

Электротехниканың теориялық негіздері I

7-дәріс

Синусоидалы токтың негізгі ұғымдары және синусоидалы шамаларды кешенді түрде кескіндеу

Оқытушы: Мамадияров Максат Муратович, PhD, қауымдастырылған профессор

«Электроника, телекоммуникация және ғарыштық технологиялар» кафедрасы

m.mamadiyarov@satbayev.university

01

Айнымалы токтың артықшылықтары және синусоидалы ЭҚК алу

02

Лездік, амплитудалық, орташа және әсерлік мәндер

03

Синусоиданы айналмалы вектормен кескіндеу; векторлық диаграмма

04

Комплекс сандар және олармен амалдар

05

Кешенді амплитуда және кешенді әсерлік мән

06

Туынды мен интегралдың кешенді түрі; Кирхгоф заңдары

07

Кешенді (символдық) әдістің алгоритмі

Дәріс соңында студент:

1

Синусоидалы шаманың әсерлік және орташа мәндерін есептейді

2

Синусоидаларды векторлық диаграммада кескіндеп, қоса алады

3

Комплекс санның алгебралық, тригонометриялық және көрсеткіштік түрлерін өзара ауыстырады

4

Уақыт функциясынан кешенді шамаға және кері өтеді

5

Дифференциалдау мен интегралдаудың кешенді түрдегі мағынасын түсіндіреді

6

Кирхгоф заңдарын кешенді түрде жазады



Трансформациялау

Трансформатор арқылы кернеуді оңай арттырып, азайтуға болады — алыс қашықтыққа жоғары кернеумен тасымалдау шығынды азайтады.

Генерациялау

Синхронды генераторлар механикалық энергияны синусоидалы ЭҚК-ке тікелей түрлендіреді.

Қозғалтқыштар

Үш фазалы асинхронды қозғалтқыштар — өнеркәсіптегі ең қарапайым және сенімді жетек.

Синусоида ерекшелігі

Сызықты тізбекте синусоиданың туындысы да, интегралы да синусоида — пішін өзгермейді, тек амплитуда мен фаза өзгереді.

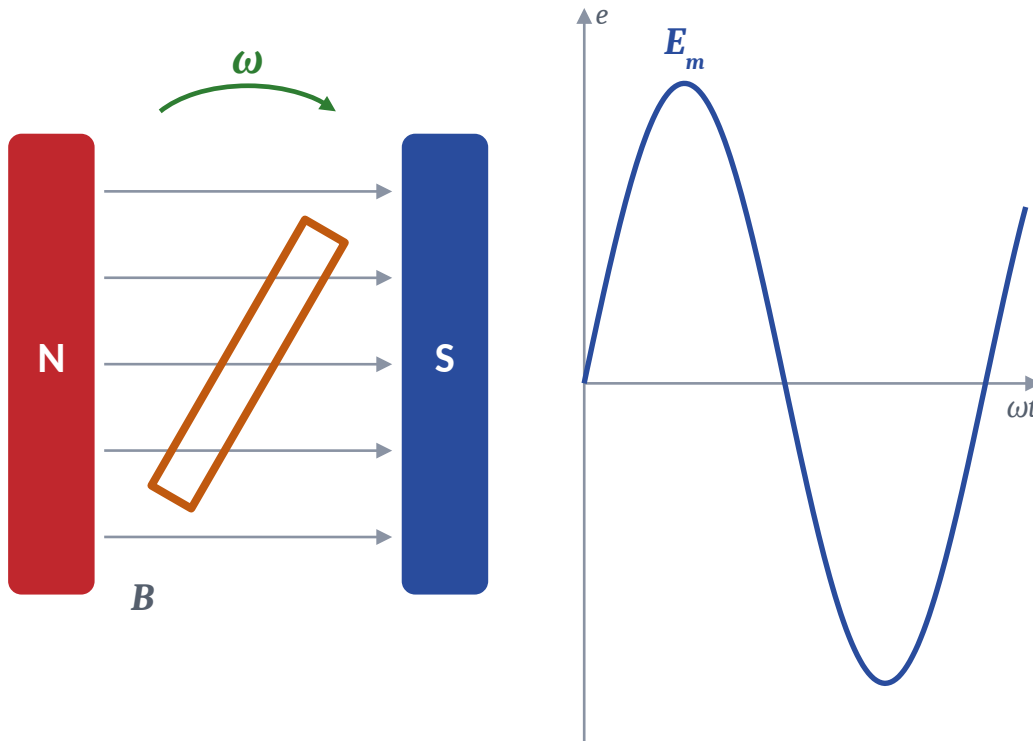
ЕСКЕРТУ

1-дәрісте гармониялық тербеліс параметрлері (U_m , ω , ψ) қарастырылды; бүгін олармен **есептеу әдісін** құрамыз.

Синусоидалы ЭҚК алу принципі



Біркелкі магнит өрісінде ω бұрыштық жылдамдықпен айналатын w орамды рамкада ЭҚК индукцияланады.



Формула

- $e = \omega w \Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t$
- Φ_m — рамка арқылы өтетін ең үлкен магнит ағыны
- $E_m = \omega w \Phi_m$ айналу жиілігіне пропорционал
- Өнеркәсіптік генераторларда $f = pn/60 = 50$ Гц

Әсерлік (эффeктивті) мән



Айнымалы токтың **әсерлік мәні** — резисторда бір период ішінде дәл сондай жылу бөлетін тұрақты токқа тең:

$$I = \sqrt{(1/T) \int_0^T i^2 dt} = I_m / \sqrt{2} \approx 0,707 I_m$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
I, U	ток пен кернеудің әсерлік мәндері (RMS)	А, В
I_m, U_m	амплитудалық мәндер	А, В
$I_{\text{орт}}$	жарты периодтағы орташа мән: $I_{\text{орт}} = 2I_m / \pi \approx 0,637 I_m$	А

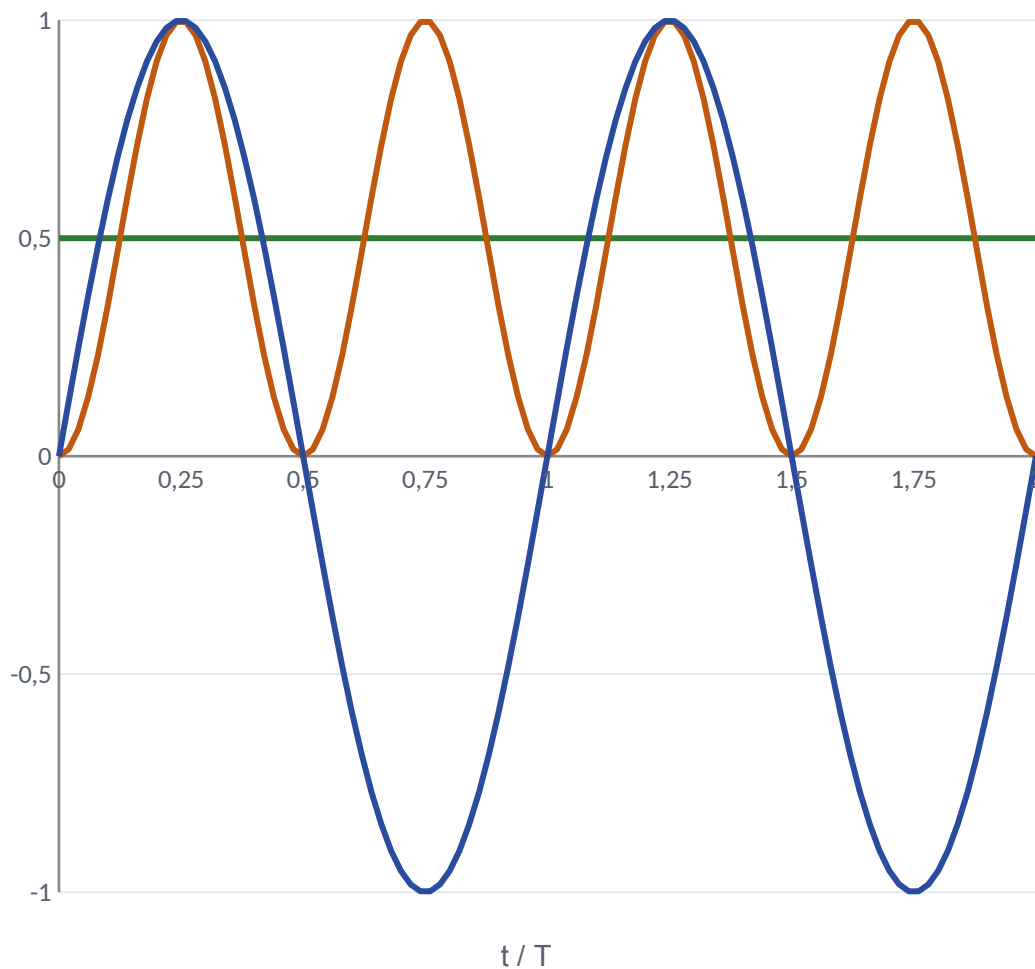
ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Желінің «220 В» кернеуі — әсерлік мән; оның амплитудасы $U_m = 220\sqrt{2} \approx 311$ В.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Тек синусоидалы шамалар үшін $I = I_m / \sqrt{2}$.
Бейсинусоидалы токтарда интеграл формуласы (11-дәріс) қолданылады.

Әсерлік мәннің мағынасы: i және i^2



— i / I_m — i^2 / I_m^2 — орташа $i^2 = 0,5$

Түсіндірме

- Ток таңбасын өзгертеді, бірақ $i^2 \geq 0$ — жылу үнемі бөлінеді
- i^2 орташа мәні $I_m^2/2$
- Сондықтан $I^2 = I_m^2/2$, яғни $I = I_m/\sqrt{2}$
- Амперметр мен вольтметр **әсерлік** мәнді көрсетеді

Амплитуда және пішін коэффициенттері

$k_a = I_m / I$ — амплитуда коэффициенті, $k_\phi = I / I_{\text{орт}}$ — пішін коэффициенті. Олар сигнал пішінін сипаттайды.

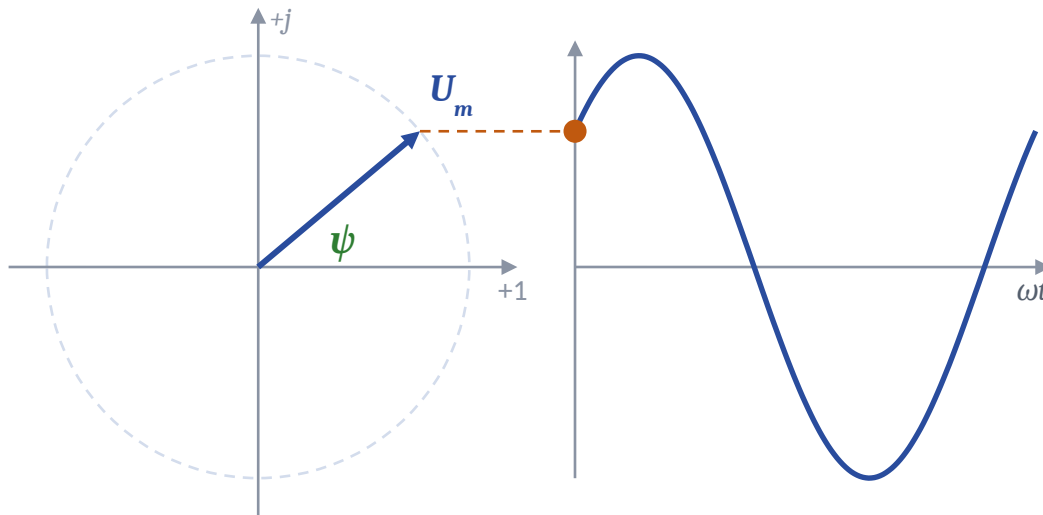
Сигнал пішіні	I/I_m	$I_{\text{орт}}/I_m$	k_a	k_ϕ
Синусоидалы	0,707	0,637	1,414	1,11
Тікбұрышты (меандр)	1,0	1,0	1,0	1,0
Үшбұрышты	0,577	0,5	1,732	1,155
Жартылай период түзетілген синусоида	0,5	0,318	2,0	1,57

НАЗАР АУДАРЫҢЫЗ

Қарапайым (орташа мәнді түзеткіш) аспаптар $k_\phi = 1,11$ деп градуирленген — бейсинусоидалы сигналда олар **қате** көрсетеді. Бұл жағдайда True RMS аспап қажет.

Синусоиданы айналмалы вектормен кескіндеу

Ұзындығы U_m вектор ω бұрыштық жылдамдықпен сағат тіліне қарсы айналады; оның тік осьтегі проекциясы — $u(t)$.



$t = 0$ сәтінде вектор $+1$ осімен ψ бұрыш жасайды

Векторлық диаграмма

- Бір жиіліктегі барлық векторлар **бірге** айналады — өзара орналасуы тұрақты
- Сондықтан оларды $t = 0$ сәтінде «тоқтатып» салады
- Вектор ұзындығы ретінде әсерлік мән де алынады
- Векторлар арасындағы бұрыш — фазалық ығысу

Мысал: синусоидаларды векторлық қосу



БЕРІЛГЕНІ

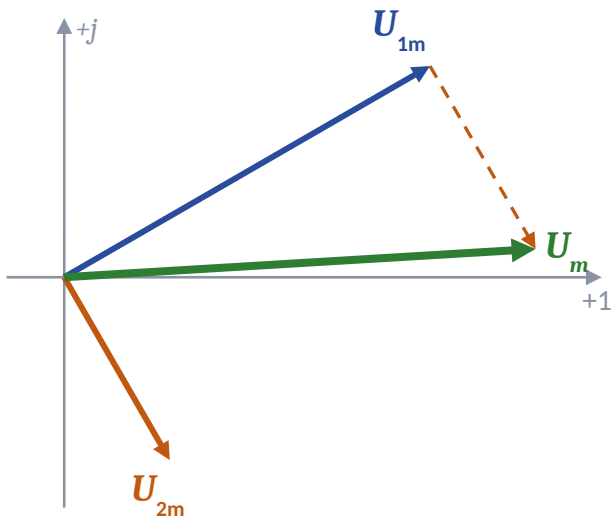
$$u_1 = 100 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ В}$$

$$u_2 = 50 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ В}$$

бір жиіліктегі кернеулер

ТАБУ КЕРЕК

$$u = u_1 + u_2$$



ШЕШУІ

Векторлар арасындағы бұрыш

1

$30^\circ - (-60^\circ) = 90^\circ$ — векторлар перпендикуляр

Қорытқы амплитуда

2

$$U_m = \sqrt{(100^2 + 50^2)} = \sqrt{12500} \approx 111,8 \text{ В}$$

Бастапқы фаза

3

$$\psi = 30^\circ - \arctg(50/100) = 30^\circ - 26,57^\circ = 3,43^\circ$$

Нәтиже

4

$$u = 111,8 \sin(\omega t + 3,43^\circ) \text{ В}$$

Ескерту

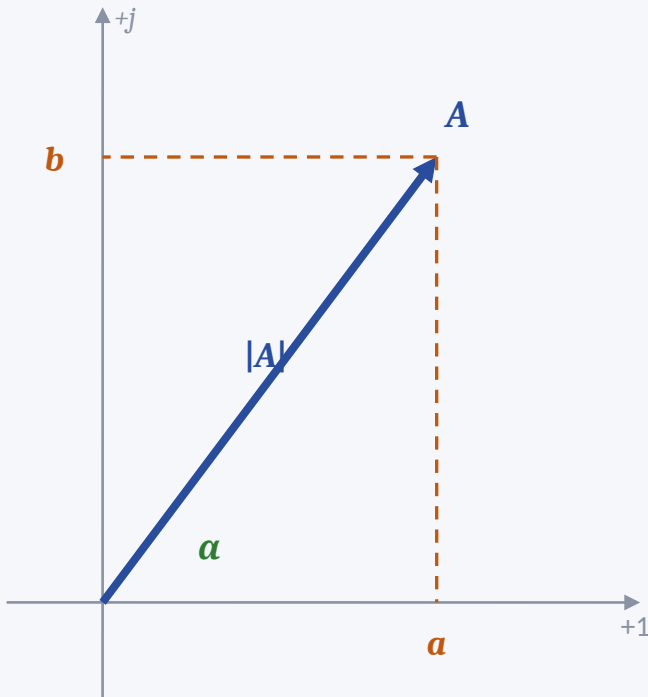
5

Амплитудалар **алгебралық** қосылмайды: $100 + 50 = 150 \neq 111,8$

ЖАУАБЫ

$$u = 111,8 \sin(\omega t + 3,43^\circ) \text{ В}$$

Комплекс сандар: үш түрде жазылуы



Алгебралық

қосу және азайту үшін

$$A = a + jb$$

Тригонометриялық

түрлер арасындағы көпір

$$A = |A|(\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

Көрсеткіштік

көбейту және бөлу үшін

$$A = |A|e^{j\alpha}$$

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \alpha = \arctg(b/a)$$

Эйлер формуласы: $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$. Жорамал бірлік $j = \sqrt{-1}$ (электротехникада i әрпі токқа берілген). Маңызды мәндер: $j = e^{j90^\circ}$, $-j = 1/j = e^{-j90^\circ}$, $j^2 = -1$.

Амал	Формула	Геометриялық мағынасы
Қосу, азайту	$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$	Векторларды қосу
Көбейту	$A_1 A_2 = A_1 A_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$	Модульдер көбейеді, бұрыштар қосылады
Бөлу	$A_1 / A_2 = (A_1 / A_2) e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}$	Модульдер бөлінеді, бұрыштар азаяды
j -ге көбейту	$jA = A e^{j(\alpha + 90^\circ)}$	Векторды $+90^\circ$ -қа бұру
j -ге бөлу	$A/j = -jA = A e^{j(\alpha - 90^\circ)}$	Векторды -90° -қа бұру
Түйіндес сан	$A^* = a - jb = A e^{-j\alpha}$	Нақты оське қатысты шағылу

НЕГІЗГІ ОЙ

Практикалық ереже: қосу — алгебралық түрде, көбейту мен бөлу — көрсеткіштік түрде орындалады.

Мысал: комплекс сандармен есептеу



БЕРІЛГЕНІ

$$A = 3 + j4$$
$$B = 5e^{-j36,87^\circ}$$

ТАБУ КЕРЕК

$|A|$, α_A , B алгебралық түрде, $A + B$,
 AB , A/B

«3-4-5» үшбұрышы: $\arctg(4/3) = 53,13^\circ$ —
жаттауға ыңғайлы мән.

ШЕШУІ

1 A көрсеткіштік түрде

$$|A| = \sqrt{9 + 16} = 5; \alpha_A = 53,13^\circ \Rightarrow A = 5e^{j53,13^\circ}$$

2 B алгебралық түрде

$$B = 5(\cos 36,87^\circ - j \sin 36,87^\circ) = 4 - j3$$

3 Қосу

$$A + B = (3 + 4) + j(4 - 3) = 7 + j1$$

4 Көбейту

$$AB = 5 \cdot 5 e^{j(53,13^\circ - 36,87^\circ)} = 25e^{j16,26^\circ}$$

5 Бөлу

$$A/B = e^{j(53,13^\circ + 36,87^\circ)} = e^{j90^\circ} = j$$

ЖАУАБЫ

$$A + B = 7 + j1; AB = 25e^{j16,26^\circ}; A/B = j$$

Кешенді амплитуда және кешенді әсерлік мән

Синусоидалы шама оның амплитудасы мен бастапқы фазасын қамтитын комплекс санмен кескінделеді:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \dot{U}_m = U_m e^{j\psi}, \quad \dot{U} = U e^{j\psi}$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
$\dot{U}_m$	кешенді амплитуда	В
$\dot{U}$	кешенді әсерлік мән ($U = U_m / \sqrt{2}$)	В
ψ	бастапқы фаза — комплекс санның аргументі	рад, °
$e^{j\omega t}$	айналу көбейткіші — барлық шамаларға ортақ, сондықтан түсіріліп тасталады	—

ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Лездік мән — айналмалы вектордың проекциясы: $u = \text{Im}[\dot{U}_m e^{j\omega t}]$.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Тізбектегі барлық шамалардың жиілігі бірдей болғанда (тұрақталған синусоидалы режим).

Мысал: уақыт функциясы $\Leftrightarrow$ комплекс сан

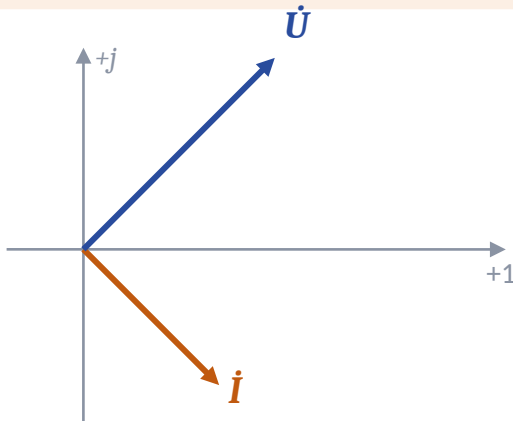


БЕРІЛГЕНІ

$$i = 14,1 \sin(314t - 45^\circ) \text{ A}$$
$$\dot{U} = 100 + j100 \text{ В}, f = 50 \text{ Гц}$$

ТАБУ КЕРЕК

$\dot{I}$ (әсерлік, екі түрде); $u(t)$



ШЕШУІ

Әсерлік мән

1

$$I = 14,1/\sqrt{2} = 10 \text{ A}; \psi_i = -45^\circ$$

Көрсеткіштік түр

2

$$\dot{I} = 10e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

Алгебралық түр

3

$$\dot{I} = 10(\cos 45^\circ - j \sin 45^\circ) = 7,07 - j7,07 \text{ A}$$

$\dot{U}$ модулі мен фазасы

4

$$U = \sqrt{(100^2 + 100^2)} = 141,4 \text{ В}; \psi_u = 45^\circ$$

Лездік мән

5

$$u = 141,4\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ) = 200 \sin(314t + 45^\circ) \text{ В}$$

ЖАУАБЫ

$$\dot{I} = 10e^{-j45^\circ} = 7,07 - j7,07 \text{ A}; u = 200 \sin(314t + 45^\circ) \text{ В}$$

Туынды мен интегралдың кешенді түрі



Кешенді әдістің басты артықшылығы: дифференциалдық теңдеулер **алгебралық** теңдеулерге айналады.

Дифференциалдау

$$di/dt \rightleftharpoons j\omega I$$

- Модуль ω есе артады
- Вектор $+90^\circ$ -қа бұрылады (озады)
- Индуктивтіліктегі кернеу: $u_L = L di/dt \Rightarrow \dot{U}_L = j\omega L I$

Интегралдау

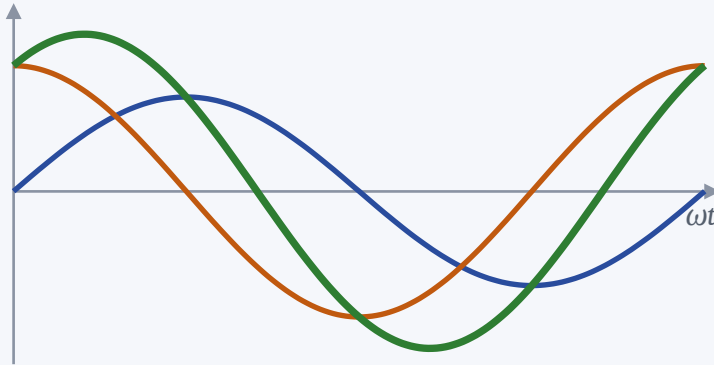
$$\int i dt \rightleftharpoons I/(j\omega)$$

- Модуль ω есе кемиді
- Вектор -90° -қа бұрылады (қалады)
- Сыйымдылықтағы кернеу: $u_C = (1/C) \int i dt \Rightarrow \dot{U}_C = I/(j\omega C)$

НЕГІЗГІ ОЙ

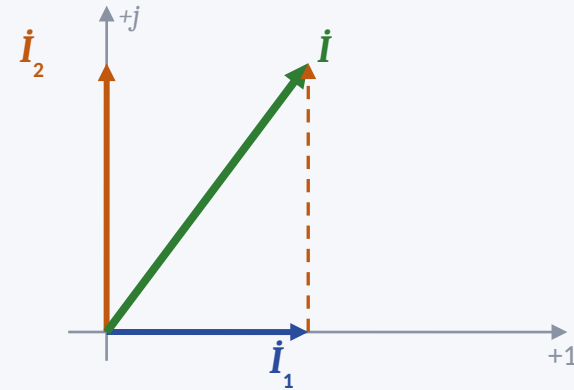
Осы екі ереже 8-дәрістегі индуктивті және сыйымдылық кедергілердің негізі болады.

Лездік мәндер үшін



- $\sum i_k = 0$ — әр сәтте орындалады
- $\sum e_k = \sum u_k$
- Графикте: i_1 (3 A), i_2 (4 A), $i = i_1 + i_2$ (5 A)

Кешенді мәндер үшін



- $\sum \dot{I}_k = 0$, $\sum \dot{E}_k = \sum \dot{U}_k$
- Алгебралық теңдеулер жүйесі
- $\dot{I} = 3 + j4 = 5e^{j53,13^\circ}$ A

НАЗАР АУДАРЫҢЫЗ

Әсерлік мәндердің **модульдері** үшін заңдар орындалмайды! Мысал: түйінге 90° ығысқан 3 A және 4 A токтар кірсе, шығатын ток 5 A, ал 7 A емес.

Кешенді (символдық) әдістің алгоритмі



НЕГІЗГІ ОЙ

Тұрақты ток тізбектеріне арналған барлық әдістер мен теоремалар (2-6-дәрістер) кешенді түрде толық сақталады.

Номинал кернеулер

Желі кернеуі 220/380 В, 10 кВ, 110 кВ — барлығы **әсерлік** мәндер. Оқшаулама амплитудаға ($\sqrt{2}$ есе үлкен) есептеледі.

True RMS аспаптар

Заманауи мультиметрлер әсерлік мәнді интеграл бойынша есептейді — бейсинусоидалы токтарда да дәл өлшейді.

Синхрофазорлар (PMU)

Энергожүйедегі кернеу векторларын GPS уақытымен синхронды өлшейтін құрылғылар — векторлық диаграмманың нақты уақыттағы түрі.

Модельдеу бағдарламалары

MATLAB, Python (complex түрі) және SPICE-тің AC-талдауы кешенді әдіспен жұмыс істейді.



- 1 Неліктен айнымалы токтың негізгі сипаттамасы ретінде әсерлік мән алынады?
- 2 220 В желідегі кернеудің ең үлкен лездік мәні қанша? Оқшаулама қайсысына есептеледі?
- 3 Неліктен бір жиіліктегі векторларды «тоқтатылған» күйде салуға болады?
- 4 Екі кернеудің әсерлік мәндерін неге арифметикалық қосуға болмайды?
- 5 Комплекс санды j -ге көбейту геометриялық тұрғыдан нені білдіреді?
- 6 Кешенді әдіс дифференциалдық теңдеуді қалай алгебралық теңдеуге айналдырады?
- 7 Кешенді әдісті бейсинусоидалы токқа тікелей неге қолдануға болмайды?

Қорытынды



Синусоидалы токтың әсерлік мәні $I = I_m / \sqrt{2}$ — ол бірдей жылу бөлетін тұрақты токқа тең



Синусоида айналмалы вектормен, ал бір жиіліктегі шамалар жиыны векторлық диаграммамен кескінделеді



Комплекс санның алгебралық, тригонометриялық және көрсеткіштік түрлері бар: $A = a + jb = |A|e^{j\alpha}$



Кешенді әсерлік мән $\dot{U} = Ue^{j\psi}$; дифференциалдау — $j\omega$ -ға көбейту, интегралдау — $j\omega$ -ға бөлу



Кирхгоф заңдары кешенді мәндер үшін орындалады; тұрақты ток әдістері кешенді түрде толық сақталады

ӘДЕБИЕТ (силлабус бойынша)

[1] Alexander C. K., Sadiku M. N. O. Fundamentals of Electric Circuits, 7th ed. — 367–409 б.