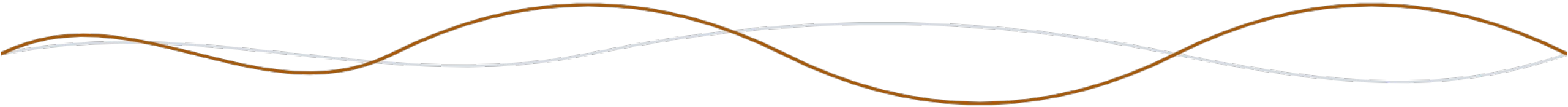
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

3-дәріс

Үздіксіз жүйелер және Лаплас түрлендіруі

Импульстік және жиіліктік сипаттамалар · Дюамель интегралы · беріліс функциясы · полюстер мен нөлдер



КІРІСПЕ

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

Сызықтық стационар үздіксіз жүйелерді уақыт, жиілік және s-аймағында сипаттауды меңгеру; беріліс функциясы мен полюстер арқылы тұрақтылықты бағалауды үйрену.

1. Үздіксіз жүйелердің негізгі ұғымдары: кіріс, шығыс, ішкі айнымалылар
2. Импульстік сипаттама, Дюамель интегралы, конволюция
3. Жиілік сипаттамасы H(jω): АЖС және ФЖС
4. Лаплас түрлендіруі және беріліс функциясы H(s)
5. Зерттеу: екінші ретті жүйенің өтпелі процесі

Сызықтық стационар жүйе

h(t) ↔ H(s)

x(t) → жүйе → y(t)

$$L\{\alpha x_1 + \beta x_2\} = \alpha L\{x_1\} + \beta L\{x_2\}$$

$$x(t - t_0) \;\rightarrow\; y(t - t_0)$$

$$h(t) = L\{\delta(t)\}, \qquad g(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau$$

Сызықтық

Суперпозиция орындалады: реакциялар қосылады.

Стационарлық

Параметрлер уақыт бойынша өзгермейді.

Себептілік

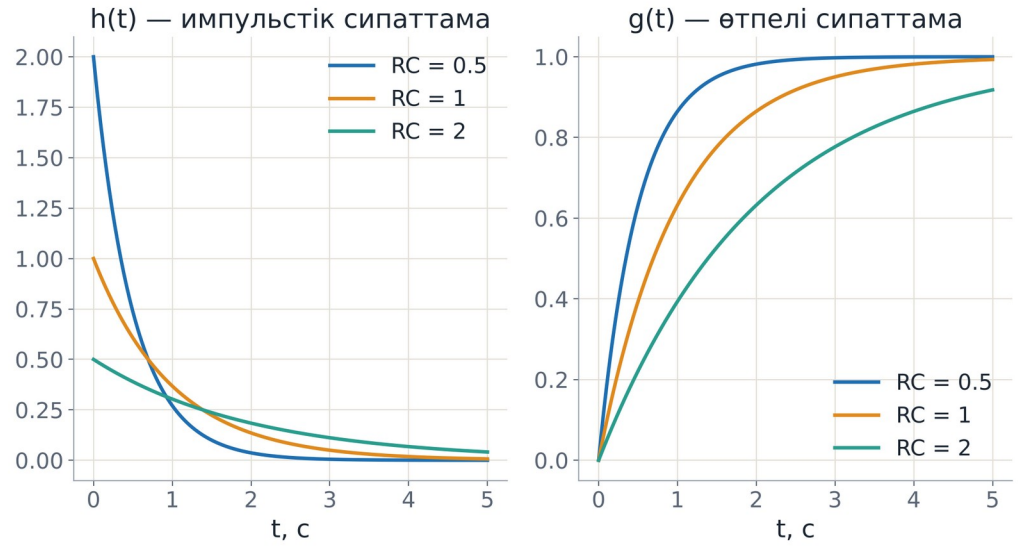
Реакция әсерден бұрын пайда болмайды: h(t) = 0, t < 0.

Конволюция және Дюамель интегралы

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$

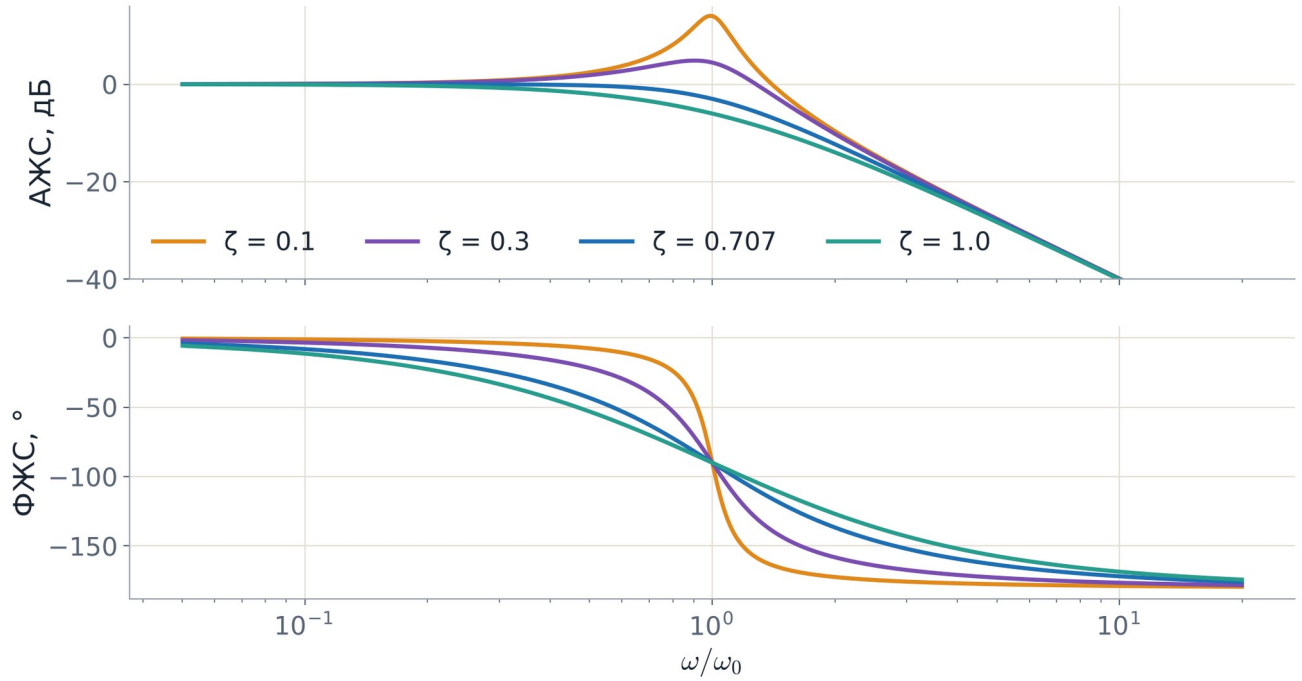
$$y(t) = x(0)g(t) + \int_{0}^{t} x'(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$h(t) = 0 \quad (t<0), \qquad \int_{0}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$



Кез келген кіріс — ығысқан δ-импульстердің қосындысы, сондықтан h(t) белгілі болса, жүйенің кез келген сигналға реакциясы табылады.

АЖС пен ФЖС: екінші ретті звено



$$H(j\omega) = \int_0^\infty h(t) e^{-j\omega t} dt = |H(j\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$$

$$x = e^{j\omega t} \;\Rightarrow\; y = H(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Резонанс

ζ < 0.707 болса, АЖС-та өркеш пайда болады; ζ = 0.707 — ең тегіс (Баттеруорт) сипаттама.

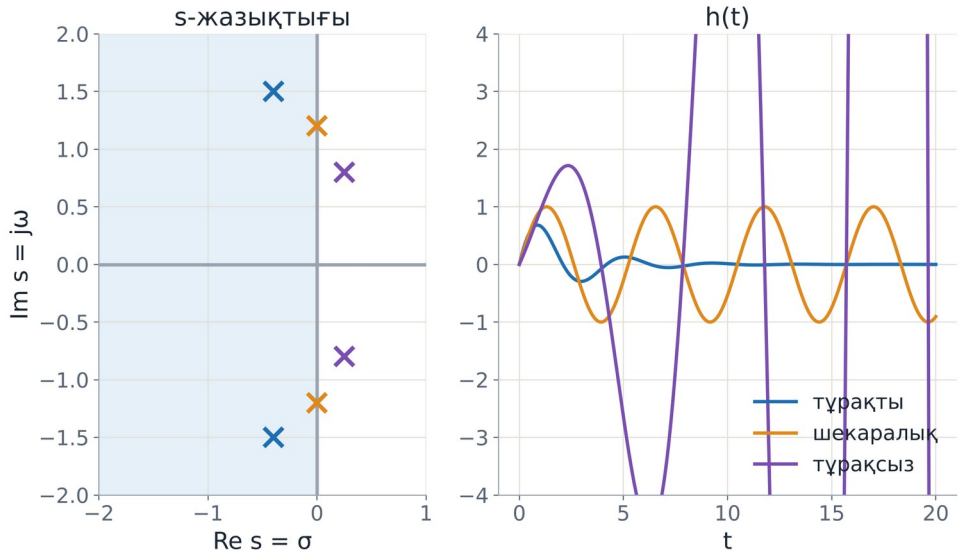
Беріліс функциясы, полюстер және тұрақтылық

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt, \qquad s = \sigma + j\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{k=1}^{n} (s - p_k)}, \quad m \le n$$

$$\delta(t) \to 1, \quad 1(t) \to \frac{1}{s}, \quad e^{-at} \to \frac{1}{s + a}, \quad \sin \omega_0 t \to \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$



Тұрақтылық шарты

Барлық полюстер сол жақ жарты жазықтықта: Re $p_k < 0$.

АНИМАЦИЯ · КОНВОЛЮЦИЯ

«Аудару – жылжыту – көбейту – интегралдау»

[Interactive web embed — view it in the original presentation]

Мысал

Кіріс — бірлік тікбұрышты импульс, жүйе — RC тізбегі, h(t) = e^(−t/RC), RC = 0.6.

Байқаңыз

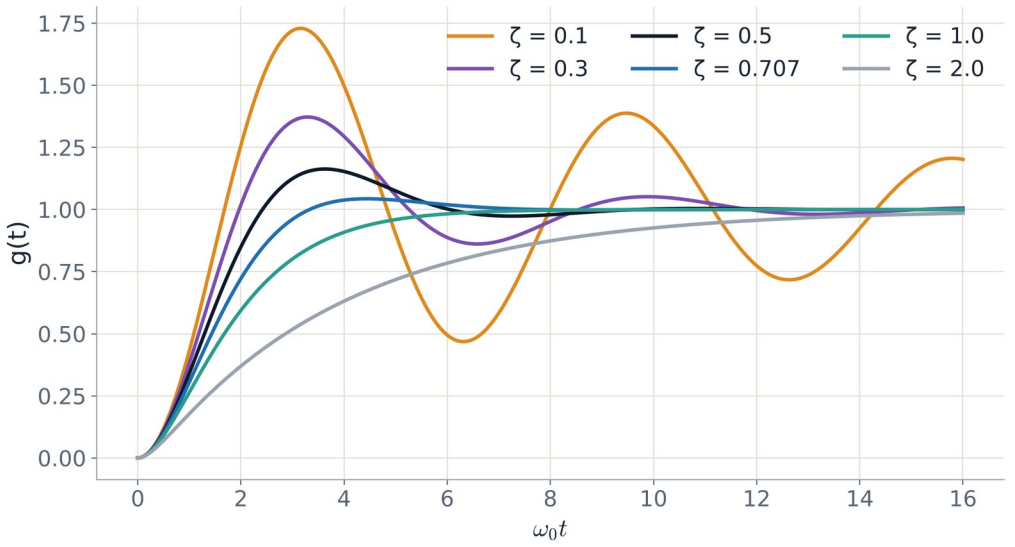
Шығыс сигнал экспонента бойынша өседі және импульс біткен соң экспонента бойынша сөнеді.

ЗЕРТТЕУ · САНДЫҚ ЭКСПЕРИМЕНТ

Өшу коэффициенті ζ өтпелі процесті қалай өзгертеді?

ζ	Асып кету, %	t_r (10–90 %)	t_s (2 %)
0.1	72.9	1.10	> 16
0.3	37.2	1.32	11.23
0.5	16.3	1.64	8.07
0.707	4.3	2.15	5.96
1.0	0	3.36	5.83
2.0	0	8.23	14.88

Уақыт $\omega_0 t$ бірлігінде; $H(s) = \omega_0^2/(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$.



Қорытынды: ζ ≈ 0.7–1.0 аралығы тиімді ымыра береді: асып кету 4.3 %-дан аспайды, ал орнығу уақыты ең аз (≈ 5.8–6.0). Модельдеу нәтижесі e^(−πζ/√(1−ζ²)) теориялық формуласымен сәйкес келеді.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

Жүйені сипаттаудың үш тәсілі

Аймақ	Сипаттама	Шығысты табу	Не үшін ыңғайлы
Уақыт	h(t), g(t)	y = x * h	Өтпелі процесс, импульстік әсерлер
Жиілік	H(jω)	Y(jω) = X·H	Сүзгілеу, спектрлік талдау, АЖС/ФЖС
s-аймақ	H(s), полюстер	Y(s) = X(s)·H(s)	Тұрақтылық, бастапқы шарттар, синтез

Байланыс

H(s) = L{h(t)}; H(jω) = H(s)|s=jω; g(t) = ∫h dt — үш сипаттама бір-бірінен бірмәнді алынады.

Лаплас артықшылығы

Дифференциалдық теңдеу алгебралық теңдеуге айналады; өсетін сигналдарға да қолданылады.

Лаплас түрлендіруінің жұптары мен қасиеттері

f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
$t\cdot u(t)$	$1/s^2$
$e^{-at}\cdot u(t)$	$1/(s+a)$
$\sin \omega_0 t\cdot u(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$
$e^{-at}\cos \omega_0 t\cdot u(t)$	$(s+a)/((s+a)^2+\omega_0^2)$

Қасиет	Бейне
Дифференциалдау	$s\cdot F(s) - f(0)$
Интегралдау	$F(s)/s$
Кідіріс t_0	$e^{-st_0}\cdot F(s)$
Конволюция	$F_1(s)\cdot F_2(s)$
Соңғы мән	$\lim s\cdot F(s),\ s \to 0$

Тұрақтылықты полюстерсіз тексеру: Гурвиц критерийі

Гурвиц критерийі (3-рет)

$D(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$

Тұрақты ⇔ барлық $a_i > 0$ және $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

Мысал: $s^3 + 2s^2 + 3s + 4$: $2 \cdot 3 = 6 > 4$ — тұрақты.

Полюстер бойынша

Барлық полюстер сол жақ жарты жазықтықта ($\mathrm{Re}\, p < 0$) — тұрақты.

Жорамал оста — тұрақтылық шекарасы (сөнбейтін тербеліс).

Оң жақта — тұрақсыз: $h(t)$ шексіз өседі.

BIBO-тұрақтылық: жүйе тұрақты ⇔ $\int |h(t)|\,dt < \infty$ ⇔ полюстер $\mathrm{Re}\, s < 0$; Гурвиц критерийі түбірлерді есептемей-ақ тексеруге мүмкіндік береді.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

RC-сүзгінің сипаттамалары

Шарты

R = 1 кОм, C = 1 мкФ RC-тізбек (ТЖС). H(s), уақыт тұрақтысы, кесу жиілігі, h(t), өтпелі сипаттама және өсу уақытын табыңыз.

Шешуі

1. $H(s) = 1/(1 + s\tau)$, $\tau = RC = 1$ мс.

2. $f_c = 1/(2\pi\tau) = 159$ Гц; $|H(f_c)| = -3$ дБ.

3. $h(t) = (1/\tau)\cdot e^{-t/\tau}$; $g(t) = 1 - e^{-t/\tau}$.

4. Өсу уақыты (10–90 %): $t_r = \tau \cdot \ln 9 = 2.2$ мс.

$\tau = 1$ мс, $f_c = 159$ Гц, $t_r = 2.2$ мс; $f_c \cdot t_r \approx 0.35$ — жолақ пен жылдамдық байланысы.

Полюс

$s = -1/\tau = -1000$ — сол жарты жазықтықта, жүйе тұрақты.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Екінші ретті звеноның өтпелі процесі

Шарты

$H(s) = \omega_0^2/(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$, $\omega_0 = 1000$ рад/с, $\zeta = 0.5$. Полюстерді, асып кетуді және тербеліс жиілігін табыңыз.

Шешуі

1. $p = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{(1 - \zeta^2)} = -500 \pm j866$.
2. Асып кету: $e^{-\pi\zeta/\sqrt{(1-\zeta^2)}} = e^{-1.814} = 0.163 \Rightarrow 16.3\ \%$.
3. Өшетін тербеліс жиілігі $\omega_d = 866$ рад/с (138 Гц).
4. Реттелу уақыты (2 %): $t_s \approx 4/(\zeta\omega_0) = 8$ мс.

$p = -500 \pm j866$; асып кету 16.3 % (зерттеу кестесімен сәйкес); $\omega_d = 866$ рад/с.

$\zeta = 0.707$

Асып кету 4.3 %, АЖС максималды тегіс — Баттеруорт звеносы.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

Үздіксіз жүйелерді талдау: Python мен MATLAB

Python

```
import scipy.signal as sg
w0, z = 1000, 0.5
sys = sg.TransferFunction([w0**2], [1, 2*z*w0, w0**2])
t, y = sg.step(sys)
w, mag, ph = sg.bode(sys)
print(sys.poles) # −500 ± 866j
os = (y.max()-1)*100 # 16.3 %
```

MATLAB

```
w0 = 1000; z = 0.5;
H = tf(w0^2, [1 2*z*w0 w0^2]);
step(H); grid on
bode(H); pzmap(H)
S = stepinfo(H) % Overshoot = 16.3
pole(H)
impulse(H)
```

stepinfo асып кету, өсу және реттелу уақыттарын бірден береді.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Үздіксіз жүйелер теориясының қолданылуы

Аналогтық сүзгілер

RC, RLC, активті сүзгілер — АЦТ алдындағы антиалиасинг.

Автоматты реттеу

Электр жетектері, PID реттегіштер, тұрақтылық қоры.

Байланыс

Тербелмелі контурлар, ФАЖ (PLL) динамикасы.

Механика

Серіппе–масса–демпфер — дәл сол 2-ретті звено.

Негізгі идея

Лаплас түрлендіруі дифференциалдық теңдеуді алгебралық теңдеуге айналдырады.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Үздіксіз жүйелердің сипаттамаларын зерттеу

1. RC және RLC тізбектердің H(s)-ін құрып, полюстерін табыңыз.
2. ζ = 0.1…2 үшін өтпелі сипаттамаларды салып, асып кетуді өлшеңіз.
3. АЖС мен ФЖС (Боде диаграммасы) салыңыз.
4. Конволюцияны сандық есептеп, step/lsim нәтижесімен салыстырыңыз.
5. Гурвиц критерийімен тұрақтылықты тексеріңіз.

Есепте болуы тиіс

- H(s) және полюстер
- Өтпелі сипаттамалар
- Боде диаграммалары
- ζ кестесі
- Қорытынды

Қолдану салалары

Аналогтық сүзгілер, реттеу жүйелері, PLL, механика.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. Конволюцияның Лаплас бейнесі?

А) қосынды Б) көбейтінді В) бөлінді

2. Тұрақты жүйенің полюстері...

А) Re s > 0 Б) Re s < 0 В) жорамал оста

3. RC = 1 мс ТЖС-тің кесу жиілігі?

А) 1 кГц Б) 159 Гц В) 6.28 кГц

4. ζ = 0.5 кезіндегі асып кету?

А) 4.3 % Б) 16.3 % В) 37 %

5. $s^3 + 2s^2 + 3s + 4$ тұрақты ма?

А) иә Б) жоқ В) шекарада Г) анықтау мүмкін емес

Жауаптары: 1 — Б, 2 — Б, 3 — Б, 4 — Б, 5 — А

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Сызықтық стационар жүйе h(t), H(s) немесе дифференциалдық теңдеумен толық сипатталады.

02 Шығыс = кіріс ∗ h(t) (Дюамель интегралы) ⇔ Y(s) = X(s)·H(s).

03 Тұрақтылық — полюстердің сол жарты жазықтықта болуы; Гурвиц критерийі түбірсіз тексереді.

04 2-ретті звенода ζ = 0.1 → асып кету 72.9 %, ζ = 0.707 → 4.3 %, ζ ≥ 1 → асып кетусіз.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Лаплас түрлендіруі	преобразование Лапласа	Laplace transform
Беріліс функциясы	передаточная функция	transfer function
Өтпелі сипаттама	переходная характеристика	step response
Импульстік сипаттама	импульсная характеристика	impulse response
Өшу коэффициенті	коэффициент затухания	damping ratio
Асып кету	перерегулирование	overshoot
Тұрақтылық	устойчивость	stability

БЕКІТУ

Бақылау сұрақтары

1. Сызықтық жүйе үшін суперпозиция принципі қалай жазылады?
2. Импульстік сипаттама қандай сигналға реакцияны білдіреді?
3. Дюамель интегралының физикалық мәнін түсіндіріңіз.
4. АЖС мен ФЖС қандай мағына береді?
5. Неге гармоникалық сигналдар сызықтық жүйелер үшін меншікті болып саналады?
6. Лаплас түрлендіруінің тура және кері формулаларын жазыңыз.
7. Полюстердің орналасуы тұрақтылыққа қалай әсер етеді?