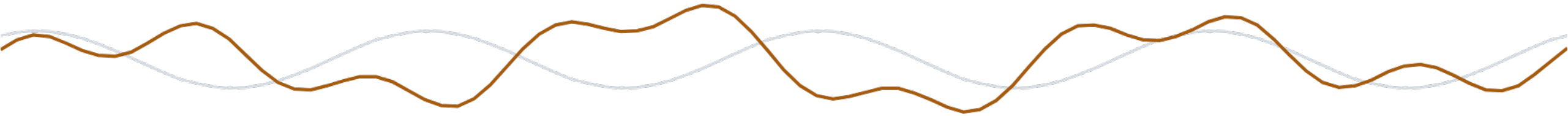
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

2-дәріс

Интегралды Фурье түрлендіруі

Анықтама · спектрлік тығыздық · қасиеттер · жалпыланған Фурье қатары · Чебышев және Уолш функциялары



КІРІСПЕ

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

Периодсыз сигналдарды талдауға арналған интегралды Фурье түрлендіруінің теориясын, қасиеттерін және инженерлік қолданысын меңгеру; ортогоналды базистерде жалпыланған жіктеуді түсіну.

1. Интегралды Фурье түрлендіруінің теориялық негіздері
2. Периодты және периодсыз сигналдардың спектрлік сипаттамасы
3. Түрлендірудің қасиеттері және қолдану мысалдары
4. Жалпыланған Фурье қатары: Чебышев көпмүшелері, Уолш функциялары
5. Зерттеу: әртүрлі базистердегі жуықтау дәлдігі

2.1 · АНЫҚТАМА

Тура және кері Фурье түрлендірулері

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = |S(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt < \infty$$

Спектрлік тығыздық

S(ω) — жиілік бірлігіне келетін комплекс амплитуда; |S(ω)| — амплитудалық, φ(ω) — фазалық спектр.

Бар болу шарты

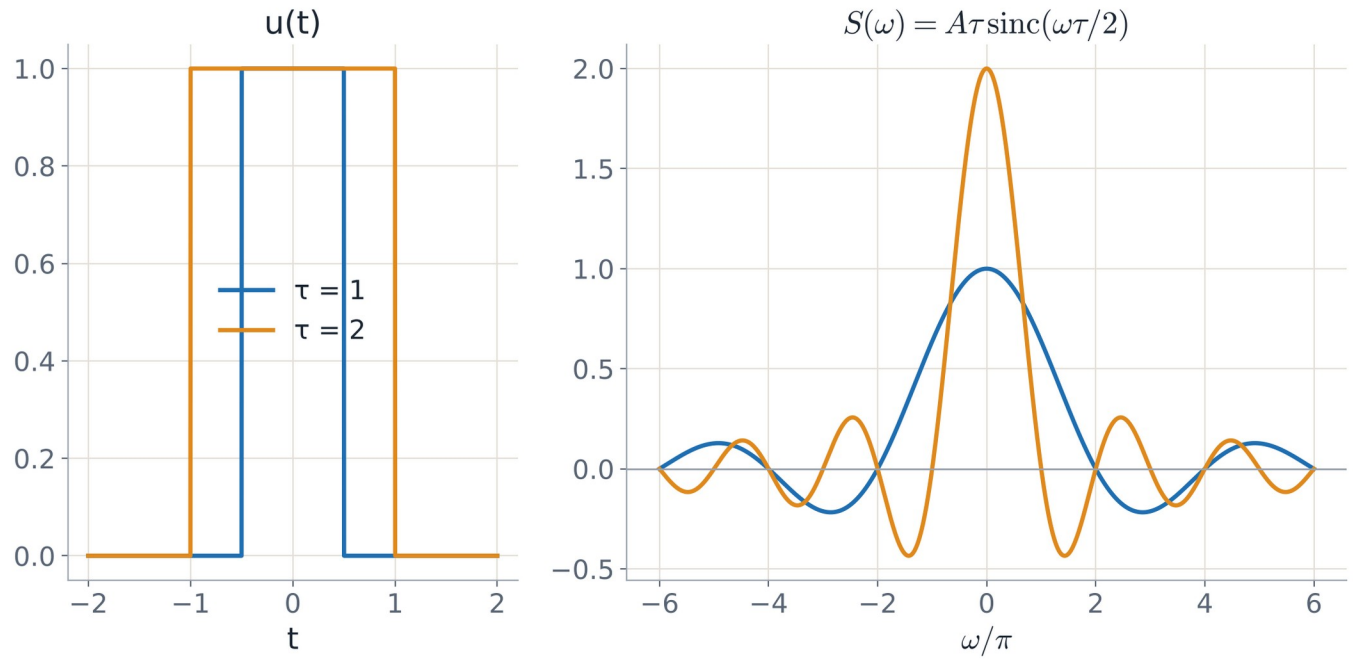
Сигнал абсолют интегралданатын және Дирихле шарттарын қанағаттандыратын болуы жеткілікті.

Нақты сигнал

S(−ω) = S*(ω): АЖС жұп, ФЖС тақ функция.

2.2 · МЫСАЛ

Тікбұрышты импульстің спектрлік тығыздығы



sinc пішіні

S(ω) = Aτ·sin(ωτ/2)/(ωτ/2); S(0) = Aτ — импульс ауданы.

Нөлдер

ω = 2πk/τ, k = ±1, ±2, …; негізгі жапырақ ені 4π/τ.

Масштабтау

τ екі есе ұзарса, спектр екі есе тарылып, биіктігі екі есе артады.

Фурье түрлендіруінің негізгі қасиеттері

Сызықтық	$\alpha u_1 + \beta u_2 \;\leftrightarrow\; \alpha S_1(\omega) + \beta S_2(\omega)$
Уақыт бойынша ығысу	$u(t - t_0) \;\leftrightarrow\; S(\omega) e^{-j\omega t_0}$
Масштабтау	$u(at) \;\leftrightarrow\; \frac{1}{\lvert a\rvert} S(\omega / a)$
Дифференциалдау	$du/dt \;\leftrightarrow\; j\omega S(\omega)$
Интегралдау	$\int_{-\infty}^{t} u\, d\tau \;\leftrightarrow\; S(\omega)/j\omega$
Конволюция	$u_1 * u_2 \;\leftrightarrow\; S_1(\omega) S_2(\omega)$
Модуляция	$u(t)\cos\omega_0 t \;\leftrightarrow\; \frac{1}{2}[S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)]$
Парсеваль	$\int u^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int \lvert S(\omega)\rvert^2 d\omega$

Кідіріс

АЖС өзгермейді, ФЖС-ға сызықтық $-\omega t_0$ қосылады.

Конволюция

Уақыттағы орау жиіліктегі көбейтуге айналады — сүзгі талдауының негізі.

Модуляция

Спектр $\pm\omega_0$-ге жылжиды — АМ негізі.

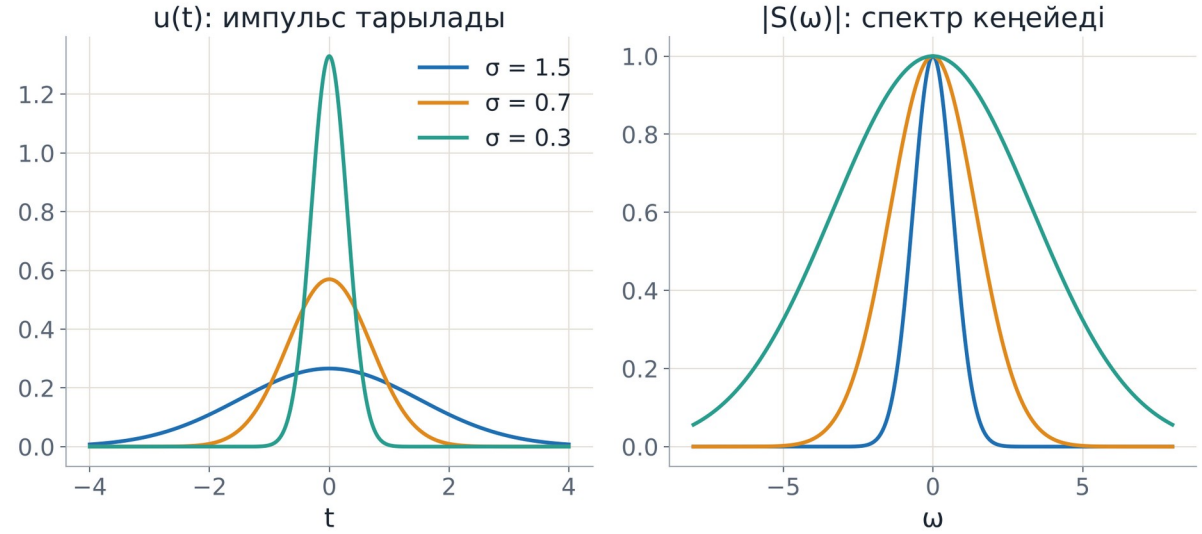
Импульс неғұрлым қысқа болса, спектр соғұрлым кең

$$\delta(t) \;\leftrightarrow\; 1, \qquad 1 \;\leftrightarrow\; 2\pi\delta(\omega)$$

$$\cos\omega_0 t \;\leftrightarrow\; \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$e^{-t^2/2\sigma^2} \;\leftrightarrow\; \sigma\sqrt{2\pi}\, e^{-\sigma^2\omega^2/2}$$

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2}$$



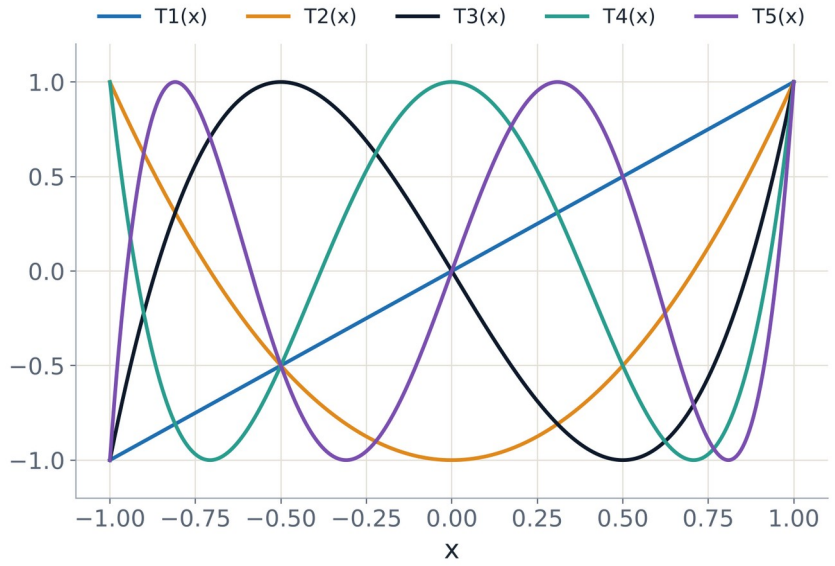
Гаусс импульсі Δt·Δω = 1/2 шекті мәнге жетеді — уақыт пен жиілікте ең ықшам сигнал.

Ортогоналды базис және Чебышев көпмүшелері

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \varphi_k(t), \qquad c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b u(t)\varphi_k(t)\, dt$$

$$\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_m(t)\, dt = \|\varphi_k\|^2\, \delta_{km}$$

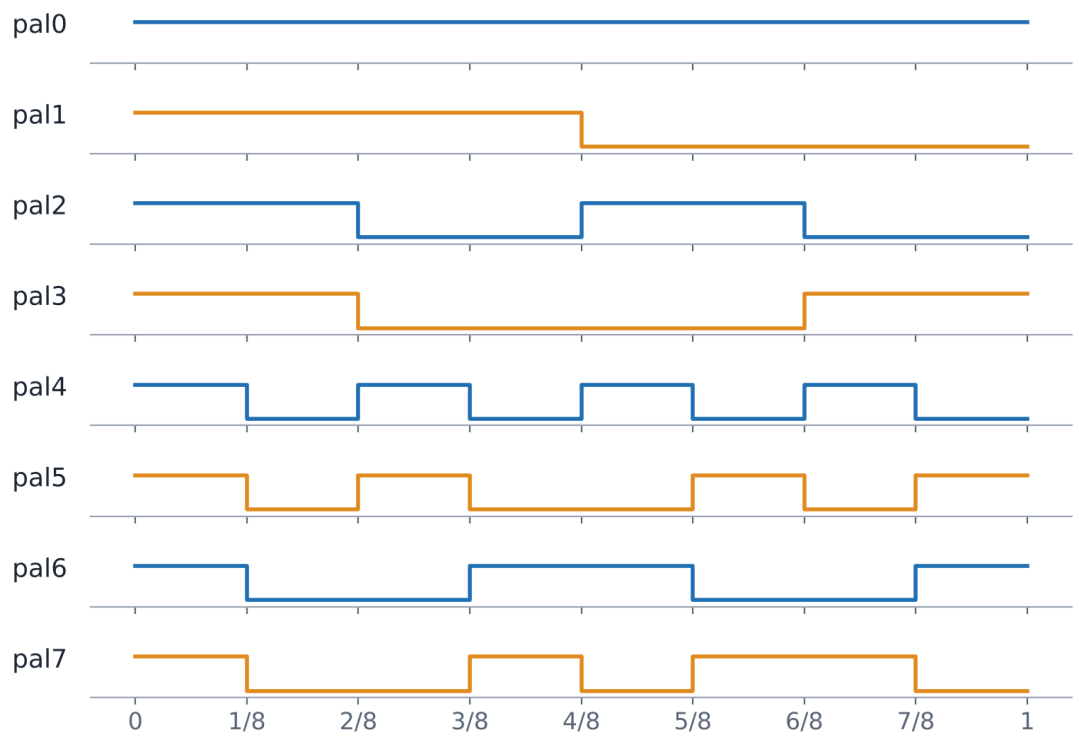
$$T_n(x) = \cos(n \arccos\, x), \quad T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$



Неге Чебышев?

[−1; 1] аралығында $|T_n(x)| \le 1$, ал одан тыс жерде күрт өседі — бірқалыпты жуықтау мен сүзгі синтезінде қолданылады.

Тек ±1 мәндерін қабылдайтын ортогоналды базис



Мультипликативті құрылым

Уолш–Пэли функциялары Радемахер функцияларының көбейтіндісі ретінде құрылады.

Көбейтусіз есептеу

Коэффициенттер тек қосу мен азайту арқылы табылады — аппараттық жүзеге асыру қарапайым.

Қолданылуы

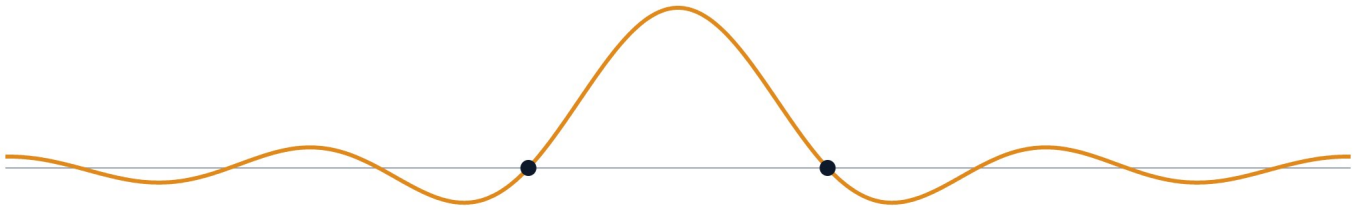
CDMA кодтары, кескінді қысу, тікбұрышты сигналдарды талдау.

АНИМАЦИЯ · МАСШТАБТАУ ҚАСИЕТІ

Импульс ұзақтығы мен спектр ені



S(ω) = Aτ·sinc(ωτ/2); бірінші нөл ω = 2π/τ = 5.59



Не көрінеді

Жоғарыда — импульс, төменде — оның спектрлік тығыздығы; қара нүктелер — негізгі жапырақ шекарасы.

Қорытынды

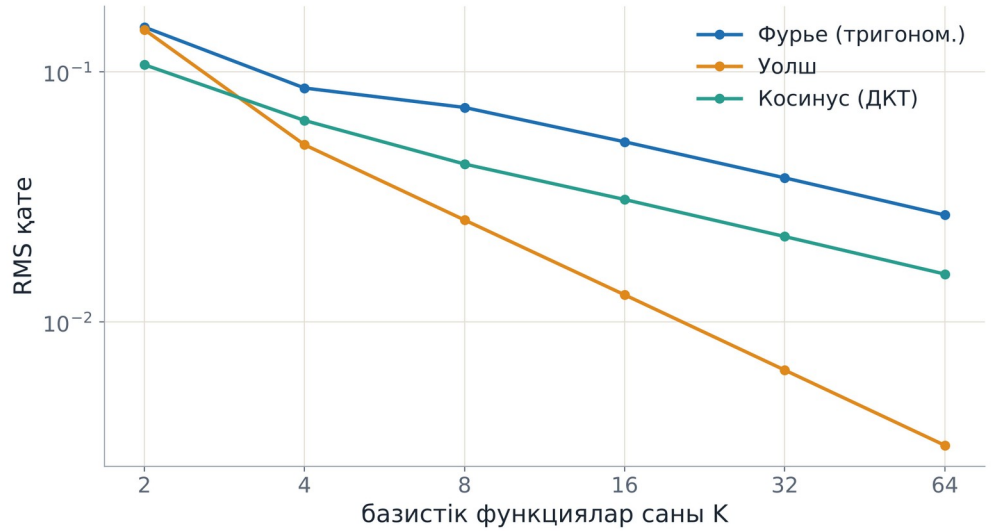
τ·Δω ≈ const: ақпарат беру жылдамдығын арттыру үшін кеңірек жолақ қажет.

ЗЕРТТЕУ · САНДЫҚ ЭКСПЕРИМЕНТ

Қай базис сигналды тезірек жуықтайды?

K	Фурье	Уолш	ДКТ
2	0.1507	0.1472	0.1066
4	0.0860	0.0510	0.0638
8	0.0719	0.0255	0.0427
16	0.0524	0.0128	0.0308
32	0.0376	0.0064	0.0219
64	0.0267	0.0032	0.0155

RMS қате; тест сигналы — секірулері t = 1/2 және 3/4 нүктелерінде болатын бөлікті-сызықтық функция.



Қорытынды: секірулері екілік торда жатқан сигнал үшін Уолш базисі ең тиімді (K = 64-те қате Фурьеден 8 есе аз); тегіс сигналдар үшін ДКТ мен Фурье артық. Базис сигнал құрылымына сай таңдалады.

Негізгі сигналдардың Фурье бейнелері

s(t)	S(ω)
Тікбұрышты импульс, ұзақтығы τ	$A\cdot\tau\cdot\sin(\omega\tau/2)/(\omega\tau/2)$
$e^{-at}\cdot u(t)$, $a > 0$	$1/(a + j\omega)$
$\delta(t)$	1
1 (тұрақты)	$2\pi\cdot\delta(\omega)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
Гаусс $e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{(2\pi)}\cdot e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

Екіжақтылық

Гаусс импульсі — өз спектрімен бірдей пішінді: ұзақтық × жолақ ені ең кіші.

Шектік жағдай

$\tau \to 0$: импульс $\delta(t)$-ға, спектр тұрақтыға (1) айналады.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Тікбұрышты импульстің спектрі

Шарты

$A = 1$ В, $\tau = 1$ мкс тікбұрышты импульс. $S(0)$, бірінші нөл жиілігі және бас жапырақтағы энергия үлесін табыңыз.

Шешуі

1. $S(0) = A\cdot\tau = 10^{-6}$ В·с.
2. Нөлдер: $\omega\tau/2 = m\pi \Rightarrow f = m/\tau$; бірінші нөл 1 МГц.
3. Бас жапырақ $|f| \le 1/\tau$ энергияның 90.3 %-ын жинайды (зерттеу).
4. Практикалық жолақ ені $\Delta f \approx 1/\tau = 1$ МГц.

$S(0) = 1$ мкВ·с; бірінші нөл 1 МГц; энергияның 90.3 %-ы бас жапырақта.

Анықталмағандық

$\tau\cdot\Delta f \approx 1$: импульсті 2 есе қысқартсаңыз, жолақ 2 есе кеңейеді.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Экспоненциалды импульс және Парсеваль теоремасы

Шарты

$s(t) = e^{-at}\cdot u(t)$, $a = 1000\ c^{-1}$. $|S(f)|$, −3 дБ жиілік және толық энергияны табыңыз.

Шешуі

1. $S(\omega) = 1/(a + j\omega)$; $|S(0)| = 1/a = 10^{-3}$.
2. $|S| = |S(0)|/\sqrt{2}$ болғанда $\omega = a \Rightarrow f = a/2\pi = 159$ Гц.
3. Уақытта: $E = \int e^{-2at}dt = 1/(2a) = 0.5\cdot 10^{-3}$.
4. Жиілікте: $(1/2\pi)\int d\omega/(a^2 + \omega^2) = 1/(2a)$ — Парсеваль орындалды.

$f_{-3дБ} = 159$ Гц; $E = 5\cdot 10^{-4}$ (екі тәсілмен бірдей).

Түйін

Энергия уақытта да, жиілікте де бірдей есептеледі.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

Фурье түрлендіруі және ортогоналды базистер

Python

```
fs = 1e8; t = np.arange(-5e-6, 5e-6, 1/fs)
s = (np.abs(t) <= 0.5e-6).astype(float)
S = np.fft.fftshift(np.fft.fft(s))/fs
f = np.fft.fftshift(np.fft.fftfreq(len(s), 1/fs))
from scipy.linalg import hadamard
H = hadamard(64)/8 # Уолш базисі
c = H @ x # коэффициенттер
from scipy.fft import dct
cd = dct(x, norm='ortho')
```

MATLAB

```
fs = 1e8; t = -5e-6:1/fs:5e-6;
s = double(abs(t) <= 0.5e-6);
S = fftshift(fft(s))/fs;
f = (-numel(s)/2:numel(s)/2-1)*fs/numel(s);
plot(f, abs(S))
H = hadamard(64)/8;
c = H*x(:);
cd = dct(x);
```

Ортогоналды базисте коэффициент — скаляр көбейтінді; ең үлкен K коэффициентті қалдырып, RMS қатені салыстырамыз.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Фурье түрлендіруі мен ортогоналды базистердің қолданылуы

Радиолокация

Импульс ұзақтығы мен ажыратымдылық: $\tau \cdot \Delta f \approx 1$.

Байланыс

Сигнал жолақ енін бағалау, OFDM — ортогоналды жиіліктер.

Кескін қысу

ДКТ (JPEG), Уолш–Адамар — жылдам бүтінсанды түрлендірулер.

CDMA

Уолш кодтары — арналарды ортогоналды бөлу.

Негізгі идея

Сигналды ыңғайлы базиске жіктеу — талдау мен қысудың негізі.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Фурье түрлендіруі және базистерді салыстыру

1. Тікбұрышты, үшбұрышты және Гаусс импульстерінің спектрлерін есептеңіз.
2. τ-ны өзгертіп, τ·Δf көбейтіндісінің тұрақтылығын тексеріңіз.
3. Парсеваль теоремасын сандық түрде растаңыз.
4. Тест сигналын Фурье, Уолш, ДКТ базистерінде K = 2…64 коэффициентпен жуықтаңыз.
5. RMS қате кестесін құрып, ең тиімді базисті негіздеңіз.

Есепте болуы тиіс

- Спектр графиктері
- τ·Δf кестесі
- Парсеваль тексеруі
- RMS қате кестесі
- Қорытынды

Қолдану салалары

Радиолокация, OFDM, CDMA, кескін қысу.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. δ(t)-ның спектрі?

А) δ(ω) Б) 1 В) sinc

2. Импульс 2 есе қысқарса, спектр ені…

А) 2 есе тарылады Б) өзгермейді В) 2 есе кеңейеді

3. Уақыт бойынша кідіріс спектрге не істейді?

А) модульді өзгертеді Б) фазалық көбейткіш e^{−jωt₀} В) жиілікті ығыстырады

4. Тек ±1 мәнді ортогоналды базис?

А) Чебышев Б) Уолш В) Лежандр

5. Тікбұрышты импульс энергиясының бас жапырақтағы үлесі?

А) 50 % Б) 77 % В) 90 % Г) 99 %

Жауаптары: 1 — Б, 2 — В, 3 — Б, 4 — Б, 5 — В

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Фурье түрлендіруі апериодты сигналды тұтас спектрге жіктейді; тура және кері түрлендіру бір мәнді.

02 Ұзақтық пен жолақ ені кері пропорционал: τ·Δf ≈ 1; бас жапырақта энергияның 90.3 %-ы.

03 Сызықтық, кідіріс, масштаб, конволюция қасиеттері талдауды алгебралық операцияларға келтіреді.

04 Секірісті сигналда K = 64 коэффициентпен RMS қате: Уолш 0.003, ДКТ 0.016, Фурье 0.027 — базис сигналға сай таңдалады.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Фурье түрлендіруі	преобразование Фурье	Fourier transform
Спектрлік тығыздық	спектральная плотность	spectral density
Парсеваль теоремасы	теорема Парсеваля	Parseval’s theorem
Ортогоналды базис	ортогональный базис	orthogonal basis
Уолш функциялары	функции Уолша	Walsh functions
Бас жапырақ	главный лепесток	main lobe
Жолақ ені	ширина полосы	bandwidth

БЕКІТУ

Бақылау сұрақтары

1. Интегралды Фурье түрлендіруінің анықтамасын жазыңыз.
2. Тікбұрышты импульстің спектрлік тығыздығы қандай функциямен сипатталады?
3. Дельта-функцияның негізгі қасиеттерін атаңыз.
4. Масштабтау қасиетінің физикалық мәнін түсіндіріңіз.
5. Сигналды кешіктіру оның спектріне қалай әсер етеді?
6. Жалпыланған Фурье қатары дегеніміз не?
7. Чебышев көпмүшелері мен Уолш функциялары қайда қолданылады?