



Электротехниканың теориялық негіздері I

11-дәріс

Бейсинусоидалы ток тізбектері және Фурье қатары арқылы талдау

Оқытушы: Мамадияров Максат Муратович, PhD, қауымдастырылған профессор

«Электроника, телекоммуникация және ғарыштық технологиялар» кафедрасы

m.mamadiyarov@satbayev.university

01

Бейсинусоидалы токтар мен кернеулердің пайда болу себептері

02

Фурье қатары: коэффициенттерді есептеу

03

Қисық симметриясының спектрге әсері

04

Бейсинусоидалы шамалардың әсерлік мәні

05

Қуаттар және бұрмалану коэффициенттері (THD)

06

Тізбекті гармоникалар бойынша есептеу әдістемесі мен мысалы

07

L мен C элементтерінің гармоникаларға әсері; сүзгілер

Дәріс соңында студент:

1

Периодты функцияның Фурье коэффициенттерін интеграл арқылы есептейді

2

Қисық симметриясы бойынша спектр құрамын алдын ала болжайды

3

Бейсинусоидалы ток пен кернеудің әсерлік мәнін табады

4

Активті қуатты, қуат коэффициентін және THD-ны есептейді

5

Сызықты тізбектің бейсинусоидалы кернеуге реакциясын беттестіру әдісімен анықтайды

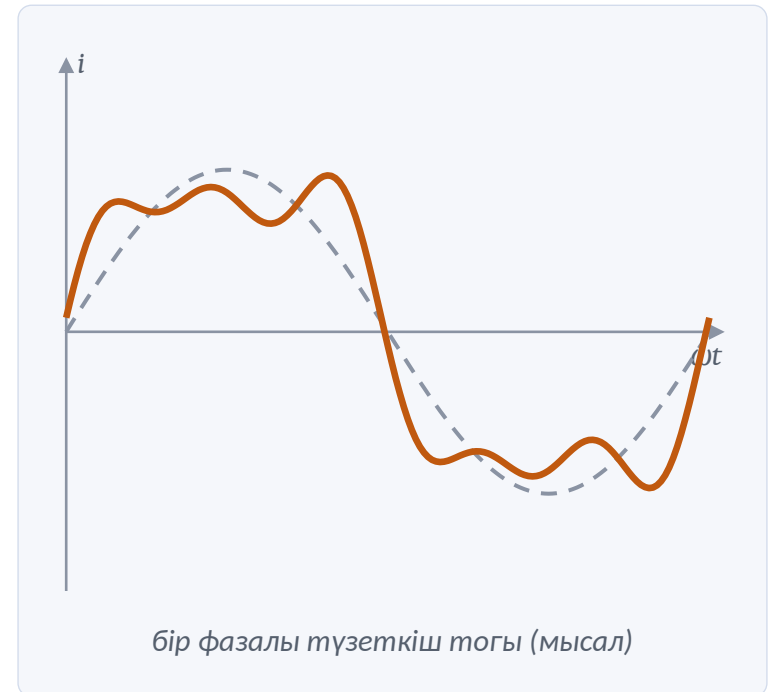
6

Индуктивтілік пен сыйымдылықтың сүзгілеу әсерін түсіндіреді

Бейсинусоидалы режимдердің себептері



- **Сызықты емес жүктемелер:** түзеткіштер, жиілік түрлендіргіштері, LED драйверлері, компьютерлер
- **Магниттік қанығу:** трансформаторлар мен реакторлардың өзекшелері
- **Доғалық құрылғылар:** доғалық пештер, дәнекерлеу аппараттары
- **Арнайы сигналдар:** импульстік және сандық құрылғылар (1-дәріс)
- Нәтижесінде желіде гармоникалар пайда болады: 3, 5, 7, 11, 13, ...



НЕГІЗГІ ОЙ

Желі кернеуі синусоидалы болса да, сызықты емес жүктеменің **тогы** бейсинусоидалы болады және желі кедергісі арқылы кернеуді де бұрмалайды.

$$f(\omega t) = A_0 + \sum (B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t)$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
A_0	$A_0 = (1/T) \int_0^T f dt$ — тұрақты құраушы (орташа мән)	В, А
B_k	$B_k = (2/T) \int_0^T f \sin k\omega t dt$ — синус коэффициенті	В, А
C_k	$C_k = (2/T) \int_0^T f \cos k\omega t dt$ — косинус коэффициенті	В, А
A_{km}	$A_{km} = \sqrt{(B_k^2 + C_k^2)}$ — k -гармоника амплитудасы	В, А
ψ_k	$\psi_k = \arctg(C_k/B_k)$ — бастапқы фаза	рад

ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Екі түрдің эквиваленттігі: $B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t$
 $= A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Кез келген периодты, Дирихле шарттарын қанағаттандыратын функция үшін. Практикада қатар бірнеше гармоникамен шектеледі.

Қисық симметриясы және спектр құрамы



Симметрияны анықтау интеграл есептеуін едәуір қысқартады.

Симметрия түрі	Шарт	Қатарда қалатыны	Мысал
Абсцисса осіне қатысты (жартылай толқындық)	$f(t + T/2) = -f(t)$	тек тақ гармоникалар, $A_0 = 0$	меандр, желі тогы
Координаттар басына қатысты (тақ функция)	$f(-t) = -f(t)$	тек синус мүшелері ($C_k = 0$)	аралау тәрізді
Ордината осіне қатысты (жұп функция)	$f(-t) = f(t)$	A_0 және косинус мүшелері ($B_k = 0$)	түзетілген синусоида

НЕГІЗГІ ОЙ

Жартылай толқындық симметрия өнеркәсіптік желілерге тән — сондықтан онда жұп гармоникалар іс жүзінде болмайды.

Мысал: тікбұрышты толқынның коэффициенттері

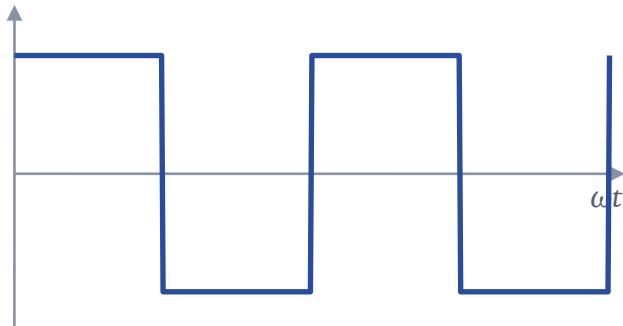


БЕРІЛГЕНІ

$$f = +U, 0 < \omega t < \pi$$
$$f = -U, \pi < \omega t < 2\pi$$

ТАБУ КЕРЕК

$$A_0, C_k, B_k$$



Тақ функция және жартылай толқындық симметрия.

ШЕШУІ

Симметрия бойынша

1

$A_0 = 0$ (орташа мән нөл); $C_k = 0$ (тақ функция)

Синус коэффициенті

2

$$B_k = (2/\pi) \int_0^\pi U \sin k\omega t d(\omega t) = (2U/k\pi)(1 - \cos k\pi)$$

Жұп k

3

$$\cos k\pi = 1 \Rightarrow B_k = 0$$

Тақ k

4

$$\cos k\pi = -1 \Rightarrow B_k = 4U/(k\pi)$$

Қатар

5

$$f = (4U/\pi)(\sin \omega t + (1/3) \sin 3\omega t + (1/5) \sin 5\omega t + \dots)$$

ЖАУАБЫ

$B_1 = 1,27U$, $B_3 = 0,42U$, $B_5 = 0,25U$ — 1-дәрістігі спектрмен сәйкес

Типтік сигналдардың Фурье қатарлары

Сигнал	Фурье қатары	Ерекшелігі
Тікбұрышты (меандр)	$(4U/\pi)[\sin \omega t + (1/3)\sin 3\omega t + (1/5)\sin 5\omega t + \dots]$	тақ, $A_k \sim 1/k$
Үшбұрышты	$(8U/\pi^2)[\sin \omega t - (1/9)\sin 3\omega t + (1/25)\sin 5\omega t - \dots]$	тақ, $A_k \sim 1/k^2$
Аралау тәрізді	$(2U/\pi)[\sin \omega t - (1/2)\sin 2\omega t + (1/3)\sin 3\omega t - \dots]$	барлық k , $\sim 1/k$
Екіжартылайпериодты түзетілген	$(2U/\pi) - (4U/\pi)[(1/3)\cos 2\omega t + (1/15)\cos 4\omega t + \dots]$	тек жұп k , $A_0 \neq 0$

ЕСКЕРТУ

Қисық неғұрлым «тегіс» болса, гармоникалар соғұрлым жылдам кемиді: секірісі бар сигналда $\sim 1/k$, сынығы бар сигналда $\sim 1/k^2$.

Бейсинусоидалы токтың әсерлік мәні



Әр түрлі жиіліктегі гармоникалардың көбейтінділерінің период бойынша интегралы нөлге тең. Сондықтан:

$$I = \sqrt{(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots)} = \sqrt{(I_0^2 + \sum I_k^2)}$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
I_0	тұрақты құраушы	А
I_k	k -гармониканың әсерлік мәні: $I_k = I_{km} / \sqrt{2}$	А
I	бейсинусоидалы токтың әсерлік мәні	А

ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Әсерлік мән гармоникалардың **фазаларына тәуелсіз** — тек олардың шамаларымен анықталады.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Мысал: $i = 5 + 10\sqrt{2} \sin \omega t + 4\sqrt{2} \sin 3\omega t \Rightarrow I = \sqrt{(25 + 100 + 16)} \approx 11,9 \text{ А}$ (қарапайым қосынды 19 А емес!).

Активті қуат

$$P = U_0 I_0 + \sum U_k I_k \cos \varphi_k$$

Тек **бірдей** жиіліктегі кернеу мен ток гармоникалары активті қуат береді.

Реактивті қуат

$$Q = \sum U_k I_k \sin \varphi_k$$

Гармоникалар бойынша алгебралық қосынды.

Толық қуат және бұрмалану қуаты

$$S = UI, \quad S^2 = P^2 + Q^2 + T^2$$

T — әр түрлі жиіліктегі кернеу мен ток гармоникаларынан пайда болатын **бұрмалану қуаты**.

Қуат коэффициенті

$$\chi = P/S$$

Бейсинусоидалы режимде $\chi < \cos \varphi_1$:
бұрмаланудың өзі де қуат коэффициентін төмендетеді.

$$THD_I = \sqrt{(I_2^2 + I_3^2 + \dots)} / I_1, \quad k_{\text{бұрм}} = I_1 / I$$

Шама	Мағынасы	Өлшем бірлігі
THD	гармоникалық бұрмаланудың жалпы коэффициенті (Total Harmonic Distortion), %	%
$k_{\text{бұрм}}$	бұрмалану коэффициенті — 1-гармониканың үлесі	—
I_1	1-гармониканың (негізгі) әсерлік мәні	A

ФИЗИКАЛЫҚ МАҒЫНАСЫ

Синусоида үшін $THD = 0$, $k_{\text{бұрм}} = 1$. Меандрда $THD \approx 48\%$. Байланыс: $I = I_1 \sqrt{1 + THD^2}$.

ҚОЛДАНЫЛУ ШАРТЫ

Электр энергиясы сапасының негізгі көрсеткіші; стандарттар (мысалы, IEEE 519) кернеудің THD мәнін бірнеше пайызбен шектейді.

Тізбекті бейсинусоидалы кернеуде есептеу әдістемесі



НАЗАР АУДАРЫҢЫЗ

Әр түрлі гармониканың кешенді амплитудаларын қосуға **болмайды** — олардың айналу жиіліктері әртүрлі.

Мысал: RL тізбегі бейсинусоидалы кернеуде

БЕРІЛГЕНІ

$$u = 100 + 141 \sin \omega t + 42,3 \sin 3\omega t \text{ В}$$

$$R = 10 \text{ Ом}, \quad \omega L = 10 \text{ Ом}$$

ТАБУ КЕРЕК

$$i(t), I, P$$

Кернеу гармоникаларының әсерлік мәндері: $U_0 = 100 \text{ В}$, $U_1 = 100 \text{ В}$, $U_3 = 30 \text{ В}$.

ШЕШУІ

$k = 0$ (L — қысқа)

1

$$I_0 = U_0 / R = 100 / 10 = 10 \text{ А}$$

$k = 1$

2

$$Z_1 = 10 + j10 = 14,14e^{j45^\circ} \Rightarrow I_1 = 7,07 \text{ А}, \quad \varphi_1 = 45^\circ$$

$k = 3$

3

$$Z_3 = 10 + j30 = 31,6e^{j71,6^\circ} \Rightarrow I_3 = 0,95 \text{ А}, \quad \varphi_3 = 71,6^\circ$$

Лездік ток

4

$$i = 10 + 10 \sin(\omega t - 45^\circ) + 1,34 \sin(3\omega t - 71,6^\circ) \text{ А}$$

I және P

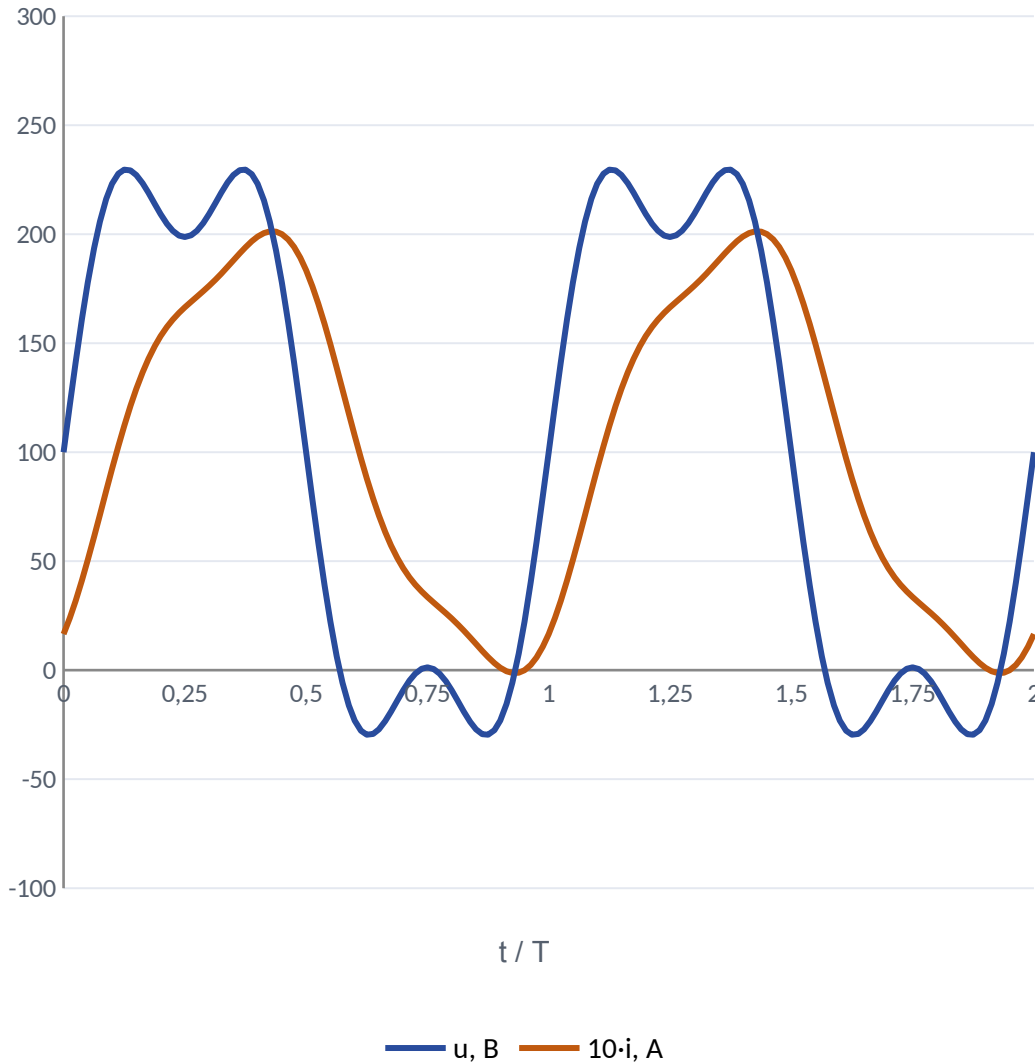
5

$$I = \sqrt{(100 + 50 + 0,9)} \approx 12,3 \text{ А}; \quad P = I^2 R \approx 1509 \text{ Вт}$$

ЖАУАБЫ

$$I \approx 12,3 \text{ А}; \quad P \approx 1,51 \text{ кВт}; \quad \text{тексеру: } 1000 + 500 + 9 = 1509 \text{ Вт} \checkmark$$

Мысал нәтижесі: кернеу мен ток қисықтары



Талдау

- Кернеудегі 3-гармониканың үлесі: $U_3/U_1 = 30\%$
- Токтағы үлесі: $I_3/I_1 = 13,4\%$
- Индуктивтілік жоғары гармоникаларды **бәсеңдетеді** — ток қисығы тегістеледі
- Ток қисығы масштаб үшін 10 есе үлкейтілген

Индуктивтілік

$$X_{Lk} = k\omega L$$

- Гармоника нөмірі өскен сайын кедергі **өседі**
- Ток қисығы кернеуге қарағанда **тегісірек**
- Қолданылуы: түзеткіштің тегістеу дроссельдері, желілік реакторлар

Сыйымдылық

$$X_{Ck} = 1/(k\omega C)$$

- Гармоника нөмірі өскен сайын кедергі **азаяды**
- Ток қисығы кернеуге қарағанда **бұрмаланған**
- Конденсатор батареялары жоғары гармоникалармен шамадан тыс жүктелуі мүмкін

НЕГІЗГІ ОЙ

k -гармоникада резонанс шарты: $k\omega L = 1/(k\omega C) \Rightarrow k_{\text{рез}} = 1/(\omega\sqrt{LC})$. Сүзгілер осы қасиетке негізделген.

Гармоникалық сүзгілер

Белгілі бір гармоникаға (5, 7, 11...) резонансқа келтірілген LC тармақтар бұл токтарды желіге жібермей, өзіне «тартып» алады.

Бейтарап сымның қызуы

Үш фазалы төрт сымды желіде 3-ші еселі гармоникалар бейтарап сымда арифметикалық қосылады — ол фаза сымынан көп жүктелуі мүмкін.

Өлшеу

Энергия сапасы анализаторлары ФФТ арқылы 40–50-гармоникаға дейінгі спектрді, THD мен χ коэффициентін өлшейді.

Трансформаторлар

Гармоникалар құйынды токтардан шығынды арттырады; бейсинусоидалы жүктемеге арнайы (K-factor) трансформаторлар қолданылады.



1 Неліктен синусоидалы кернеуге қосылған түзеткіштің тогы бейсинусоидалы болады?

2 Абсцисса осіне қатысты симметриялы қисықта жұп гармоникалар неге болмайды?

3 Бейсинусоидалы токтың әсерлік мәні неге гармоникалардың фазаларына тәуелсіз?

4 Кернеу мен токтың әр түрлі жиіліктегі гармоникалары неге активті қуат бермейді?

5 Бейсинусоидалы есепте әр гармониканың кешенді токтарын неге қосуға болмайды?

6 Индуктивтілік пен сыйымдылық ток қисығының пішініне қалай әсер етеді?

7 Конденсатор батареясы қай жағдайда жоғары гармоникада резонансқа түседі?

Қорытынды



Периодты сигнал $A_0 + \sum (B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t)$ қатарына жіктеледі; коэффициенттер интегралмен табылады



Симметрия спектр құрамын анықтайды: жартылай толқындық симметрияда тек тақ гармоникалар болады



Әсерлік мән $I = \sqrt{I_0^2 + \sum I_k^2}$; активті қуат тек бірдей жиіліктегі гармоникалардан құралады



Сызықты тізбек әр гармоника бойынша бөлек есептеледі, нәтижелер лездік мән түрінде беттестіріледі



Индуктивтілік жоғары гармоникаларды бәсеңдетеді, сыйымдылық күшейтеді; бұл сүзгілердің негізі

ӘДЕБИЕТ (силлабус бойынша)

[3] Hayt W. H., Kemmerly J. E., Durbin S. M. Engineering Circuit Analysis, 9th ed. — 733–782 б.