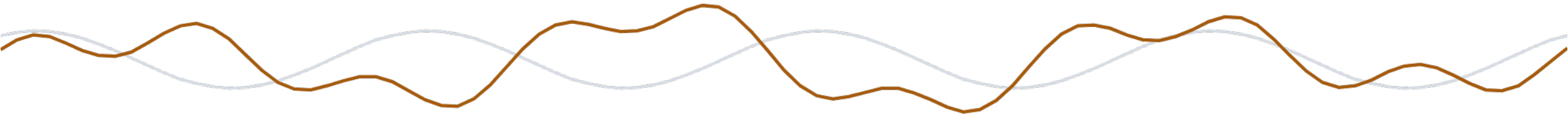
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

1-дәріс
Сигналдар және оларды талдау әдістері

Классификация · математикалық модельдер · Фурье қатары мен түрлендіруі · спектрлік диаграммалар



КІРІСПЕ

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

Сигналдардың түрлерін, математикалық модельдерін және классификациясын меңгеру; сигналдарды уақыт пен жиілік аймағында талдауды үйрену; Фурье қатары мен түрлендіруі арқылы спектрлік сипаттама беру дағдысын қалыптастыру.

1. Сигнал ұғымы және оның математикалық модельдері
2. Классификация: детерминирленген және кездейсоқ; үздіксіз, дискретті, цифрлық
3. Уақыт және жиілік аймақтарында талдау әдістері
4. Периодты сигналдардың Фурье қатарына жіктелуі
5. Периодты емес сигналдар және Фурье түрлендіруі
6. Спектрлік сипаттамалар мен диаграммалар

Сигналдар уақыт пен деңгей бойынша ажыратылады



Детерминирленген / кездейсоқ

Мәнін кез келген t сәтінде дәл болжауға бола ма? Кездейсоқ сигнал — процестің бір жүзеге асуы.

Үздіксіз → дискретті

Уақыт бойынша таңдау: u(nTд), мұндағы Тд — дискреттеу қадамы.

Дискретті → цифрлық

Деңгей бойынша кванттау: шекті разрядты кодтар, q — кванттау қадамы.

Сигнал — хабарды тасымалдайтын процестің моделі

Теорияда физикалық процестің өзі емес, оның аналитикалық сипаттамасы u(t) немесе f(s) қарастырылады.

Гармоникалық тербеліс — детерминирленген сигналдың классикалық мысалы: оның мәні кез келген уақыт сәтінде белгілі.

Энергиясы шектеулі сигналдар (импульстер) E арқылы, қуаты шектеулі сигналдар (периодты) P арқылы сипатталады.

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

$$u_{\mathrm{d}}(n) = u(nT_{\mathrm{d}}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$u_{\mathrm{q}}(n) = q \cdot \mathrm{round}[u(nT_{\mathrm{d}})/q]$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\,dt, \qquad P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u^2(t)\,dt$$

Периодты сигнал — гармоникалардың қосындысы

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\cos k\omega_1 t\, dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\sin k\omega_1 t\, dt$$

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}, \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

Дирихле шарттары

Периодта шенелген, үзілістері мен экстремумдары саны шекті сигнал жіктеледі.

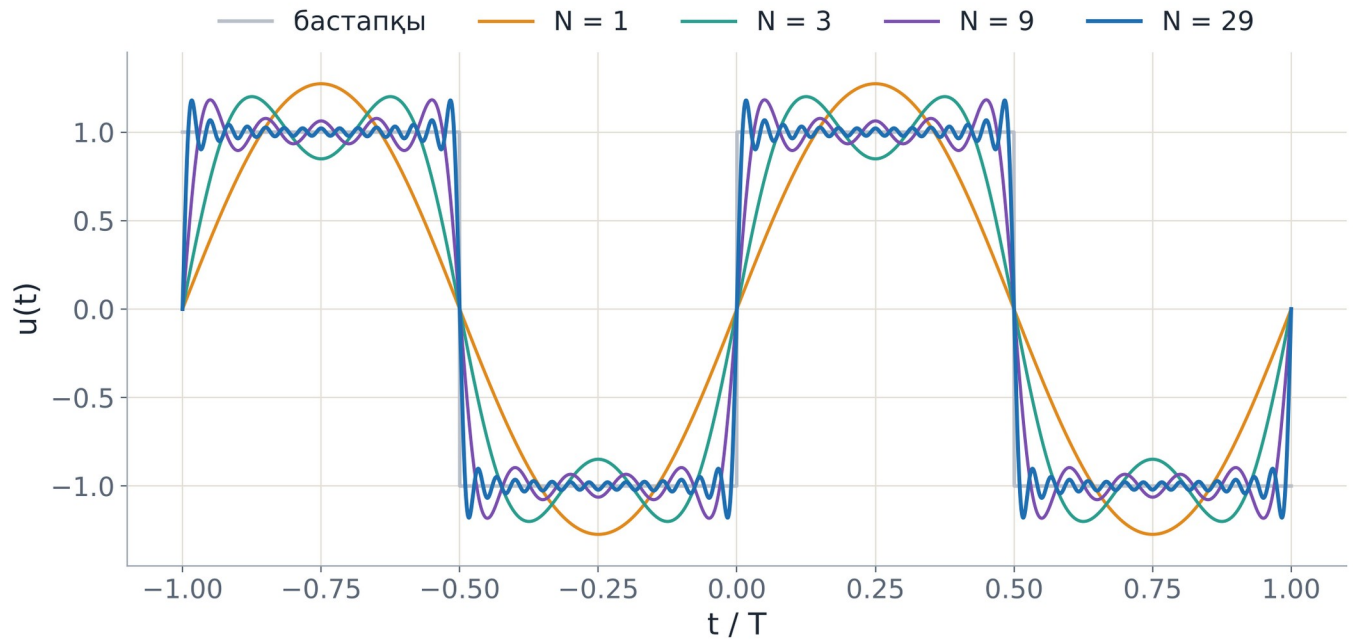
Негізгі жиілік

$\omega_1 = 2\pi/T$; k-гармоника $k\omega_1$ жиілігінде орналасады.

Комплекс түрі

$|C_k|$ — амплитудалық спектр, $\arg C_k$ — фазалық спектр.

Тікбұрышты толқынның ішінара қосындылары



Тек тақ гармоникалар

$b_k = 4/(\pi k)$, $k = 1, 3, 5, \ldots$; $a_k = 0$ — сигнал тақ функция.

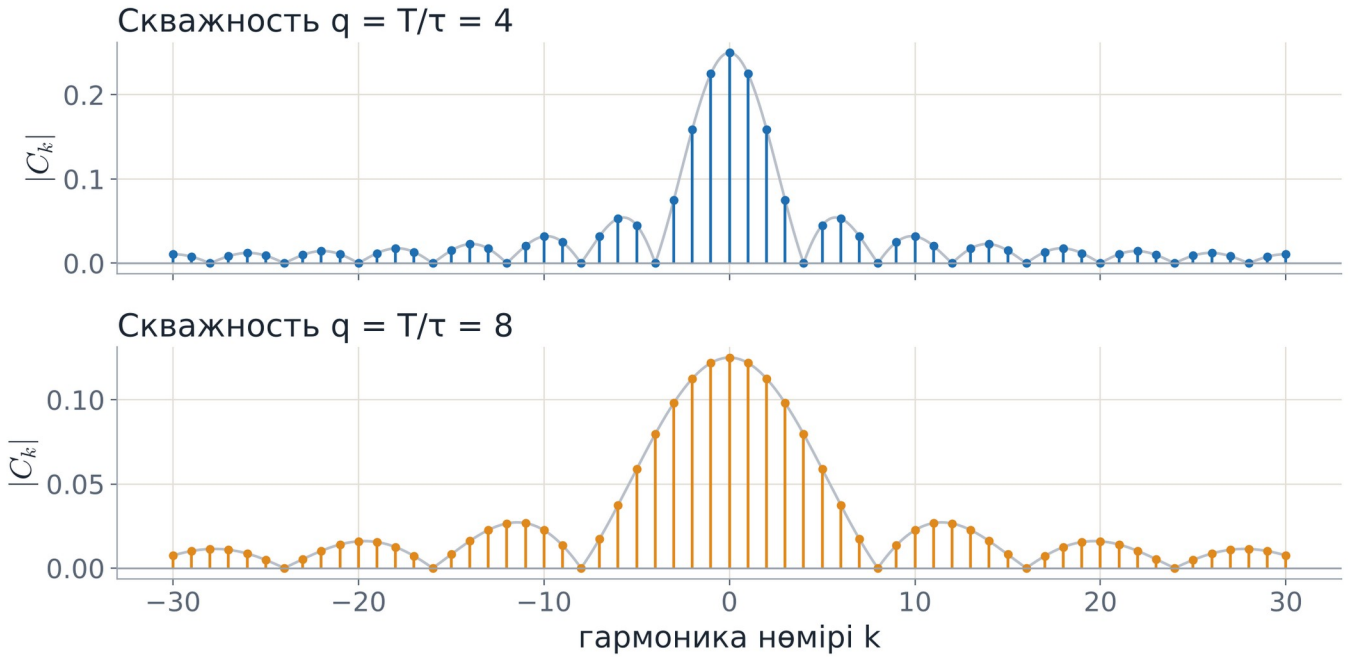
Гиббс эффектісі

Үзіліс маңында секірудің ≈ 9 %-ына тең асып кету N өскенде жойылмайды.

Орташа квадраттық жинақтылық

Қате энергиясы N артқан сайын нөлге ұмтылады.

Тікбұрышты импульстер тізбегінің спектрі



$$C_k = \frac{A\tau}{T}\frac{\sin(k\omega_1\tau/2)}{k\omega_1\tau/2}$$

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau}, \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Нөлдік гармоникалар

q = 4 болса, әр 4-ші гармоника жоқ: k = 4, 8, 12, …

Негізгі заңдылық

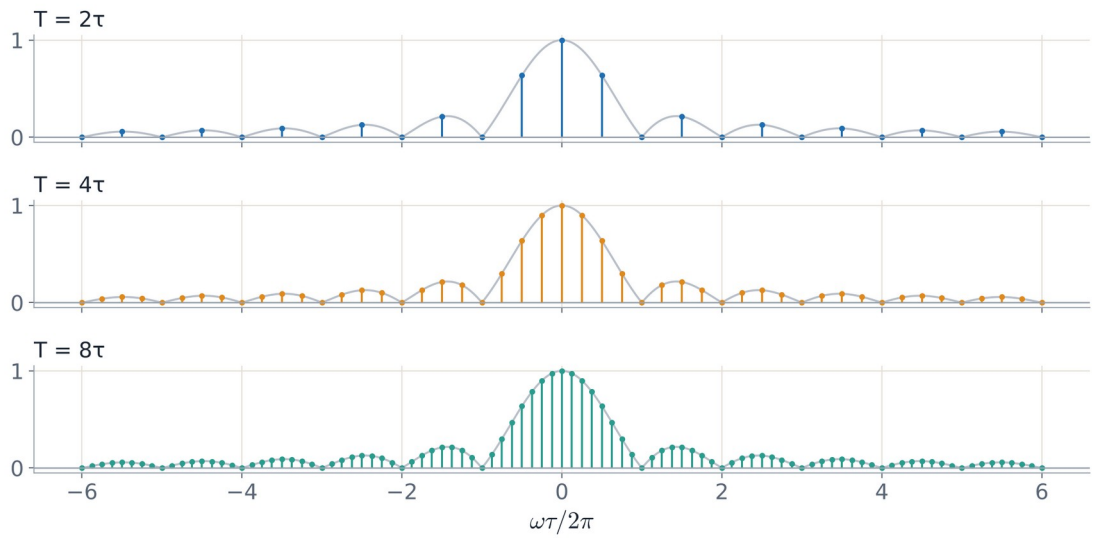
T өссе — сызықтар жиілейді; τ кемісе — спектр кеңейеді.

T → ∞: сызықтық спектр тұтас спектрге айналады

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

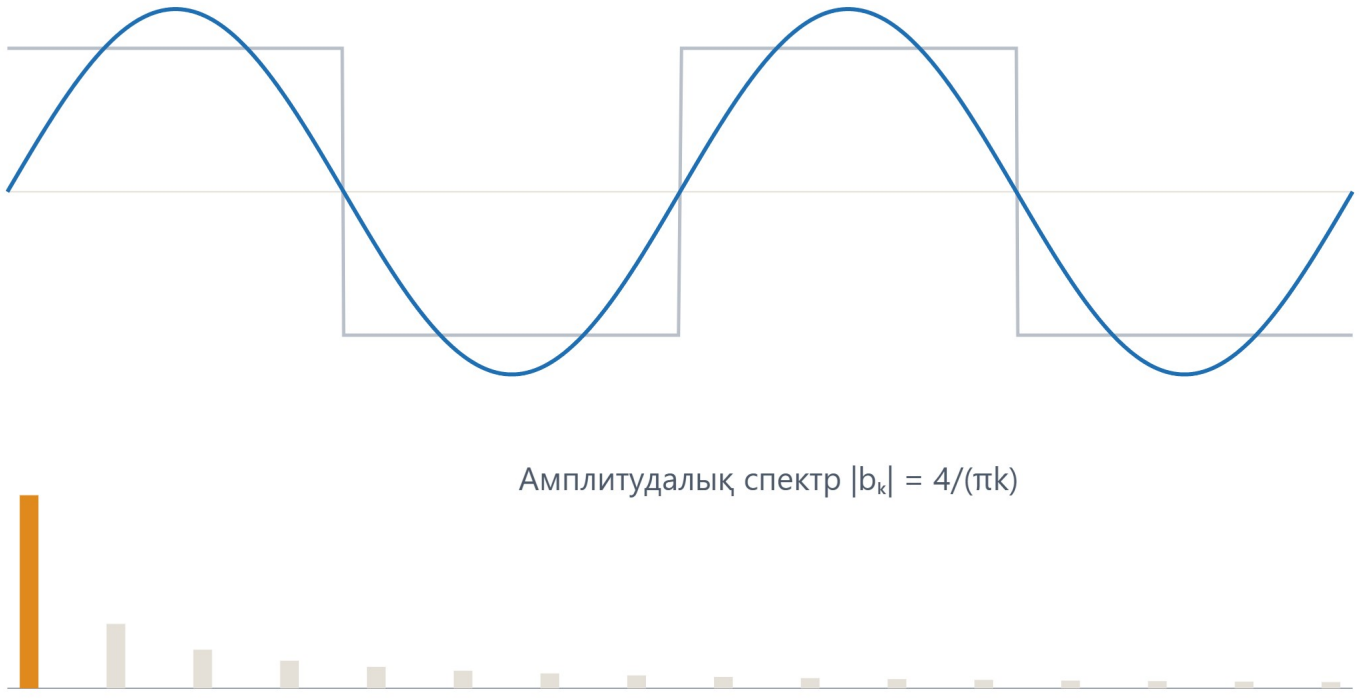
$$C_k = \frac{1}{T} S(k\omega_1) \quad (T \to \infty:\ \omega_1 \to d\omega)$$



Периодты емес сигнал — периоды шексіз сигнал. Гармоникалар арасы $\omega_1 \to d\omega$, ал $C_k \cdot T$ шамасы спектрлік тығыздық $S(\omega)$-ға ұмтылады.

АНИМАЦИЯ · ФУРЬЕ СИНТЕЗІ

Гармоникаларды біртіндеп қосу



Не көрінеді

Көк — ішінара қосынды, қызғылт сары — жаңадан қосылған гармоника, сұр — бастапқы сигнал.

Тапсырма

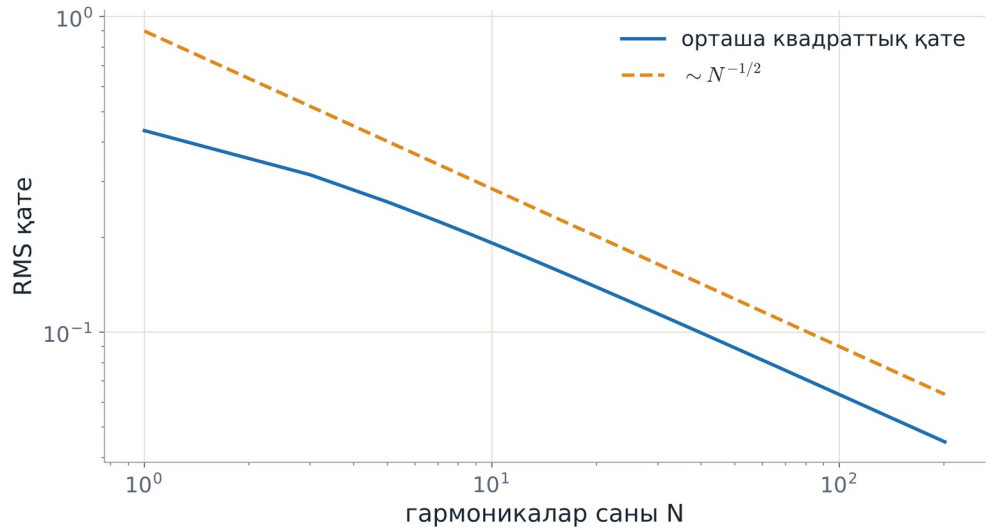
N = 31 болғанда асып кету неге азаймайды? Қатенің энергиясы қалай өзгереді?

ЗЕРТТЕУ · САНДЫҚ ЭКСПЕРИМЕНТ

Гиббс эффектісі: асып кету тұрақты, қате кемиді

N	Асып кету, %	RMS қате	Энергия, %
5	9.42	0.2587	93.31
11	9.07	0.1836	96.63
21	8.98	0.1357	98.16
51	8.96	0.0883	99.22
101	8.95	0.0630	99.60
201	8.95	0.0448	99.80

N — соңғы (тақ) гармоника; асып кету секіруге (2A) қатысты.



Қорытынды: асып кету N-ге тәуелсіз ≈ 8.95 % шегіне ұмтылады, ал RMS қате ≈ 1/√N заңымен кемиді — Фурье қатары нүктелік емес, орташа квадраттық мағынада жинақталады.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

Сигнал түрлері және оларды талдау құралдары

Сигнал	Уақыт	Деңгей	Модель	Негізгі талдау құралы
Аналогтық	үздіксіз	үздіксіз	u(t)	Фурье қатары / түрлендіруі, Лаплас
Дискретті	nT	үздіксіз	u(nT)	ДҮФТ, Z-түрлендіру
Цифрлық	nT	q-қадамды	Q[u(nT)]	ДФТ / ЖФТ + кванттау қатесін бағалау
Кездейсоқ	кез келген	кездейсоқ	$\{u_i(t)\}$	m, D, R(τ), қуат спектрлік тығыздығы

Периодты сигнал → Фурье қатары

Сызықтық (дискретті) спектр: C_k коэффициенттері $k\omega_1$ жиіліктерінде.

Периодсыз сигнал → Фурье түрлендіруі

Тұтас спектр: S(ω) — спектрлік тығыздық, өлшемі [В·с].

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Тікбұрышты толқынның Фурье қатары

Шарты

Амплитудасы ±1, периоды T меандр. Тақ гармоникалар амплитудасын және алғашқы 1, 3 гармоника жинайтын қуат үлесін табыңыз.

Шешуі

1. Тақ функция: $b_k = 4/(\pi k)$, $k = 1, 3, 5, \ldots$; жұп гармоникалар жоқ.

2. $b_1 = 1.273$; $b_3 = 0.424$; $b_5 = 0.255$.

3. Қуат: $P = 1$; гармоника қуаты $b_k^2/2$.

4. $k = 1$: 0.810 (81 %); $k = 1, 3, 5$: $(1.621 + 0.180 + 0.065)/2 = 0.933$.

Бірінші гармоника қуаттың 81 %-ын, үш тақ гармоника 93.3 %-ын тасиды (зерттеу кестесімен сәйкес).

Парсеваль

Уақыттағы қуат = гармоникалар қуаттарының қосындысы.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Тікбұрышты импульстер тізбегінің спектрі

Шарты

A = 1 В, τ = 1 мс, T = 4 мс. Тұрақты құраушыны, f_1-ді, бірінші гармоника амплитудасын және спектр нөлдерін табыңыз.

Шешуі

1. Скважность $q = T/\tau = 4$; $f_1 = 1/T = 250$ Гц.

2. Тұрақты құраушы: $A \cdot \tau/T = 0.25$ В.

3. $A_k = 2A\tau/T \cdot |\sin(\pi k/q)/(\pi k/q)|$: $A_1 = 0.5 \cdot 0.900 = 0.450$ В.

4. Нөлдер: k = 4, 8, 12, … ⇒ f = 1, 2, 3 кГц (= m/τ).

$U_0 = 0.25$ В, $f_1 = 250$ Гц, $A_1 = 0.45$ В; бас жапырақ $1/\tau = 1$ кГц, оның ішінде 3 гармоника.

Ереже

τ кішірейсе — спектр кеңейеді; T өссе — сызықтар жиілейді.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

Фурье қатары және спектр: Python мен MATLAB

Python

```
t = np.linspace(0, 2, 4000)
x = np.zeros_like(t)
for k in range(1, 22, 2): # тақ гармоникалар
x += 4/(np.pi*k)*np.sin(2*np.pi*k*t)
over = (x.max()-1)/2*100 # асып кету, %
s = sg.square(2*np.pi*t)
X = np.fft.rfft(s)/len(s)*2
f = np.fft.rfftfreq(len(s), t[1]-t[0])
```

MATLAB

```
t = linspace(0, 2, 4000); x = 0;
for k = 1:2:21
x = x + 4/(pi*k)*sin(2*pi*k*t);
end
plot(t, x)
s = square(2*pi*t);
X = fft(s)/numel(s)*2;
stem(abs(X(1:50)))
```

Гармоника саны 21-ге жеткенде асып кету 8.98 % — Гиббс эффектісі ≈ 9 %-да тұрақталады.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Сигналдарды спектрлік талдау қайда қолданылады?

Байланыс

Модуляцияланған сигналдардың жолақ енін бағалау, арналарды жоспарлау.

Аудио

Тембр — гармоникалар құрамы; эквалайзер, кодектер.

Энергетика

Желідегі жоғары гармоникаларды (THD) өлшеу.

Вибродиагностика

Подшипник ақауларын спектрдегі сипатты жиіліктер бойынша анықтау.

Негізгі идея

Кез келген периодты сигнал — гармоникалар жиыны; спектр — сигналдың «төлқұжаты».

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Периодты сигналдардың спектрін зерттеу

1. Меандр, үшбұрышты және араның Фурье коэффициенттерін аналитикалық есептеңіз.
2. N = 5…201 гармоника үшін ішінара қосындыларды салыңыз.
3. Гиббс асып кетуі мен RMS қатені өлшеп, кесте құрыңыз.
4. τ/T = 1/2, 1/4, 1/8 импульс тізбектерінің спектрлерін салыстырыңыз.
5. Нәтижені ЖФТ (numpy.fft / fft) спектрімен тексеріңіз.

Есепте болуы тиіс

- Аналитикалық коэффициенттер
- Ішінара қосынды графиктері
- Гиббс кестесі
- Спектрлер салыстыруы
- Қорытынды

Қолдану салалары

Байланыс арналары, аудио, энергетика, вибродиагностика.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. Меандр спектрінде қай гармоникалар бар?

А) жұп Б) тақ В) барлығы

2. Гиббс асып кетуі N өскенде…

А) нөлге ұмтылады Б) ≈ 9 %-да қалады В) өседі

3. Импульс тізбегінде спектр нөлдері қайда?

А) $k = q \cdot m$ Б) $k = 1$ В) нөл жоқ

4. $T \to \infty$ болғанда спектр…

А) сызықтық Б) тұтас В) жоғалады

5. $\tau = 1$ мс импульстің бас жапырақ ені?

А) 250 Гц Б) 500 Гц В) 1 кГц Г) 4 кГц

Жауаптары: 1 — Б, 2 — Б, 3 — А, 4 — Б, 5 — В

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Сигналдар уақыт пен деңгей бойынша төрт түрге бөлінеді: аналогтық, дискретті, кванттанған, цифрлық.

02 Периодты сигнал — гармоникалар қосындысы; меандрда тек тақ гармоникалар, $b_k = 4/(\pi k)$.

03 Гиббс эффектісі: асып кету ≈ 9 % тұрақты, бірақ RMS қате N өскенде кемиді (N = 201: 0.045).

04 $T \to \infty$ болғанда сызықтық спектр тұтас спектрге — Фурье түрлендіруіне айналады.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Сигнал	сигнал	signal
Гармоника	гармоника	harmonic
Фурье қатары	ряд Фурье	Fourier series
Сызықтық спектр	линейчатый спектр	line spectrum
Скважность	скважность	duty-cycle ratio
Гиббс эффектісі	эффект Гиббса	Gibbs phenomenon
Ішінара қосынды	частичная сумма	partial sum

БЕКІТУ

Бақылау сұрақтары

1. Детерминирленген және кездейсоқ сигналдардың айырмашылығы неде?
2. Үздіксіз, дискретті және цифрлық сигналдарға мысал келтіріңіз.
3. Дискреттеу мен кванттау қалай жүзеге асады?
4. Фурье қатарындағы a_k және b_k қалай анықталады?
5. Периодты емес сигналды қалай периодты жалғастыруға болады?
6. Скважность өскенде спектр қалай өзгереді?
7. Гиббс эффектісінің себебі неде және оны қалай азайтуға болады?