СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ

SATBAYEV UNIVERSITY

Статистика және деректерді талдау

Ержан Асел Ануаркызы,Ph.D., «Ақпараттық жүйелер» кафедрасының қауымдастырылған профессоры

Assel.yerzhan@satbayev.university

Ықтималдылықтар негіздері: кездейсоқтықты есепке айналдыру

Кездейсоқтық — адам санасы ежелден таңырқайтын құбылыс. Ықтималдылық теориясы сол кездейсоқтықты санның тіліне аударады, белгісіздікті өлшеуге, болжауға және басқаруға мүмкіндік береді. Бұл курс сізді математиканың ең қуатты, ең философиялық бай саласына — ықтималдылық теориясының іргетасына — бастайды.



Мақсат: «кездейсоқ» дегенді өлшеуге үйрену

Бұл курстың басты мақсаты — **«кездейсоқ» ұғымын нақты сандармен өрнектей білу**. Күнделікті өмірде біз «мүмкін», «іс жүзінде болмайды», «сенімді» деген сөздерді жиі қолданамыз. Ықтималдылық теориясы осы күнделікті тілді нақты математикалық тілге аударады.

Белгісіздікті санмен өрнектеу

Оқиғаның пайда болу мүмкіндігін 0 мен 1 аралығындағы санмен бейнелеу — ықтималдылық теориясының негізгі міндеті. Бұл сан арқылы «қаншалықты мүмкін?» деген сұраққа дәл жауап беруге болады.

Болжам жасау дағдысы

Нақты бір нәтижені кепілдеп айту мүмкін болмаса да, ықтималдылық мәні арқылы қандай нәтиже жиірек, қандайы сирек болатынын алдын ала бағалауға болады. Бұл — ғылым мен бизнестегі негізгі аналитикалық дағды.

Шешім қабылдау негізі

Ықтималдылық теориясы тек математикада емес, медицина, экономика, инженерия, жасанды интеллект саласында да шешуші рөл атқарады. Белгісіздік жағдайында дұрыс шешім қабылдаудың ғылыми тәсілін береді.

1-бөлім, кіріспе: неге ықтималдық қажет?

КІРІСПЕ

Кездейсоқ дүние — нақты жауапсыз дүние

Табиғат пен қоғамдағы көптеген құбылыстар — ауа райы, нарық бағасы, генетикалық мутациялар, трафик ағыны — алдын ала нақты болжауға келмейді. Дәл осы жерде ықтималдылық теориясы жұмысқа кіреді: нақты нәтижені айту орнына, нәтиженің «мүмкіндік дәрежесін» санмен анықтайды.

Ықтималдылық теориясы нені зерттейді?

Ықтималдылық теориясы — математиканың кездейсоқ оқиғаларды, олардың өзара байланысын және заңдылықтарын зерттейтін саласы. Ол бізге мына сұрақтарға жауап береді:

- Белгілі бір оқиға болу-болмауының мүмкіндігі қандай?
- Бірнеше оқиғаның бір мезгілде немесе кезек-кезек болу ықтималдылығы қандай?
- Бір оқиғаның болуы екіншісіне қалай әсер етеді?
- Ұзақ мерзімде кездейсоқ нәтижелер қандай заңдылыққа бағынады?

Осы сұрақтарға жауап беру арқылы ғалымдар, инженерлер және аналитиктер белгісіздікті басқара алады.

Тәжірибенің өзегі: сынақ пен оқиға

НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР

Ықтималдылық теориясының тілін меңгеру үшін алдымен негізгі ұғымдарды — **сынақ** және **оқиға** — нақты түсіну қажет.

Сынақ (эксперимент)

Сынақ — нақты шарттар жиынтығында жүргізілетін байқау немесе эксперимент. Сынақтың нәтижесі алдын ала белгісіз болады, бірақ барлық мүмкін нәтижелер алдын ала белгілі болуы шарт. Мысалдар: тиын лақтыру (нәтиже: бас немесе жазу), зар лақтыру (нәтиже: 1-ден 6-ға дейін), студенттің емтиханды тапсыруы (нәтиже: өтті немесе өтпеді).

Оқиға (событие)

Оқиға — сынақтың барлық мүмкін нәтижелерінің белгілі бір жиынтығы. Оқиғаға тек бір нәтиже де, бірнеше нәтиже де кіруі мүмкін. Мысалдар: зарда жұп сан шығу оқиғасы (2, 4, 6 — үш нәтиже), тиында бас шығу оқиғасы (бір нәтиже).

Нәтижелер кеңістігі (Ω)

Барлық мүмкін нәтижелердің жиыны нәтижелер кеңістігі деп аталады және Ω (Омега) әрпімен белгіленеді. Кез келген оқиға осы кеңістіктің бір бөлшегі болып табылады. Тиын лақтырғанда Ω = {Бас, Жазу}, зар лақтырғанда Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Ең маңызды аксиома: ықтималдылықтың шекарасы

АКСИОМАЛАР

Ықтималдылық теориясының іргетасы — **Колмогоров аксиомалары**. Олар ықтималдылықтың математикалық мінез-құлқын анықтайды және барлық формулалардың негізі болып табылады.

Сенімді оқиға: P(A) = 1

Егер оқиға **міндетті түрде орындалатын** болса, оның ықтималдылығы 1-ге тең. Мысалы, тиын лақтырғанда «бас немесе жазу шығу» оқиғасы — сенімді оқиға, себебі бұдан басқа нәтиже мүмкін емес. P(Ω) = 1.

Мүмкін емес оқиға: P(A) = 0

Егер оқиға **ешқашан орындалмайтын** болса, оның ықтималдылығы нөлге тең. Мысалы, тиын лақтырғанда «екеуі де бір мезгілде шығу» — мүмкін емес оқиға. P(∅) = 0.

Кездейсоқ оқиға: 0 < P(A) < 1

Болуы да, болмауы да мүмкін оқиғалар үшін ықтималдылық нөл мен бір арасындағы санмен өрнектеледі. Ықтималдылық мәні 1-ге неғұрлым жақын болса, оқиғаның болу мүмкіндігі соғұрлым жоғары. 0,5-ке жақын болса — тең мүмкіндікті білдіреді.

Маңызды шарт: барлық мүмкін оқиғалардың ықтималдылықтарының қосындысы әрқашан 1-ге тең болуы керек. Бұл — ықтималдылықтың нормалану шарты.

Оқиғалардың түрлері: сенімді, мүмкін емес, кездейсоқ

КЛАССИФИКАЦИЯ

Сенімді оқиға

Берілген тәжірибе жағдайында **міндетті түрде орындалатын** оқиға. Ықтималдылығы P = 1. Мысалы: тиынды лақтырғанда «бас немесе жазу шығу», кез келген адамның «туылғаны» туралы факт. Сенімді оқиға — барлық мүмкін нәтижелердің жиынтығымен сәйкес келеді.

Мүмкін емес оқиға

Берілген тәжірибе жағдайында **ешқашан орындалмайтын** оқиға. Ықтималдылығы P = 0. Мысалы: зар лақтырғанда «7 санының шығуы», тиынды бір рет лақтырғанда «екі рет бас шығуы». Бос жиынмен (∅) сәйкес келеді.

Кездейсоқ оқиға

Берілген тәжірибе жағдайында **болуы да, болмауы да мүмкін** оқиға. Ықтималдылығы 0 < P < 1. Бұл — ықтималдылық теориясының негізгі зерттеу нысаны. Мысалы: зарда жұп сан шығу (P = 1/2), нарықта баға өсуі, емтиханды жақсы тапсыру.

2-бөлім, логика: теңмүмкіндік және ықтималдылықтың мәні

ЛОГИКАЛЫҚ НЕГІЗ

Ықтималдылықтың классикалық анықтамасы **теңмүмкіндік** ұғымына сүйенеді. Бұл ұғымды дұрыс түсіну — ықтималдылықты дұрыс есептеудің алғышарты.

Теңмүмкіндік дегеніміз не?

Бірнеше нәтиже теңмүмкіндікті деп аталады, егер олардың **ешқайсысы екіншісінен артықшылыққа ие болмаса**. Яғни, сынақ жағдайлары бірдей болса, барлық нәтиже бірдей жиілікте туындауы тиіс. Мысалы: идеал тиын үшін бас та, жазу да бірдей мүмкіндікпен шығады. Идеал зар үшін 1-ден 6-ға дейінгі барлық сандар бірдей мүмкіндікпен шығады.

Теңмүмкіндіктің маңызы

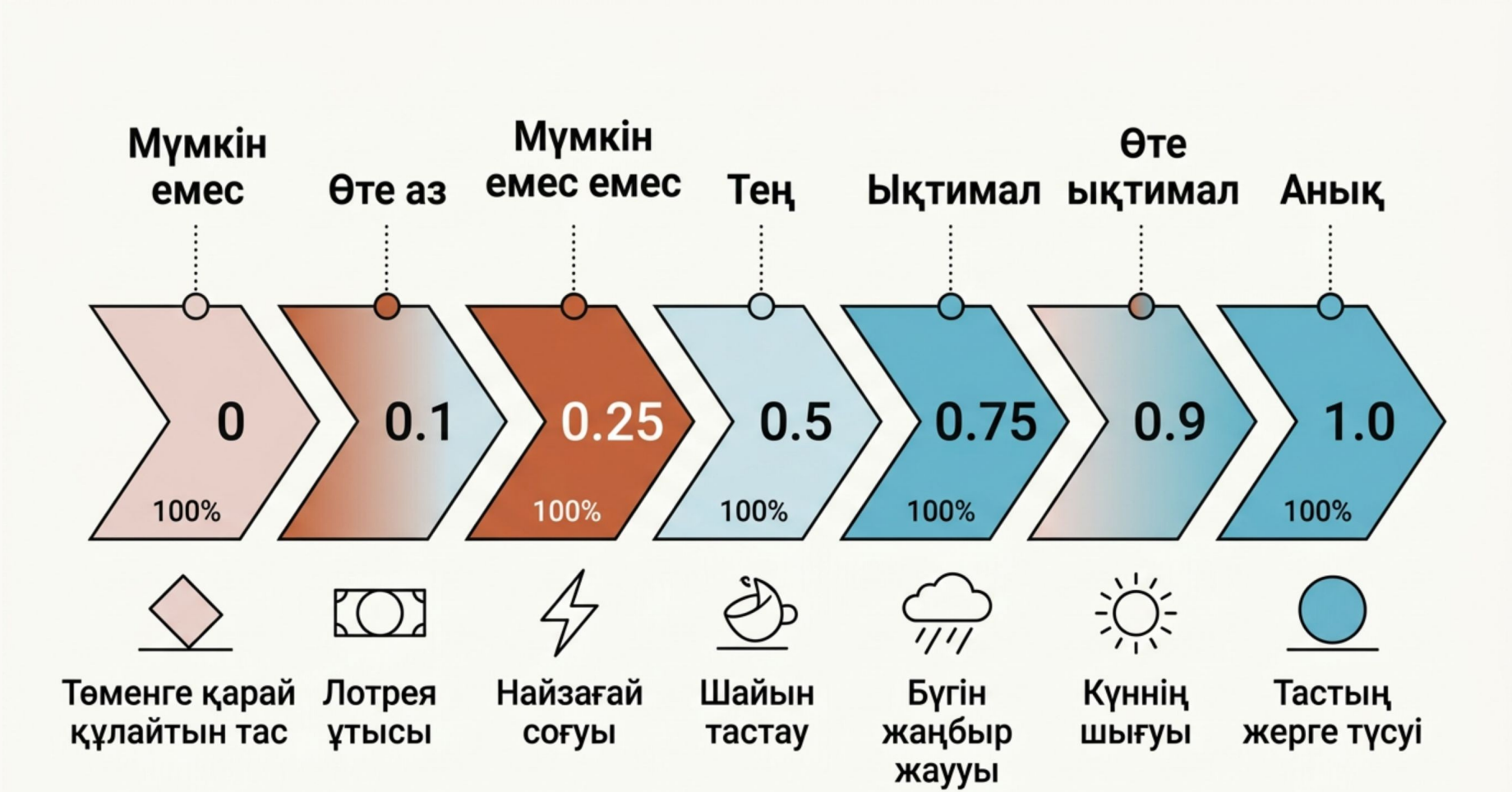
Теңмүмкіндік жағдайы болмаса, классикалық формуланы тікелей қолдану дұрыс болмайды. Мысалы:

- Деформацияланған тиын — бас пен жазудың мүмкіндігі тең емес
- Бірдей емес беттері бар зар — кейбір сандар жиірек шығады
- Нарықтағы баға өзгерісі — теңмүмкіндікті емес, статистикалық үлестірімге сүйенеді

Теңмүмкіндіктен ауытқу жағдайларда статистикалық немесе субъективті ықтималдылық ұғымдары қолданылады.

Ықтималдылықты «дәрежелеу» идеясы

Ықтималдылық — оқиғаның пайда болу мүмкіндігін [0, 1] кесіндісіндегі санмен өрнектеу. Бұл «дәрежелеу» идеясын визуалды түрде елестетейік:



Ықтималдылықты проценттермен де өрнектеуге болады

P = 0,5 дегеніміз — 50%, яғни оқиға екі жолдың бірінде болады деген мағынаны береді. P = 0,25 — 25%, яғни оқиға шамамен 4 сынақтың 1-інде болады деген мағынада. Проценттік өрнек күнделікті тілде жиі кездеседі: «жаңбыр жауу ықтималдылығы 70%».

Ықтималдылықты жиілік арқылы түсіну

Ықтималдылықтың интуитивті мағынасы — сынақты өте көп рет қайталағанда, оқиғаның болу *жиілігі* ықтималдылық мәніне жақындайды. Тиынды 1000 рет лақтырсақ, шамамен 500 рет бас шығады. Бұл — үлкен сандар заңының практикалық мазмұны.

3-бөлім, есептеу негізі: қарапайым оқиғалар

ЕСЕПТЕУ НЕГІЗІ

Элементар ықтималдылық теориясында сынақтың әр нәтижесі бір оқиғамен сәйкес келеді. Осы қарапайым жағдайдан бастап, ықтималдылықтың негізгі заңдылықтарын анықтауға болады.

1 Элементар оқиғалар

Элементар оқиға — сынақтың тек бір ғана нәтижесіне сәйкес келетін оқиға. Мысалы, зар лақтырғанда «нақты 3 санының шығуы» — элементар оқиға. Элементар оқиғаларды кіші бөліктерге бөлу мүмкін емес.

2 Нормалану шарты

Барлық элементар оқиғалардың ықтималдылықтарының қосындысы міндетті түрде 1-ге тең болуы керек: $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_n) = 1$. Бұл шарт ықтималдылықтың «ең болмағанда бір нәтиже болатыны» туралы сенімді көрсетеді.

3 Теңмүмкіндікті жағдайда формула

Барлық n элементар оқиғаның ықтималдылығы тең болса, әрқайсысының ықтималдылығы $P = 1/n$-ге тең. Зар үшін: P(кез келген бет) = 1/6 ≈ 0,167. Кез келген күрделі оқиғаның ықтималдылығы осы негізден есептеледі.

Қосу ережесі: орындалу мүмкіндігі

ТЕОРИЯ

Қосу ережесі

Егер A және A' оқиғалары **үйлеспейтін** болса (бір мезгілде бола алмайтын), онда олардың жиынтығының ықтималдылығы жеке ықтималдылықтарының қосындысына тең:

P(A ∪ A') = P(A) + P(A')

Егер A және A' — толық қарама-қарсы оқиғалар болса (яғни A болмаса A' міндетті), онда: P(A) + P(A') = 1.

Жалпы қосу ережесі

Егер оқиғалар үйлесетін болса (бір мезгілде болуы мүмкін), онда формула өзгереді:

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B)

Мұндағы P(A ∩ B) — екі оқиғаның бір мезгілде болу ықтималдылығы. Бұл мәнді азайту — есептеуде қайталау болмауы үшін қажет.

Мысал: карталар жинағынан бір карта алғанда, «пік немесе туз» шығу ықтималдылығы = P(пік) + P(туз) − P(пік туз) = 13/52 + 4/52 − 1/52 = 16/52.

«Қарама-қарсы» оқиғалар: бірінің жоқтығы — екіншісінің болуы

A оқиғасы	Ā (A-ның толықтауышы)	Байланыс формуласы
Ықтималдылығы P(A) болатын кез келген кездейсоқ оқиға. Мысалы: зарда жұп сан шығу. P(A) = 3/6 = 1/2.	A оқиғасының болмауы — яғни A оқиғасына кіретін нәтижелерден басқа барлық нәтижелер жиыны. Мысалы: зарда тақ сан шығу. P(Ā) = 1 − P(A) = 1 − 1/2 = 1/2.	P(A) + P(Ā) = 1. Бұл формула есепте тікелей есептеу қиын болса, кері жолмен шешуге мүмкіндік береді: P(Ā) = 1 − P(A). Практикада кері оқиға арқылы есептеу жиі ыңғайлы болады.

Практикалық кеңес: «Кем дегенде бір рет болу» оқиғасы тікелей есептеуден гөрі кері оқиға арқылы — «ешқашан болмау» ықтималдылығын 1-ден алу арқылы — жеңіл есептеледі.

Күрделі оқиға: бірнеше нәтижеге тәуелділік

КҮРДЕЛІ ОҚИҒАЛАР

Нақты өмірдегі есептердің көпшілігі жай оқиғалармен емес, **күрделі оқиғалармен** байланысты. Күрделі оқиғаны талдау — ықтималдылық теориясының практикалық жүрегі.

Күрделі оқиғаның анықтамасы

Күрделі оқиға — екі немесе одан көп қарапайым оқиғалардың нәтижесіне байланысты оқиға. Мысалы: «екі зарды лақтырғанда жалпы сомасы 7-ге тең болу» — бұл оқиға 6 түрлі комбинацияны (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1) қамтиды.

Тәуелсіз күрделі оқиға

Егер бір оқиғаның болуы екіншісінің ықтималдылығына **ешқандай әсер етпесе**, олар тәуелсіз делінеді. Тиынды екі рет лақтыру — тәуелсіз сынақтар мысалы. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Тәуелді күрделі оқиға

Егер бір оқиғаның болуы екіншісінің ықтималдылығын **өзгертсе**, олар тәуелді делінеді. Мысалы: қапшықтан карта алғанда орнына қоймасаң, екінші алудың ықтималдылығы өзгереді. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

4-бөлім, тәуелсіздік: есепті жеңілдететін шарт

ТӘУЕЛСІЗДІК

Тәуелсіздік шарты — ықтималдылық есептерінде формула таңдауға тікелей әсер ететін маңызды ұғым. Тәуелсіздікті дұрыс анықтай білу — дұрыс шешімнің кілті.

Тәуелсіздік анықтамасы

А және В оқиғалары **тәуелсіз** деп аталады, егер А оқиғасының болуы В оқиғасының ықтималдылығына ешқандай өзгеріс енгізбесе, және керісінше:

P(A ∩ B) = P(A) · P(B)

Бұл формула тек тәуелсіз оқиғалар үшін ғана жұмыс істейді. Тәуелді оқиғалар үшін шартты ықтималдылық формуласын қолдану қажет.

Тәуелсіздікті тексеру

Тәуелсіздікті тексерудің практикалық тәсілдері:

- **Физикалық байланыс жоқ ба?** Екі тиынды бір мезгілде лақтыру — физикалық тұрғыда тәуелсіз.
- **Ақпарат алмасу бар ма?** Бір оқиғаның нәтижесі екіншісі туралы ақпарат берсе — тәуелді.
- **Формуламен тексеру:** P(A ∩ B) = P(A) · P(B) орындалса — тәуелсіз.

Тәуелсіздік — барлық практикалық жағдайда физикалық немесе интуитивті тұрғыда бағалануы қажет маңызды ұғым.

Микро-визуал: «екі студент, бір емтихан» үлгісі

МЫСАЛ

Тәуелсіздік пен тәуелділік логикасын нақты мысалмен қарастырайық. Айша мен Болат бір емтиханды тапсыруда. Олардың ықтималдылықтары:

Тәуелсіздік жағдайы

Егер Айша мен Болат **бөлек дайындалса** және олардың нәтижелері бір-біріне ешбір байланысты болмаса — тәуелсіздік шарты орындалады. P(Айша өтті) = 0,8; P(Болат өтті) = 0,7. Екеуі де өту ықтималдылығы: P = 0,8 × 0,7 = 0,56, яғни 56%.

Тәуелділік жағдайы

Егер олар **бірге дайындалса** және Айша өтсе, Болаттың өту мүмкіндігі де артса — тәуелділік пайда болады. Бұл жағдайда P(Болат өтті | Айша өтті) ≠ P(Болат өтті). Шартты ықтималдылық формуласын қолдану қажет болады.

Практикалық қорытынды

Тәуелсіздік пен тәуелділік логикасын дұрыс анықтамасаң, есептің жауабы дұрыс болмайды. Сондықтан кез келген есепті шешер алдында: «Осы оқиғалар бір-біріне байланысты ма?» деген сұрақты міндетті түрде қою керек.

5-бөлім, үлкен сурет: ықтималдылық теориясының тарихи бастау нүктесі

ТАРИХ

Ықтималдылық теориясының тарихы — адамзаттың кездейсоқтықты ұғынуға деген ұзақ жолының бейнесі. Заманауи теорияның бастауы XVII ғасырда қалыптасты.

1

1654 — Паскаль мен Ферма

Блез Паскаль мен Пьер Ферма жазысуы арқылы «ойын мәселесі» шешімін тапты. «Кесілген ойынды» қалай бөлу керек деген сұрақ — алғашқы ресми ықтималдылық есебі болды.

2

1657 — Гюйгенс

Христиан Гюйгенс «Ойындағы есептеулер туралы» еңбегін жазды — ықтималдылық теориясының алғашқы жарияланған кітабы. «Математикалық күту» ұғымы осы еңбекте алғаш рет нақтыланды.

3

1713 — Бернулли

Якоб Бернуллидің «Болжам өнері» (Ars Conjectandi) кітабы жарық көрді. «Үлкен сандар заңы» алғаш рет дәлелденді: сынақ санын арттырғанда орташа нәтиже ықтималдылыққа жақындайды.

4

1812 — Лаплас

Пьер-Симон Лаплас ықтималдылық теориясын толық жүйеге келтірді. Классикалық анықтама, орталық шектік теорема, Байес теоремасы — осы кезеңде ресімделді.

5

1933 — Колмогоров

Андрей Колмогоров ықтималдылық теориясын аксиоматикалық негізге қойды. Заманауи математикалық ықтималдылық теориясының іргетасы — осы кезден бастап нық орнықты.

6-бөлім: Ықтималдылықтың классикалық анықтамасы

КЛАССИКАЛЫҚ АНЫҚТАМА

Лаплас формуласы

Ықтималдылықтың классикалық анықтамасы Лаплас атымен байланысты:

P(A) = m / n

мұнда **m** — A оқиғасына қолайлы (қанағаттандыратын) элементар нәтижелер саны, **n** — барлық мүмкін элементар нәтижелер саны.

Бұл формула барлық нәтижелер теңмүмкіндікті болған жағдайда ғана дұрыс жұмыс істейді.

Шектеулілік пен мысалдар

Классикалық анықтаманың шектеулері:

- Нәтижелердің **теңмүмкіндіктігі шарты** міндетті — бұл барлық жағдайда орындала бермейді
- Нәтижелер **саны шекті** болуы шарт — шексіз жағдайларда геометриялық ықтималдылық қолданылады
- Бастапқыда шарттар анық болмаса, «теңмүмкіндік» деп болжау қателікке алып келуі мүмкін

Мысалдар:

- Тиын: P(бас) = 1/2 = 0,5
- Зар: P(6) = 1/6 ≈ 0,167
- Карталар: P(туз) = 4/52 = 1/13 ≈ 0,077

7-бөлім: Геометриялық ықтималдылық

ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫЛЫҚ

Мүмкін нәтижелер саны **шексіз** болғанда — мысалы, нүктенің аймақтың кез келген жерінде болуы мүмкін болса — классикалық формула жұмыс істемейді. Мұндай жағдайда **геометриялық ықтималдылық** қолданылады.

Негізгі идея

Геометриялық ықтималдылықта ықтималдылық **өлшем қатынасы** арқылы анықталады: ұзындық, аудан немесе көлем. Формула: P(A) = (A оқиғасына сәйкес келетін аймақ өлшемі) / (барлық мүмкін аймақтың өлшемі). Кез келген нүктенің аймақта бірдей мүмкіндікпен орналасуы шарт.

Нысанаға тигізу мысалы

Нысана — 1 м² аудандағы шеңбер, ортасындағы бұта — 0,1 м². Садақшы кездейсоқ нүктеге тигізеді деп болсақ, нысананың дәл ортасына тигізу ықтималдылығы: P = 0,1 / 1,0 = 0,1 = 10%.

Бюффон инесі — классикалық мысал

XVIII ғасырда Жорж Бюффон ұсынған классикалық есеп: параллель сызықтары бар беттке ине лақтырсақ, инені бір сызыққа тигізу ықтималдылығы: P = 2l / (πd), мұнда l — ине ұзындығы, d — сызықтар арасының қашықтығы. Бұл есеп арқылы π санын бағалауға болады!

8-бөлім: Комбинаторика – есептеудің құралы

КОМБИНАТОРИКА

Күрделі ықтималдылық есептерінде қолайлы нәтижелер мен барлық мүмкін нәтижелердің санын есептеу үшін **комбинаторика** қолданылады.

1

Факториал

n! = 1 × 2 × 3 × … × n. Факториал — n элементті бір қатарға нешесі жолмен орналастыруға болатынын көрсетеді. Мысалы: 5! = 120, яғни 5 элементті 120 түрлі ретпен орналастыруға болады. 0! = 1 деп қабылданады.

2

Орналастыру (Permutation)

n элементтен r элементті **ретпен** таңдау санының формуласы: P(n,r) = n! / (n−r)!. Мысалы: 10 жеңімпаз арасынан 1-3 орынды бөлу тәсілі: P(10,3) = 10!/7! = 720. Реттің маңызы бар жағдайда қолданылады.

3

Теру (Combination)

n элементтен r элементті **ретсіз** таңдау санының формуласы: C(n,r) = n! / (r! × (n−r)!). Мысалы: 52 карталық жинақтан 5 карта таңдау тәсілі: C(52,5) = 2 598 960. Реттің маңызы жоқ жағдайда қолданылады.

Комбинаторика ықтималдылық теориясының ажырамас бөлігі. Лото, покер, генетика, криптография — барлығы комбинаторикаға сүйенеді.

9-бөлім: Шартты ықтималдылық

ШАРТТЫ ЫҚТИМАЛДЫЛЫҚ

Анықтама және формула

Шартты ықтималдылық — B оқиғасы болды деп белгілі болғандағы A оқиғасының ықтималдылығы. Белгіленуі: **P(A|B)** — «B болғанда A-ның ықтималдылығы».

Формула: **P(A|B) = P(A ∩ B) / P(B)**, мұнда P(B) > 0.

Бұл формула «B болды» деген ақпарат A-ның ықтималдылығын қалай өзгертетінін көрсетеді. Шартты ықтималдылық — тәуелді оқиғалардың негізгі есептеу құралы.

Медициналық мысал

Ауруды диагностикалауда шартты ықтималдылық өте маңызды. Мысалы:

- P(аурулы) = 0,01 (популяцияда 1% ауру)
- P(тест оң | аурулы) = 0,99 (тест сезімталдылығы)
- P(тест оң | сау) = 0,05 (жалған оң нәтиже)

«Тест оң нәтиже берсе, адам шынымен аурулы болу ықтималдылығы қандай?» — бұл шартты ықтималдылық сұрағы. Байес теоремасы арқылы есептеледі: P(аурулы | тест оң) ≈ 0,166, яғни небәрі 16,6%! Бұл нәтиже дәрігерлер мен науқастарды жиі таң қалдырады.

10-бөлім: Толық ықтималдылық формуласы

ТОЛЫҚ ЫҚТИМАЛДЫЛЫҚ

Оқиға бірнеше **«жол»** арқылы жүзеге асуы мүмкін болғанда, толық ықтималдылық формуласы қолданылады. Ол «барлық мүмкін жолдар арқылы орташа ықтималдылық» ұғымын береді.

Гипотезалар жүйесі

H_1, H_2, …, H_n — бір-бірін жоққа шығаратын және барлық кеңістікті жабатын оқиғалар (гипотезалар). Мысалы: 3 зауыт өнім шығарады — H_1 (1-зауыт), H_2 (2-зауыт), H_3 (3-зауыт). $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$.

Толық ықтималдылық формуласы

$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A|H_n)$. Яғни, A оқиғасының толық ықтималдылығы — әр гипотеза бойынша шартты ықтималдылықтардың гипотеза ықтималдылықтарымен өлшенген орташасы.

Зауыт мысалы

1-зауыт 50% өнім шығарады, ақаулы өнім үлесі 2%. 2-зауыт 30% шығарады, ақаулы 3%. 3-зауыт 20% шығарады, ақаулы 5%. Кездейсоқ алынған өнімнің ақаулы болу ықтималдылығы: P(ақаулы) = $0{,}5\cdot 0{,}02 + 0{,}3\cdot 0{,}03 + 0{,}2\cdot 0{,}05 = 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}01 = 0{,}029$, яғни 2,9%.

11-бөлім: Байес теоремасы – кері ықтималдылық

БАЙЕС ТЕОРЕМАСЫ

Байес теоремасы ықтималдылық теориясының ең революциялық идеяларының бірі. Ол «нәтиже белгілі болғанда, оны тудырған себепті анықтауға» мүмкіндік береді.

Теорема формуласы

$$P(H_i|A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i) / P(A)$$

мұнда:

- **$P(H_i)$** — алдын ала ықтималдылық (prior): A нәтижесін байқамай тұрғандағы гипотеза ықтималдылығы
- **$P(A|H_i)$** — H_i гипотезасы дұрыс болса, A нәтижесін байқау ықтималдылығы
- **$P(H_i|A)$** — кейінгі ықтималдылық (posterior): A нәтижесін байқағаннан кейінгі жаңартылған ықтималдылық

Байес теоремасының қолданылуы

Медицина: Тест нәтижесі бойынша ауруды анықтау. Жалған оң нәтижелердің ықтималдылығын бағалау.

Спам сүзгілеу: Gmail, Outlook сияқты жүйелер Байес классификаторын қолданады. «Spam» сөзі кіргенде электрондық хаттың спам болу ықтималдылығы есептеледі.

Жасанды интеллект: Байес желілері (Bayesian Networks) — белгісіздік жағдайындағы шешім қабылдаудың математикалық моделі. Автономды автомобильдерден бастап финансиялық болжамға дейін қолданылады.

Сот ісі: ДНҚ сараптамасы нәтижелерін дұрыс интерпретациялауда Байес теоремасы — міндетті құрал.

12-бөлім: Бернулли схемасы

БЕРНУЛЛИ СХЕМАСЫ

Бернулли схемасы — тәуелсіз сынақтардың қайталануы моделі. Практикада ең жиі кездесетін ықтималдылық модельдерінің бірі.

Схеманың шарттары

Бернулли схемасы үшін 4 шарт орындалуы керек: 1) Сынақ n рет қайталанады; 2) Әр сынақта тек екі нәтиже мүмкін — «табыс» (p) немесе «сәтсіздік» (q = 1−p); 3) Барлық сынақтарда табыс ықтималдылығы p тұрақты болады; 4) Сынақтар бір-бірінен тәуелсіз.

Биномдық формула

n сынақта дәл k рет табысқа жету ықтималдылығы: $\mathbf{P(X=k) = C(n,k) \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$. Мысалы: тиынды 10 рет лақтырғанда дәл 7 рет бас шығу ықтималдылығы: $P = C(10,7) \cdot (0{,}5)^7 \cdot (0{,}5)^3 = 120 \cdot (0{,}5)^{10} \approx 0{,}117$, яғни шамамен 11,7%.

Практикалық қолданыстар

Бернулли схемасы өмірде кеңінен қолданылады: дәрінің n пациентте тиімді болу ықтималдылығы, сауалнамада n адамның «иә» деп жауап беру ықтималдылығы, өндірісте n өнімнің ішіндегі ақаулы өнімдер саны, спортта n ойыннан k жеңіс жеңіп алу ықтималдылығы.

13-бөлім: Кездейсоқ шамалар

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

Анықтама және түрлері

Кездейсоқ шама — кездейсоқ сынақтың нәтижесіне байланысты мән қабылдайтын сандық функция. X әрпімен белгіленеді.

Дискретті кездейсоқ шама — санауға болатын (шекті немесе санылатын шексіз) мәндер жиынтығын қабылдайды. Мысалдар: зарда шыққан сан (1, 2, 3, 4, 5, 6), лотереядағы ұтыс саны, бір сағатта түскен телефон қоңыраулары саны.

Үздіксіз кездейсоқ шама — белгілі бір аралықтағы кез келген нақты санды қабылдай алады. Мысалдар: адамның бойы, өнімнің салмағы, күту уақыты.

Математикалық күту және дисперсия

Математикалық күту (M[X] немесе E[X]) — кездейсоқ шаманың «орташа» мәні, яғни сынақты өте көп рет қайталағандағы орташа нәтиже. Дискретті жағдайда: $M[X] = \Sigma\, x_i \cdot P(X=x_i)$. Мысалы, идеал зар үшін: $M[X] = 1\cdot(1/6) + 2\cdot(1/6) + \ldots + 6\cdot(1/6) = 3{,}5$.

Дисперсия (D[X] немесе Var[X]) — кездейсоқ шаманың математикалық күтуден «таралу» дәрежесін өлшейді. $D[X] = M[(X - M[X])^2] = M[X^2] - (M[X])^2$. Дисперсияның квадрат түбірі — **стандартты ауытқу (σ)**, ол шаманың орташадан орта алшақтығын береді.

14-бөлім: Үлкен сандар заңы

ҮЛКЕН САНДАР ЗАҢЫ

Үлкен сандар заңы — ықтималдылық теориясының ең маңызды теоремаларының бірі. Ол кездейсоқтықтың ішінде заңдылық жататынын математикалық тілде дәлелдейді.

Негізгі идея

Сынақ саны n шексіздікке ұмтылған сайын, байқалған орташа мән (жиілік) математикалық күтуге (теориялық ықтималдылыққа) жақындайды. Тиынды 10 рет лақтырсаң — бас 3 рет немесе 7 рет шығуы мүмкін. 10 000 рет лақтырсаң — бас шығу жиілігі 0,5-ке өте жақын болады.

Чебышев теңсіздігі

Чебышев теңсіздігі — кез келген кездейсоқ шама үшін $P(|X - M[X]| \geq \varepsilon) \leq D[X] / \varepsilon^2$. Бұл теңсіздік «ауытқудың тым үлкен болу ықтималдылығы» туралы жалпы баға береді. Нақты үлестірім заңын білмесек те қолдануға болатын «әмбебап» нәтиже.

Практикалық маңызы

Үлкен сандар заңы статистиканың, социологияның, сақтандырудың, сапа бақылауының негізі. Сақтандыру компаниялары оны мыңдаған клиент бойынша орташа тәуекелді есептеу үшін, зауыттар өнім партиясынан сынама алу арқылы жалпы сапаны бағалау үшін қолданады.

15-бөлім: Шектік теоремалар

ШЕКТІК ТЕОРЕМАЛАР

Орталық шектік теорема

Орталық шектік теорема (ОШТ) — математиканың ең таңғажайып нәтижелерінің бірі. Теорема мазмұны: **тәуелсіз, бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалардың қосындысы, сан артқан сайын, қалыпты үлестірімге жақындайды** — бастапқы үлестірімнің формасына қарамастан!

Яғни, зарды 100 рет лақтырып, нәтижелердің қосындысын алсаң — ол қосынды Гаусс қисығы бойынша үлестіріледі. Тіпті бастапқы зар бірқалыпты үлестірімге ие болса да!

Гаусс қисығы және оның мағынасы

Гаусс қисығы (қалыпты үлестірім, «қоңырау тәрізді қисық») — табиғаттағы кездейсоқтықтың бейнесі:

- Адамдардың бойы, салмағы — қалыпты үлестірімге бағынады
- Өлшеу қателіктері — қалыпты үлестіріледі
- IQ балдары — қалыпты үлестірімге стандартталған
- Нарықтық баға өзгерістері — шамамен қалыпты үлестірімге бағынады

ОШТ — неге осыншама көп табиғи және әлеуметтік құбылыс Гаусс қисығына бағынатынын түсіндіреді: олар көптеген тәуелсіз факторлардың қосындысы болып табылады.

16-бөлім: Ықтималдылық және ойын теориясы

ОЙЫН ТЕОРИЯСЫ

Ықтималдылық теориясы мен ойын теориясының байланысы — стратегиялық шешім қабылдаудың математикалық негізін береді.

Паскаль мен Ферма — ойын мәселесі

1654 жылы шевалье де Мере Паскальға мынадай сұрақ қойды: «Ойын тоқтатылса, жиналған ставкаларды екі ойыншы арасында қалай әділ бөлуге болады?» Паскаль пен Ферманың жазысуы — ықтималдылық теориясының туу нүктесі. Олар «болашақ жеңіс мүмкіндігіне» пропорционал бөлу принципін ұсынды — тәуекелді бағалаудың алғашқы математикалық моделі.

Тәуекелді бағалау

Қаржы нарығында, бизнесте және саясатта шешім қабылдаушылар ықтималдылықтар негізінде тәуекелді бағалайды. Күтілетін мән (expected value) концепциясы — инвестицияның орташа пайдасын есептейді. Қаржылық туындылар (derivatives), опциондар, фьючерстер — ықтималдылық теориясынсыз мүмкін болмас еді.

Нэш тепе-теңдігі

Джон Нэш (Nobel 1994) бәсекелі ортадағы «оңтайлы стратегия» ұғымын математикалық тұрғыда нықтады. Жаулас үшін оңтайлы стратегия — қарсыластың стратегиясын есепке ала отырып, ықтималдылық бойынша ең жоғары нәтиже беретін таңдау. Покер, аукцион, мемлекетаралық келіссөздер — Нэш тепе-теңдігімен талданады.



Ықтималдылық және деректер ғасыры: Жасанды интеллект негізі

XXI ғасырда ықтималдылық теориясы жасанды интеллект пен деректер ғылымының математикалық іргетасына айналды. Заманауи технологиялардың артында — ықтималдылық теориясының жүздеген жылдық мұрасы тұр.

95%

ЖИ шешімдері

Заманауи жасанды интеллект жүйелерінің шамамен 95%-ы ықтималдылықтық модельдерге сүйенеді

8T$

ЖИ нарығы

2030 жылға қарай жасанды интеллект нарығының болжамды мөлшері — 8 триллион АҚШ доллары

1763

Байес теоремасы

Томас Байестің теоремасы жарияланған жыл — заманауи ЖИ-нің математикалық негізі

Машиналық оқыту: Болжамдардың математикалық сиқыры

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ

Машиналық оқыту — ықтималдылық теориясының ең заманауи және кең ауқымды қолданысы. Барлық танымал ЖИ жүйелерінің математикалық жүрегінде ықтималдылық теориясы жатыр.

Деректерді талдау: Үлгілерді анықтау

Машиналық оқыту алгоритмдері үлкен деректер жиынтығында (Big Data) ықтималдылық үлестірімдерін анықтайды. Мысалы, электрондық поштаның спам болу ықтималдылығын есептеу, суреттегі объектіні тану (ResNet, ViT) — барлығы ықтималдылықтық классификация. Нейрондық желілердің соңғы қабатындағы Softmax функциясы — ықтималдылықтар векторын шығарады.

Байес теоремасының рөлі: Үздіксіз жаңарту

Байес машиналық оқытуы (Bayesian ML) — жаңа деректер түскен сайын модельді жаңартудың математикалық принципі. Алдын ала ықтималдылық (prior) + жаңа деректер → жаңартылған ықтималдылық (posterior). ChatGPT, Claude сияқты тілдік модельдер де алдыңғы сөздер контекстінде келесі сөздің ықтималдылығын есептейді.

Ұсыныс жүйелері: Болашағыңызды болжау

Netflix, YouTube, Spotify, Amazon — осы платформалардың ұсыныс жүйелері ықтималдылықтық колаборативті сүзгілеуге (collaborative filtering) негізделген. Сіздің тарихыңыздан үлгі шығарылады → ұқсас пайдаланушылардың тарихымен салыстырылады → сіз таңдайтын мазмұнның ықтималдылығы есептеледі → жоғарырақ ықтималдылықты мазмұн ұсынылады.

Кездейсоқтықтан стратегияға: Шешім қабылдау өнері

ПРАКТИКАЛЫҚ ҚОЛДАНЫС

Тәуекелдерді басқару: Қаржы нарығы

Қаржы нарығы — ықтималдылық теориясының ең ірі «зертханасы». Портфель теориясы (Markowitz, 1952) кездейсоқ шамалардың дисперсиясы мен ковариациясы арқылы тәуекелді барынша азайтуға мүмкіндік береді. Black-Scholes опцион баға формуласы — стохастикалық дифференциалдық теңдеулерге негізделген. Тәуекелдегі мән (Value at Risk, VaR) — портфелі белгілі бір сенімділік деңгейімен (95% немесе 99%) белгілі мерзімде жоғалтуы мүмкін максималды шығынды ықтималдылықтық тұрғыда бағалайды.

Оңтайлы шешімдер мен белгісіздік

Ойын теориясының қолданысы: Бәсекелестік ортада оңтайлы стратегияны таңдау — аукциондарда баға белгілеу, нарықтық бәсекеде стратегия, дипломатиялық келіссөздерде ұсыныс жасау — барлығы ықтималдылыққа негізделген ойын теориясымен талданады.

Кездейсоқ шамалардың өмірлік маңызы:

- Медицинада: клиникалық сынақтардың нәтижесін талдау
- Инженерияда: құрылғылардың істен шығу ықтималдылығын болжау
- Экологияда: климат өзгерісінің экстремалды оқиғаларға әсерін бағалау
- Логистикада: жабдықтау тізбегіндегі кідірістерді басқару

Қорытынды: Кездейсоқтық – мүмкіндіктер әлемі

Ықтималдылық — дүниені түсінудің тілі

Ықтималдылық теориясы тек математикалық дисциплина емес — ол белгісіздік жағдайындағы ойлаудың, талдаудың және шешім қабылдаудың жалпыға бірдей тілі. Паскальдан Колмогоровқа, Байестен Нэшке дейін — ғалымдардың бірнеше ғасырлық еңбегі кездейсоқтықты ізге түсірді.

Болашаққа қарай: Квант ықтималдылығы

Кванттық механика классикалық ықтималдылықты жаңа деңгейге апарады. Кванттық битте (кубит) бір мезгілде 0 да, 1 де болуы мүмкін — суперпозиция принципі. Кванттық компьютерлер ықтималдылықтық алгоритмдер арқылы классикалық компьютерлерге мүмкін болмаған есептерді шешеді: есірткі молекулаларын моделдеу, жаңа материалдарды жобалау, криптографияны бұзу.

Шақыру: Заңдылықты ізде

Кез келген кездейсоқ оқиғаның артында заңдылық жатыр — оны тек жеткілікті деректермен және дұрыс математикалық аппаратпен ашуға болады. Ықтималдылық теориясын меңгерген адам белгісіздік алдында дәрменсіз болмайды — ол белгісіздікті өлшеп, басқарып, одан стратегиялық артықшылық ала алады.

> «Өмір — мүмкіндіктер ойыны. Ықтималдылық теориясы — сол ойынның ережелері.» — Пьер-Симон Лаплас рухында