



Электротехниканың теориялық негіздері I

10-дәріс

Резонанстық құбылыстар, жиіліктік сипаттамалар және өзара индуктивті тізбектер

Оқытушы: Мамадияров Максат Муратович, PhD, қауымдастырылған профессор

«Электроника, телекоммуникация және ғарыштық технологиялар» кафедрасы

m.mamadiyarov@satbayev.university

- 01 Резонанс ұғымы және шарты
- 02 Кернеулер резонансы: сипаттамалық кедергі, сапалылық
- 03 Жиіліктік сипаттамалар және өткізу жолағы
- 04 Токтар резонансы: идеал және нақты контур
- 05 Өзара индуктивтілік; бір аттас қысқыштар
- 06 Индуктивті байланысқан катушкаларды жалғау
- 07 Ауалы (сызықты) трансформатор; инженерлік қолданылуы

Дәріс соңында студент:

1

Резонанс шартын тұжырымдап, резонанс жиілігін есептейді

2

Сапалылықтың кернеулер мен токтардың асқынуына әсерін түсіндіреді

3

АЖС пен ФЖС тұрғызып, өткізу жолағын анықтайды

4

Кернеулер және токтар резонансын салыстырады

5

Өзара индуктивтілік кернеуін таңбасымен жазады

6

Индуктивті байланысқан тізбектердің баламалы индуктивтілігін табады

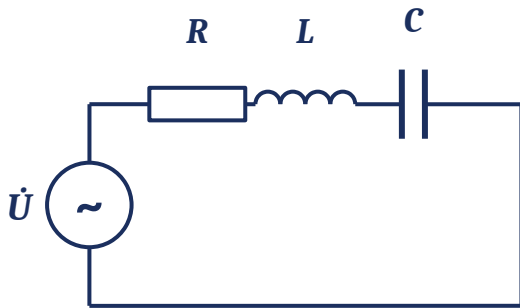
Резонанс — реактивті элементтері бар пассивті тізбектің кіріс кедергісі (немесе өткізгіштігі) таза активті болатын режим: $\text{Im } Z = 0$, яғни кіріс кернеуі мен тогы **фазалас** ($\varphi = 0$).

- L мен C арасындағы энергия алмасуы **ішкі** болады: көзден тек активті қуат алынады
- **Кернеулер резонансы** — L мен C тізбектей жалғанған тізбекте
- **Токтар резонансы** — L мен C параллель жалғанған тізбекте
- Резонансқа жиілікті, L немесе C шамасын өзгерту арқылы жетуге болады
- Пайдалы (сүзгі, тербелмелі контур) және қауіпті (асқын кернеу) салдары бар

НАЗАР АУДАРЫҢЫЗ

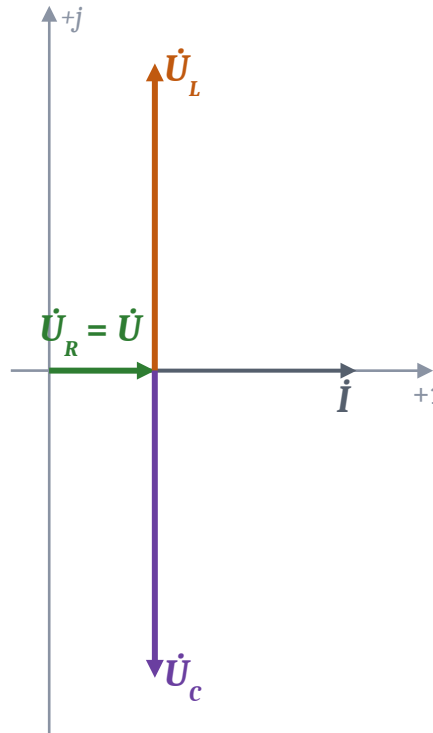
Резонанс кезінде жекелеген элементтердегі кернеулер немесе токтар көз кернеуінен (тогынан) **көп есе** үлкен болуы мүмкін.

Тізбектей RLC тізбегінде $X_L = X_C$ болғанда: $Z = R$ — ең кіші, ток ең үлкен: $I_0 = U/R$.



$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$$



Резонанстағы қасиеттер

- $\varphi = 0, \cos \varphi = 1$
- $\dot{U}_L = -\dot{U}_C$ — өзара толық өтеледі
- $U_L = U_C = QU$ — көз кернеуінен Q есе үлкен
- Энергия L мен C арасында «айналады»

$$\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = \sqrt{L/C}, \quad Q = \rho/R$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
ρ	сипаттамалық (толқындық) кедергі — резонанстағы $X_L = X_C$	Ом
Q	контурдың сапалылығы (асылдығы)	—
$d = 1/Q$	контурдың өшу коэффициенті	—

ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

$Q = U_L/U = U_C/U$ — резонанста реактивті элементтердегі кернеудің көз кернеуінен неше есе артық екенін көрсетеді.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Радиотехникалық контурларда $Q = 50 \dots 300$; энергетикалық тізбектерде Q аз, бірақ асқын кернеу қаупі бар.

Мысал: кернеулер резонансы



БЕРІЛГЕНІ

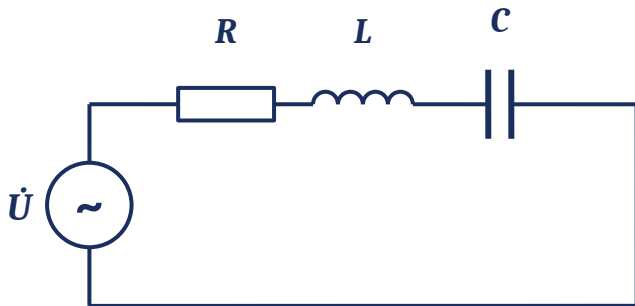
$$L = 0,1 \text{ Гн}, C = 10 \text{ мкФ}$$

$$R = 10 \text{ Ом}$$

$$U = 10 \text{ В}$$

ТАБУ КЕРЕК

$$\omega_0, f_0, \rho, Q, I_0, U_L$$



ШЕШУІ

Резонанс жиілігі

1

$$\omega_0 = 1/\sqrt{(0,1 \cdot 10^{-5})} = 1000 \text{ рад/с}; f_0 \approx 159 \text{ Гц}$$

Сипаттамалық кедергі

2

$$\rho = \sqrt{(L/C)} = \sqrt{(0,1/10^{-5})} = 100 \text{ Ом}$$

Сапалылық

3

$$Q = \rho/R = 100/10 = 10$$

Резонанс тогы

4

$$I_0 = U/R = 10/10 = 1 \text{ А}$$

Реактивті кернеулер

5

$$U_L = U_C = QU = I_0 \rho = 100 \text{ В}$$

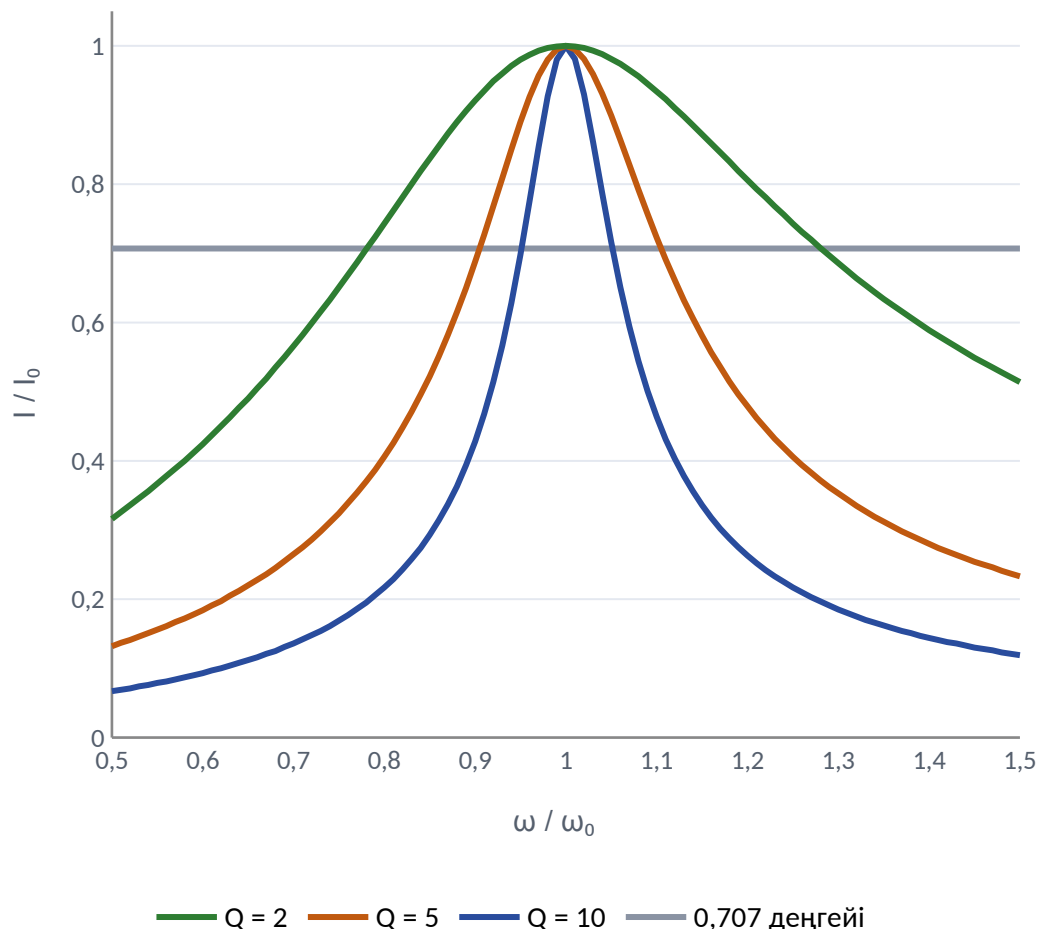
ЖАУАБЫ

Көз кернеуі 10 В, ал катушка мен конденсаторда — 100 В!

Амплитудалық-жиіліктік сипаттама (АЖС)



Нормаланған ток: $I/I_0 = 1/\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}$



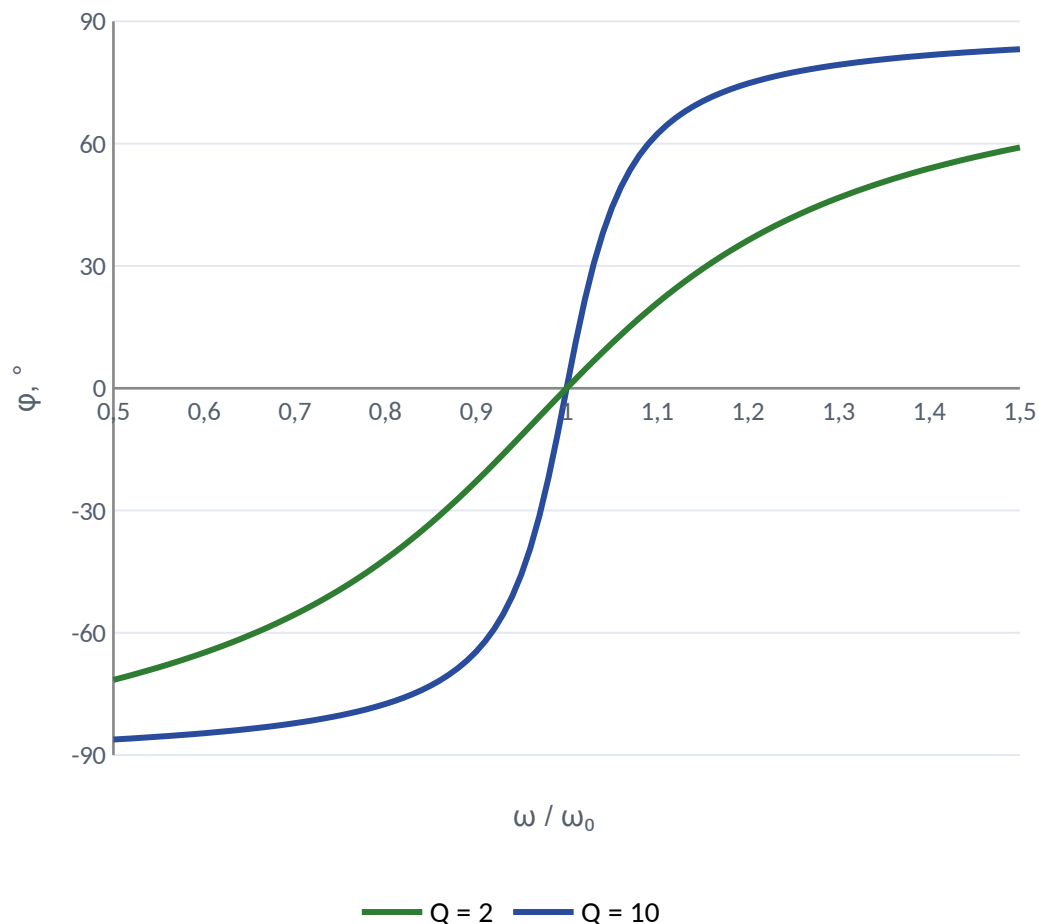
Өткізу жолағы

- $I \geq 0,707 I_0$ болатын жиіліктер аралығы (-3 дБ)
- $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q$
- Сапалылық жоғары $\rightarrow$ қисық **үшкір**, жолақ тар — таңдамалылық жоғары
- Мысалда $Q = 10$: $\Delta f \approx 16$ Гц

Фазалық-жиіліктік сипаттама (ФЖС)



$\varphi(\omega) = \arctg[Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]$ — кіріс кернеуі мен ток арасындағы фазалық ығысу

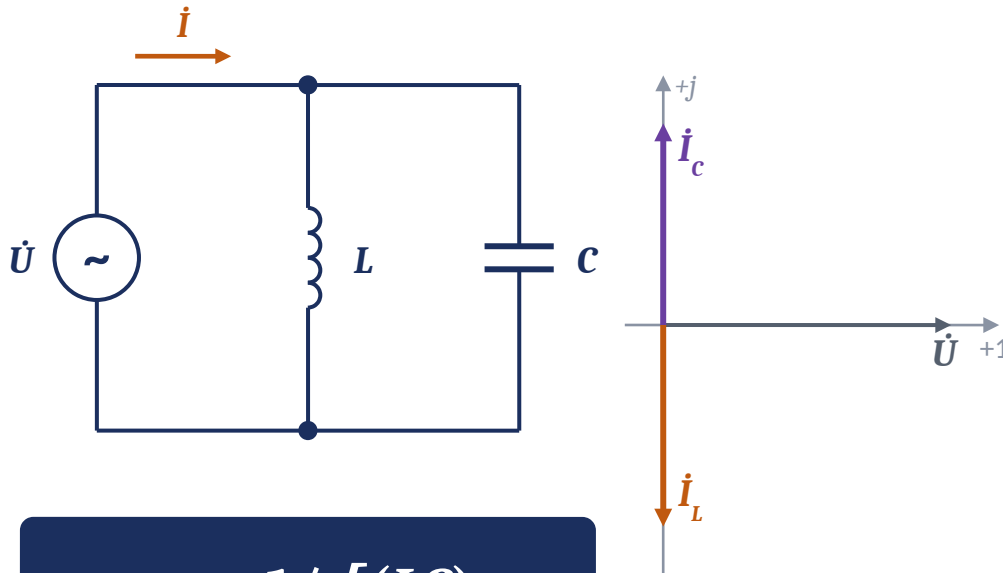


Түсіндірме

- $\omega < \omega_0$: $X_c > X_L$, $\varphi < 0$ — сыйымдылық сипат
- $\omega = \omega_0$: $\varphi = 0$ — резонанс
- $\omega > \omega_0$: $\varphi > 0$ — индуктивті сипат
- Жолақ шекараларында $\varphi = \pm 45^\circ$

Токтар резонансы (идеал контур)

L мен C параллель жалғанған тізбекте $B_L = B_C$ болғанда кіріс өткізгіштігінің реактивті бөлігі нөлге тең.



$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Қасиеттері

- $I_L = -I_C$ — тармақ токтары өзара өтеледі
- Идеал контурда жалпы ток $I = 0$, кіріс кедергісі $Z \rightarrow \infty$
- Нақты контурда жалпы ток ең аз, тармақ токтары одан Q есе үлкен
- Энергия контур ішінде тербеледі

Мысал: нақты параллель контур



БЕРІЛГЕНІ

Катушка: $L = 0,1$ Гн, $R = 10$ Ом
Конденсатор: $C = 10$ мкФ
 $U = 100$ В

ТАБУ КЕРЕК

ω_0 , $Z_{\text{рез}}$, желі тогы, катушка тогы

Катушка кедергісі R ескерілгенде резонанс жиілігі: $\omega_0 = \sqrt{(1/(LC)) - R^2/L^2}$. Резонанс тек $R < \rho$ болғанда болады.

ШЕШУІ

Резонанс жиілігі

1

$$\omega_0 = \sqrt{(10^6 - 10^4)} \approx 995 \text{ рад/с (идеалда 1000)}$$

Резонанстық кедергі

2

$$Z_{\text{рез}} = L/(RC) = 0,1/(10 \cdot 10^{-5}) = 1000 \text{ Ом}$$

Желі тогы

3

$$I = U/Z_{\text{рез}} = 100/1000 = 0,1 \text{ А}$$

Катушка тогы

4

$$I_L \approx U/(\omega_0 L) = 100/99,5 \approx 1,0 \text{ А}$$

ЖАУАБЫ

Желі тогы $0,1$ А, ал контур ішіндегі ток ≈ 1 А — $Q = 10$ есе үлкен

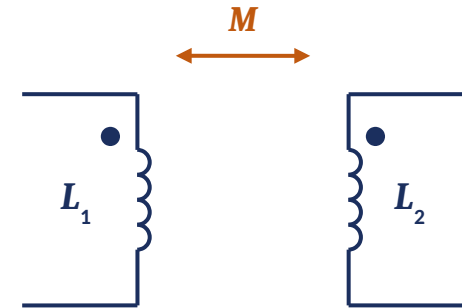
Кернеулер және токтар резонансын салыстыру

Сипаттама	Кернеулер резонансы	Токтар резонансы
Элементтерді жалғау	L мен C тізбектей	L мен C параллель
Шарт	$X_L = X_C$	$B_L = B_C$
Кіріс кедергісі	ең кіші: $Z = R$	ең үлкен: $Z_{\text{рез}} = L/(RC)$
Көз тогы	ең үлкен	ең кіші
Q есе артатын шама	L мен C кернеулері	L мен C тармақ токтары
Қолданылуы	Кернеуді таңдамалы күшейту, сериялық сүзгілер	Тербелмелі контурлар, режекторлық сүзгілер
Қауіп	Асқын кернеу — оқшауламаның тесілуі	Контур ішіндегі үлкен токтар

Бір катушканың магнит ағыны екінші катушкамен ілініскенде, бірінші катушкадағы ток өзгерісі екіншісінде ЭҚК тудырады:

$$u_{2M} = \pm M di_1/dt \Rightarrow \dot{U}_{2M} = \pm j\omega M \dot{I}_1$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
M	өзара индуктивтілік	Гн
$k = M/\sqrt{L_1 L_2}$	байланыс коэффициенті, $0 \leq k \leq 1$	—
$X_M = \omega M$	өзара индуктивтік кедергі	Ом



ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Токтар екі катушкаға да **бір аттас** (нүктемен белгіленген) қысқыштардан кірсе, өзара индукция кернеуі «+» таңбамен алынады.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Ферромагнит өзексіз (сызықты) катушкалар үшін. Өзекті трансформаторлар 12-дәрісте.

Индуктивті байланысқан катушкаларды тізбектей қосу

Келісімді қосу



$$L_{\text{кел}} = L_1 + L_2 + 2M$$

- Ток екі катушкаға да бір аттас қысқыштан кіреді
- Магнит ағындары қосылады

Қарсы қосу



$$L_{\text{қар}} = L_1 + L_2 - 2M$$

- Ток бір катушкаға бір аттас, екіншісіне әр аттас қысқыштан кіреді
- Магнит ағындары азаяды

НЕГІЗГІ ОЙ

Тәжірибелік әдіс: екі қосылыстағы индуктивтілікті өлшеп, $M = (L_{\text{кел}} - L_{\text{қар}})/4$ табылады.

Мысал: баламалы индуктивтілік



БЕРІЛГЕНІ

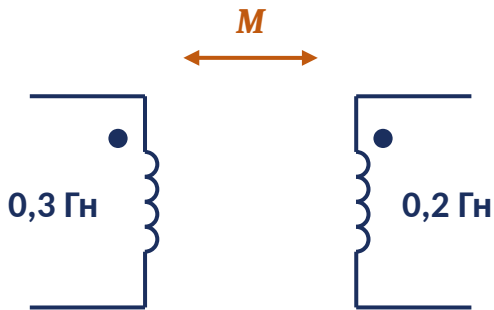
$$L_1 = 0,3 \text{ Гн}, L_2 = 0,2 \text{ Гн}$$

$$k = 0,5$$

$$f = 50 \text{ Гц}$$

ТАБУ КЕРЕК

$M, L_{\text{кел}}, L_{\text{қар}}$, реактивті кедергілер



ШЕШУІ

Өзара индуктивтілік

1

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0,5 \cdot \sqrt{0,06} \approx 0,122 \text{ Гн}$$

Келісімді қосу

2

$$L_{\text{кел}} = 0,3 + 0,2 + 2 \cdot 0,122 = 0,745 \text{ Гн}$$

Қарсы қосу

3

$$L_{\text{қар}} = 0,3 + 0,2 - 0,245 = 0,255 \text{ Гн}$$

Кедергілер

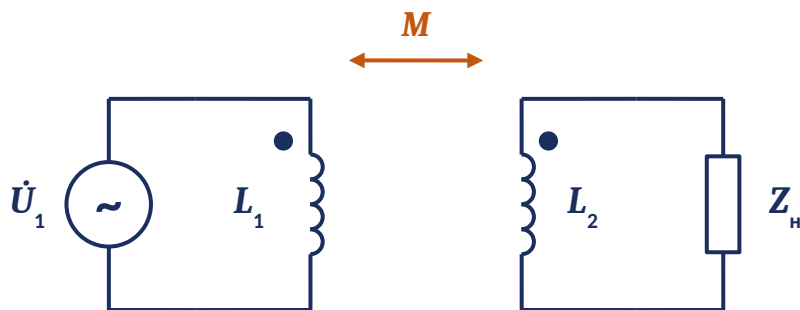
4

$$X_{\text{кел}} = 314 \cdot 0,745 \approx 234 \text{ Ом}; \quad X_{\text{қар}} = 314 \cdot 0,255 \approx 80 \text{ Ом}$$

ЖАУАБЫ

$$M \approx 0,122 \text{ Гн}; \quad L_{\text{кел}} = 0,745 \text{ Гн}; \quad L_{\text{қар}} = 0,255 \text{ Гн}$$

Өзекшесіз екі индуктивті байланысқан орам. Екінші ретті тізбекке Z_H жүктеме қосылған.



$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ 0 &= -j\omega M \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_H) \dot{I}_2\end{aligned}$$

Енгізілген кедергі

- Екінші теңдеуден $\dot{I}_2$ шығарып, біріншісіне қойсақ:
- $Z_{\text{кір}} = Z_1 + (\omega M)^2 / (Z_2 + Z_H)$
- Екінші ретті тізбек біріншіге $(\omega M)^2 / Z_{22}$ «енгізілген» кедергі ретінде әсер етеді
- $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$

Тербелмелі контурлар мен сүзгілер

Радиоқабылдағыш контурды станция жиілігіне резонансқа келтіреді. Резонанстық сүзгілер жоғары гармоникаларды бәсеңдетеді.

Энергетикадағы асқын кернеулер

Бос жүрістегі ұзын кабель немесе ЭБЖ сыйымдылығы мен трансформатор индуктивтілігі кернеулер резонансын тудыруы мүмкін.

Сымсыз зарядтау

Индуктивті байланысқан орамдар резонанс жиілігіне келтірілгенде энергияны ауа арқылы тиімді береді (Q_i стандарты, электромобильдер).

Конденсатор батареялары және гармоникалар

Өтеу батареясы мен желі индуктивтілігі жоғары гармоникада резонанс тудыруы мүмкін — сондықтан тежеуіш реакторлар қосылады.



- 1 Резонанс кезінде тізбектің кіріс кедергісі неліктен таза активті болады?
- 2 Кернеулер резонансында конденсатордағы кернеу көз кернеуінен неге үлкен болуы мүмкін? Энергия қайдан алынады?
- 3 Сапалылықты арттыру өткізу жолағына қалай әсер етеді?
- 4 Нақты параллель контурда резонанс жиілігі неге идеал контурдағыдан аз?
- 5 Бір аттас қысқыштар нені білдіреді және өзара индукция кернеуінің таңбасына қалай әсер етеді?
- 6 Екі катушканың M мәнін қандай тәжірибемен анықтауға болады?
- 7 Трансформатордың екінші ретті жүктемесі бірінші ретті тізбекке қалай «беріледі»?

Қорытынды



Резонанс — кіріс кернеуі мен тогы фазалас ($\varphi = 0$) режим; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$



Кернеулер резонансында ток максимал, $U_L = U_C = QU$; токтар резонансында желі тогы минимал, тармақ токтары Q есе үлкен



Сапалылық $Q = \rho/R$ өткізу жолағын анықтайды: $\Delta\omega = \omega_0/Q$



Өзара индукция кернеуі $\dot{U}_M = \pm j\omega M \dot{I}$; таңбасы бір аттас қысқыштарға қатысты ток бағытымен анықталады



Келісімді/қарсы қосуда $L_{\text{экв}} = L_1 + L_2 \pm 2M$; трансформатор жүктемесі енгізілген кедергі $(\omega M)^2/Z_{22}$ арқылы әсер етеді

ӘДЕБИЕТ (силлабус бойынша)

[1] Alexander C. K., Sadiku M. N. O. Fundamentals of Electric Circuits, 7th ed. — 553–609 б.; [3] Hayt W. H., Kemmerly J. E., Durbin S. M. Engineering Circuit Analysis, 9th ed. — 615–674 б.