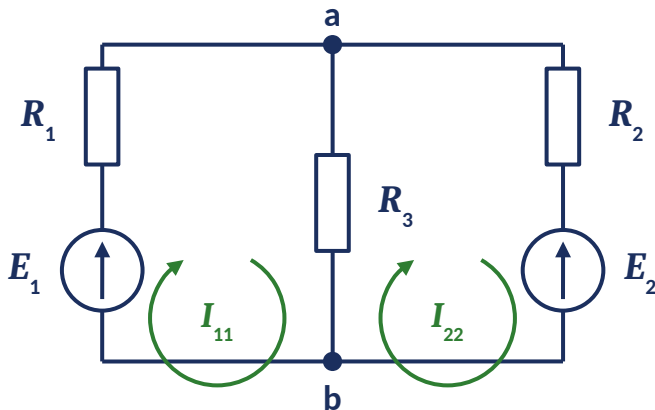
$$E_1 = 30 \text{ В}, E_2 = 12 \text{ В}$$

$$R_1 = 3, R_2 = 6, R_3 = 6 \text{ Ом}$$

контурлық токтар сағат тілімен

ТАБУ КЕРЕК

$$I_{11}, I_{22}, I_1, I_2, I_3$$



ШЕШУІ

Коэффициенттер

1

$$R_{11} = 3 + 6 = 9; R_{22} = 6 + 6 = 12; R_{12} = -6 \text{ Ом}$$

Контурлық ЭҚК

2

$$E_{11} = +30 \text{ В}; E_{22} = -12 \text{ В} (E_2 \text{ айналуға қарсы})$$

Теңдеулер

3

$$9I_{11} - 6I_{22} = 30; -6I_{11} + 12I_{22} = -12$$

Шешім

4

$$I_{11} = 4 \text{ А}; I_{22} = 1 \text{ А}$$

Тармақ токтары

5

$$I_1 = I_{11} = 4; I_2 = -I_{22} = -1; I_3 = I_{11} - I_{22} = 3 \text{ А}$$

ЖАУАБЫ

Нәтиже Кирхгоф әдісімен бірдей, бірақ 3 емес, 2 теңдеу шешілді

Ток көзі тармақтың тогын алдын ала белгілейді — бұл теңдеулер санын азайтады.

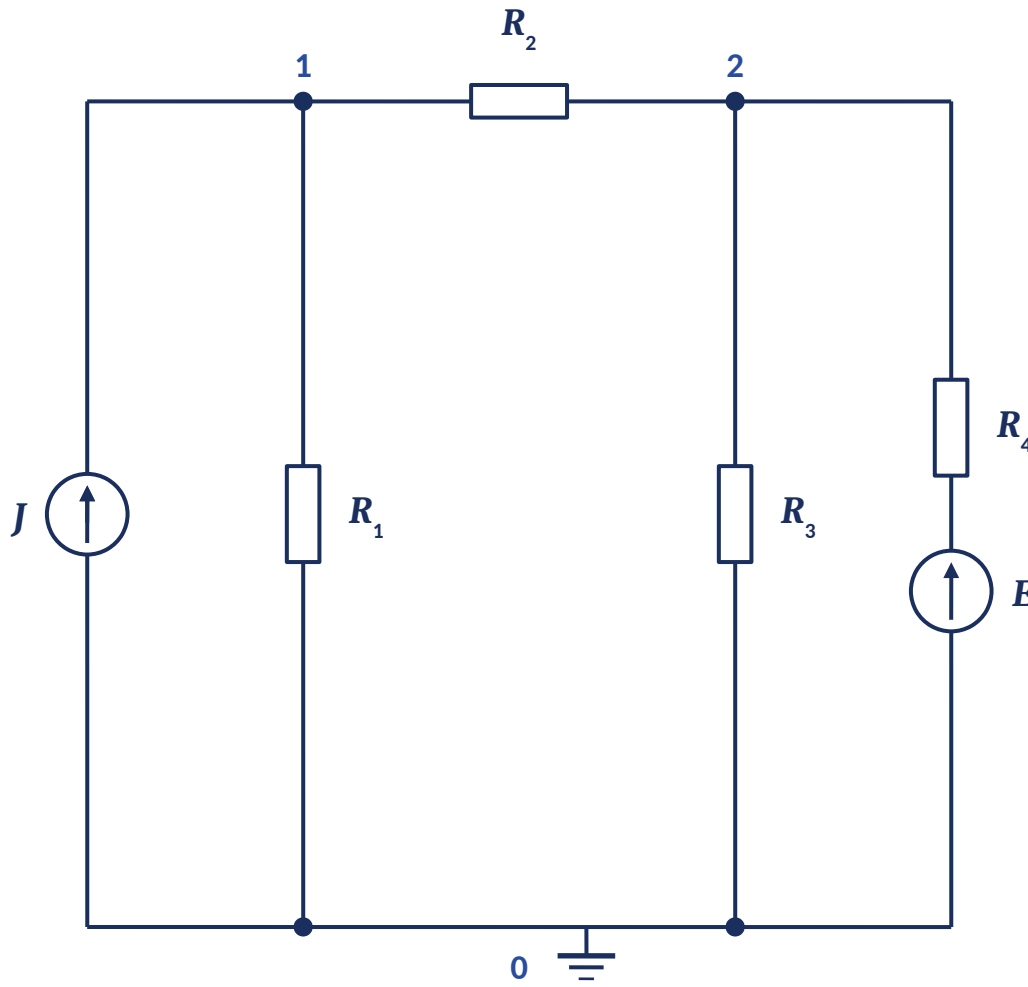
Контурлық токтар әдісінде

- Контурларды ток көзі **тек бір** контурға кіретіндей таңдайды
- Ол контурдың тогы белгілі: $I_{kk} = J$
- Теңдеулер саны: $p - q + 1 - n_j$
- Ток көзінің кернеуі кейін 2-заңнан табылады

Түйіндік потенциалдар әдісінде

- Ток көзі түйіндік токқа тікелей кіреді: J_{kk}
- Ток көзі бар тармақтың өткізгіштігі G -ге **кірмейді** (ішкі өткізгіштігі нөл)
- ТПӘ ток көздері бар тізбектер үшін ең ыңғайлы
- Кернеу көзін ток көзіне түрлендіру тиімді

Түйіндік потенциалдар әдісі: негізгі идея



Идея

- Бір түйіннің потенциалы нөл деп алынады (**базистік түйін**, «жер»)
- Белгісіздер — қалған $q - 1$ түйіннің потенциалы: φ_1, φ_2
- Тармақ тогы Ом заңымен табылады: $I_{ab} = (\varphi_a - \varphi_b + E)g$
- Кирхгофтың 2-заңы **автоматты түрде** орындалады

Базистік түйіннен басқа әр түйін үшін Кирхгофтың 1-заңы потенциалдар арқылы жазылады:

$$\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 &= J_{11} \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 &= J_{22} \end{aligned}$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
G_{kk}	меншікті өткізгіштік — k -түйінге қосылған тармақтар өткізгіштіктерінің қосындысы	См
G_{kn}	ортақ өткізгіштік — k мен n түйіндерін тікелей қосатын тармақтар өткізгіштігі (теңдеуде «-»)	См
J_{kk}	түйіндік ток — $\sum E g$ (ЭҚК түйінге бағытталса «+») және түйінге келетін J	А

ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Әр теңдеу — түйін үшін токтар балансы; потенциалдар табылған соң барлық токтар Ом заңынан шығады.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Матрицалық түрде: $[G][\varphi] = [J]$. Көп түйінді желілерде (энергосүйе, SPICE) негізгі әдіс.

Екі түйін әдісі (Миллман теоремасы)



Тізбекте тек екі түйін болса ($q = 2$), бір ғана белгісіз — түйіндер арасындағы кернеу:

$$U_{ab} = \Sigma E_k g_k / \Sigma g_k$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
U_{ab}	a және b түйіндері арасындағы кернеу	В
$E_k g_k$	ЭҚК мен тармақ өткізгіштігінің көбейтіндісі (E a түйініне бағытталса «+»)	А
Σg_k	барлық параллель тармақтар өткізгіштіктерінің қосындысы	См

ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Параллель тармақтардың «салмақталған орташа» ЭҚК-сі — 4-дәрістегі параллель көздер формуласымен бірдей.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Кез келген санды параллель тармақтан тұратын екі түйінді тізбек. Тармақ тогы: $I_k = (E_k - U_{ab})g_k$.

Мысал: сол тізбекті екі түйін әдісімен шешу



БЕРІЛГЕНІ

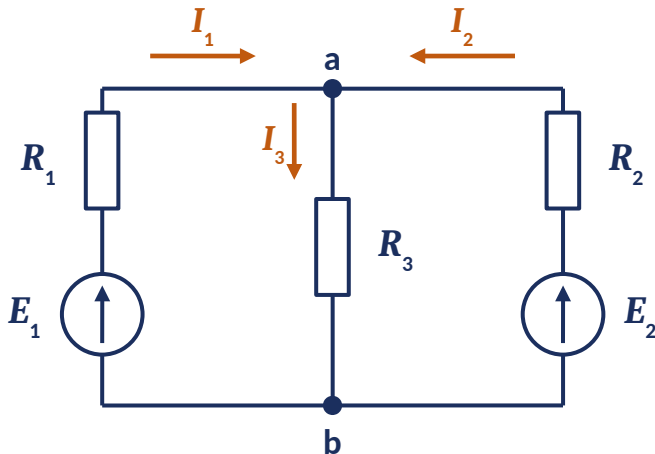
$$E_1 = 30 \text{ В}, R_1 = 3 \text{ Ом}$$

$$E_2 = 12 \text{ В}, R_2 = 6 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 6 \text{ Ом (ЭҚК жоқ)}$$

ТАБУ КЕРЕК

$$U_{ab}, I_1, I_2, I_3$$



ШЕШУІ

Өткізгіштіктер

1

$$g_1 = 1/3; g_2 = 1/6; g_3 = 1/6 \text{ СМ}; \Sigma g = 2/3 \text{ СМ}$$

Түйіндік кернеу

2

$$U_{ab} = (30 \cdot 1/3 + 12 \cdot 1/6) / (2/3) = 12 / (2/3) = 18 \text{ В}$$

1-тармақ

3

$$I_1 = (E_1 - U_{ab})g_1 = (30 - 18)/3 = 4 \text{ А}$$

2-тармақ

4

$$I_2 = (E_2 - U_{ab})g_2 = (12 - 18)/6 = -1 \text{ А}$$

3-тармақ

5

$$I_3 = U_{ab}g_3 = 18/6 = 3 \text{ А}$$

ЖАУАБЫ

Бір ғана теңдеу: $U_{ab} = 18 \text{ В} \Rightarrow I_1 = 4, I_2 = -1, I_3 = 3 \text{ А}$

Мысал: үш түйінді тізбек (ТПӘ)



БЕРІЛГЕНІ

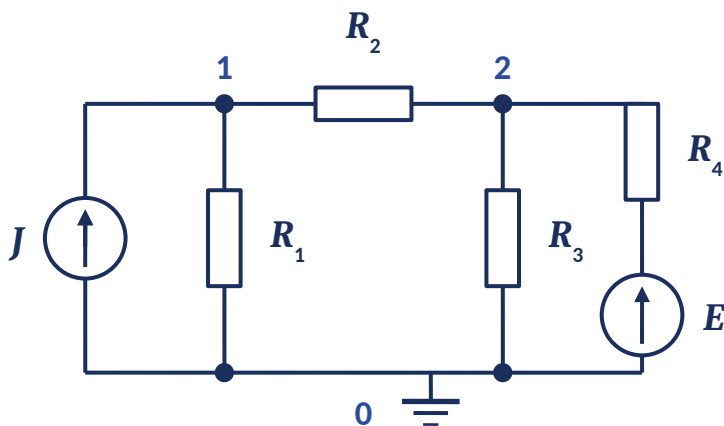
$$J = 2,5 \text{ A}, E = 20 \text{ В}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 5 \text{ Ом}; 0\text{-түйін базистік}$$

ТАБУ КЕРЕК

φ_1, φ_2 , тармақ токтары



ШЕШУІ

Өткізгіштіктер

1 $G_{11} = 0,1 + 0,1 = 0,2; G_{22} = 0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,4; G_{12} = 0,1 \text{ См}$

Түйіндік токтар

2 $J_{11} = J = 2,5 \text{ A}; J_{22} = E/R_4 = 20/5 = 4 \text{ A}$

Теңдеулер

3 $0,2\varphi_1 - 0,1\varphi_2 = 2,5; -0,1\varphi_1 + 0,4\varphi_2 = 4$

Потенциалдар

4 $\varphi_1 = 20 \text{ В}; \varphi_2 = 15 \text{ В}$

Токтар

5 $I_{R1} = 2; I_{R2} = (20 - 15)/10 = 0,5; I_{R3} = 1,5; I_4 = (20 - 15)/5 = 1 \text{ A}$

ЖАУАБЫ

$\varphi_1 = 20 \text{ В}, \varphi_2 = 15 \text{ В};$ тексеру: 1-түйін $2,5 = 2 + 0,5 \checkmark$

Нақты кернеу көзі мен нақты ток көзі сыртқы тізбек үшін эквивалентті, егер:

Кернеу көзі (E, r)



$$J = E/r, \quad g = 1/r$$

- ТПӘ алдында қолданылады: ЭҚК бар тармақ түйіндік токқа айналады

Ток көзі (J, g)



$$E = J/g = Jr$$

- КТӘ алдында қолданылады: ток көзі ЭҚК-ке айналады

НАЗАР АУДАРЫҢЫЗ

Идеал көздерді ($r = 0$ кернеу көзі немесе $g = 0$ ток көзі) өзара түрлендіруге болмайды.

Критерий	Кирхгоф заңдары	Контурлық токтар	Түйіндік потенциалдар
Белгісіздер	тармақ токтары	контурлық токтар	түйін потенциалдары
Теңдеулер саны	p	$p - q + 1$	$q - 1$
Қолайлы жағдай	шағын тізбек, оқу мақсаты	контурлар аз, түйіндер көп	түйіндер аз, параллель тармақтар көп
Ток көзі	қосымша белгісіз	контурдың тогы белгілі	түйіндік токқа тікелей кіреді
Компьютерлік іске асыру	сирек	жазық сұлбаларда	SPICE, энергожүйе режимдері

ЕСКЕРТУ

Кез келген әдістің нәтижесі бірдей — әдіс таңдау тек есептеу көлеміне әсер етеді.

Матрицалық жазылуы

$$[G][\varphi] = [J] \Rightarrow [\varphi] = [G]^{-1}[J]$$

Өткізгіштік матрицасы симметриялы, диагоналы басым — сандық шешуге қолайлы.

SPICE және симуляторлар

Модификацияланған түйіндік әдіс (MNA) — ТПӘ-нің кернеу көздерін де қамтитын нұсқасы. LTspice, Multisim, PSpice осыған негізделген.

Энергожүйе режимдері

Жүздеген қосалқы станциясы бар желілердің режимі түйіндік өткізгіштік матрицасы $[Y]$ арқылы есептеледі.

Python-да шешу

`numpy.linalg.solve(G, J)` функциясы үлкен жүйелерді бір жолмен шешеді. Бұл 15-дәрістегі модельдеудің негізі.

- 1 Контурлық ток нақты ток па? Оны қандай тармақта өлшеуге болады?
- 2 Неліктен КТӘ-де Кирхгофтың 1-заңы, ал ТПӘ-де 2-заңы автоматты түрде орындалады?
- 3 Ортақ кедергінің таңбасы неге контурлық токтардың бағытына тәуелді?
- 4 Базистік түйінді таңдау нәтижеге әсер ете ме? Қандай түйінді таңдаған тиімді?
- 5 Екі түйін әдісінің формуласы параллель көздердің баламалы ЭҚК формуласымен неге сәйкес келеді?
- 6 Ток көзі бар тармақтың өткізгіштігі неге G_{kk} -ге кірмейді?
- 7 $p = 10$, $q = 4$ тізбек үшін қай әдіс тиімді және неге?

Қорытынды



КТӘ белгісіздер санын $p - q + 1$ -ге, ТПӘ $q - 1$ -ге дейін азайтады



КТӘ канондық теңдеулері: $[R][I_{\kappa}] = [E_{\kappa}]$; ортақ кедергі таңбасы контурлық токтардың бағытына тәуелді



ТПӘ теңдеулері: $[G][\varphi] = [J]$; тармақ тогы $I = (\varphi_a - \varphi_b + E)g$



Екі түйінді тізбек Миллман формуласымен бір қадамда шешіледі: $U_{ab} = \Sigma E g / \Sigma g$



Әдісті таңдау теңдеулер санымен анықталады; компьютерлік есептеулер негізінен түйіндік әдіске сүйенеді

ӘДЕБИЕТ (силлабус бойынша)

[5] Floyd T. L., Buchla D. M. Principles of Electric Circuits, 10th ed. — 365–395 б.; [1] Alexander C. K., Sadiku M. N. O. Fundamentals of Electric Circuits, 7th ed. — 3-тапай