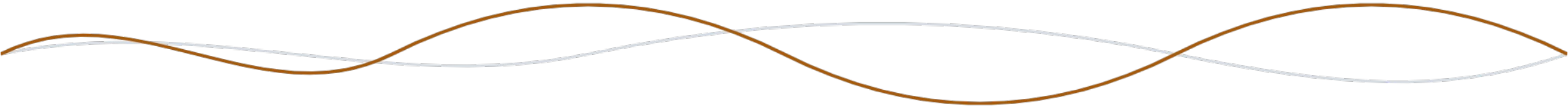
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

4-дәріс

Аналогтық сүзгілер және кездейсоқ сигналдар

Баттеруорт, Чебышев, эллиптикалық, Бессель · корреляция · қуат спектрлік тығыздығы · Винер–Хинчин теоремасы



КІРІСПЕ

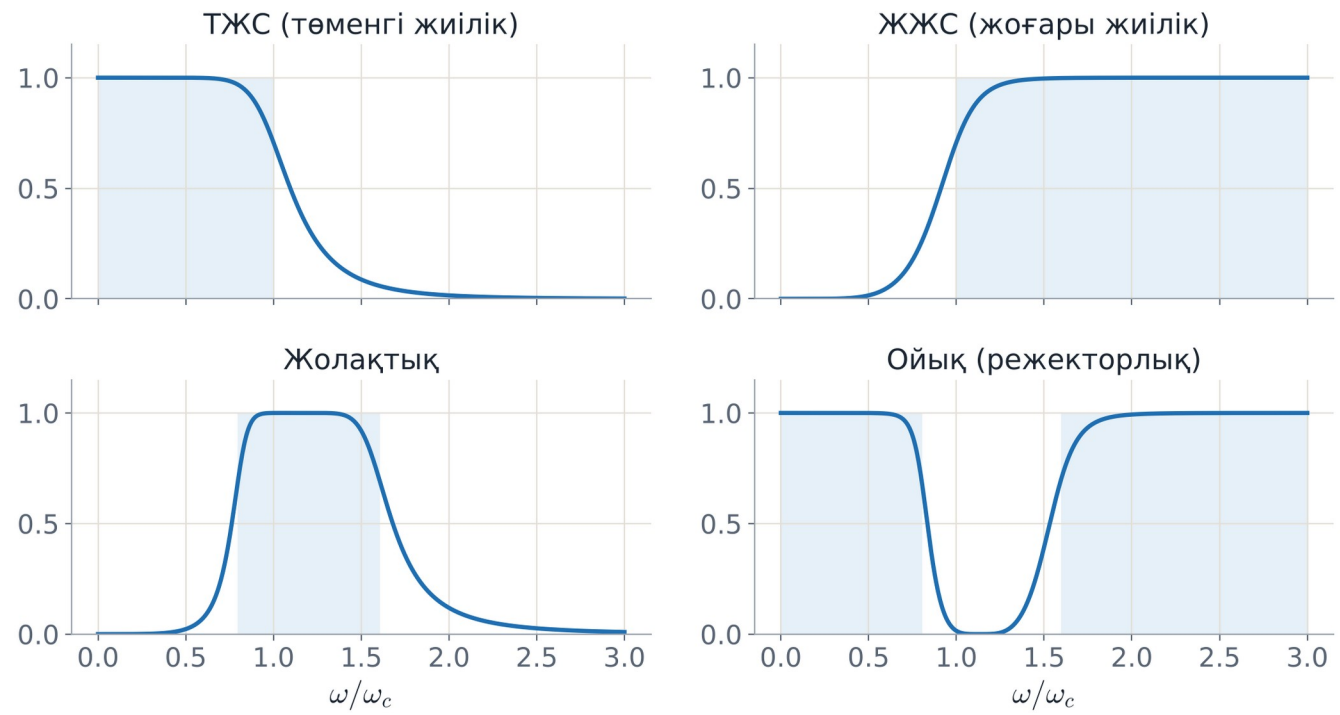
Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

Аналогтық сүзгілердің түрлері мен аппроксимацияларын салыстыру; кездейсоқ процестердің статистикалық сипаттамаларын және Винер–Хинчин түрлендірулерін меңгеру.

1. Сүзгі түрлері: ТЖС, ЖЖС, жолақтық, ойық
2. Баттеруорт, Чебышев, эллиптикалық, Бессель аппроксимациялары
3. Кездейсоқ шамалар мен процестердің сипаттамалары
4. Корреляция және қуат спектрлік тығыздығы
5. Винер–Хинчин түрлендірулері және зерттеу

Идеал және нақты сүзгілердің АЖС



Өткізу жолағы

Әлсіреу A_p-дан аспайтын жиіліктер (әдетте −3 дБ немесе берілген толқын).

Тежеу жолағы

Әлсіреу кемінде A_s болатын жиіліктер.

Өтпелі жолақ

Идеал сүзгі жүзеге аспайды: ω_p мен ω_s арасы әрқашан нөлден үлкен.

АЖС квадратының аналитикалық жуықтаулары

Баттеруорт: $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}$

Чебышев I: $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_p)}$

Эллиптикалық: $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2(\omega/\omega_p)}$

$$N \geq \frac{\lg\left[(10^{0.1A_s} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)\right]}{2\lg(\omega_s/\omega_p)}$$

Баттеруорт

Өткізу жолағында максимал тегіс, бірақ өтпелі жолақ кең.

Чебышев I / II

Толқын өткізу (I) немесе тежеу (II) жолағында — құламасы тігірек.

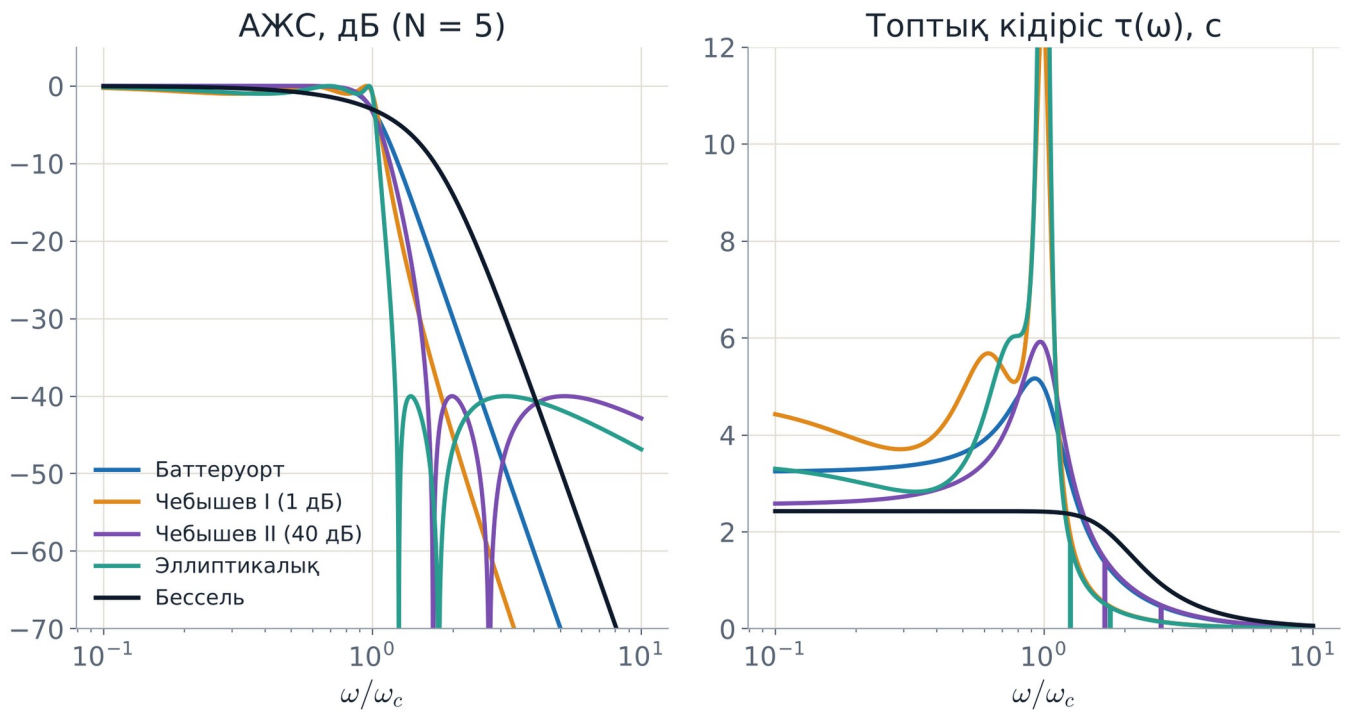
Эллиптикалық

Екі жолақта да толқын; берілген рет үшін ең тік құлама.

Бессель

Топтық кідірісі ең тегіс — импульс пішінін сақтайды.

Бір талапқа әртүрлі сүзгінің реті



f_p = 1 кГц, f_s = 1.5 кГц, A_p = 1 дБ, A_s = 40 дБ

Сүзгі	N
Баттеруорт	14
Чебышев I	7
Чебышев II	7
Эллиптикалық	5

Ымыра

Эллиптикалық сүзгі Баттеруорттан 2.8 есе қысқа, бірақ топтық кідірісі ең біркелкі емес.

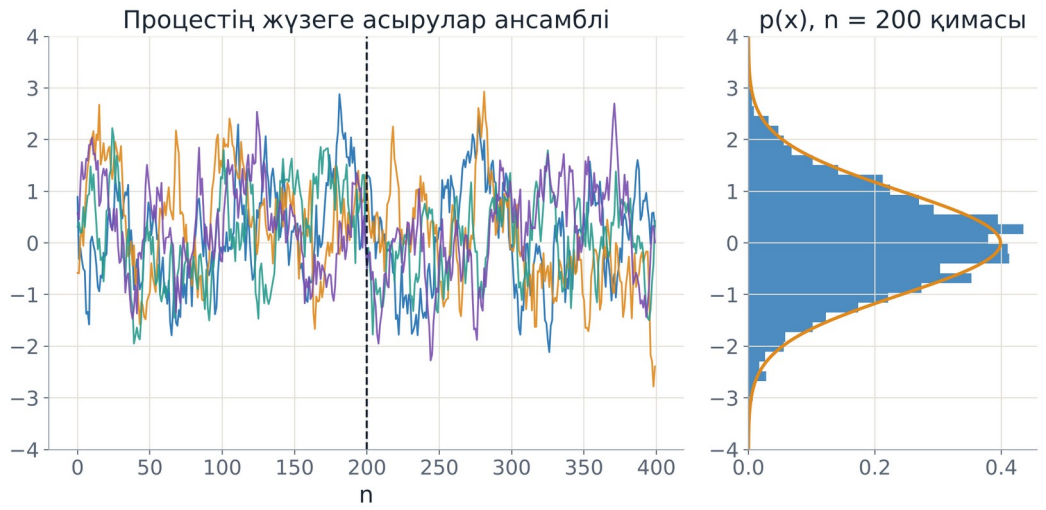
Ансамбль, моменттер және корреляция

$$m_x = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx$$

$$D_x = M[(x - m_x)^2] = \sigma_x^2$$

$$R_x(\tau) = M[\,\dot{x}(t)\,\dot{x}(t+\tau)\,], \qquad \rho_x(\tau) = R_x(\tau)/\sigma_x^2$$

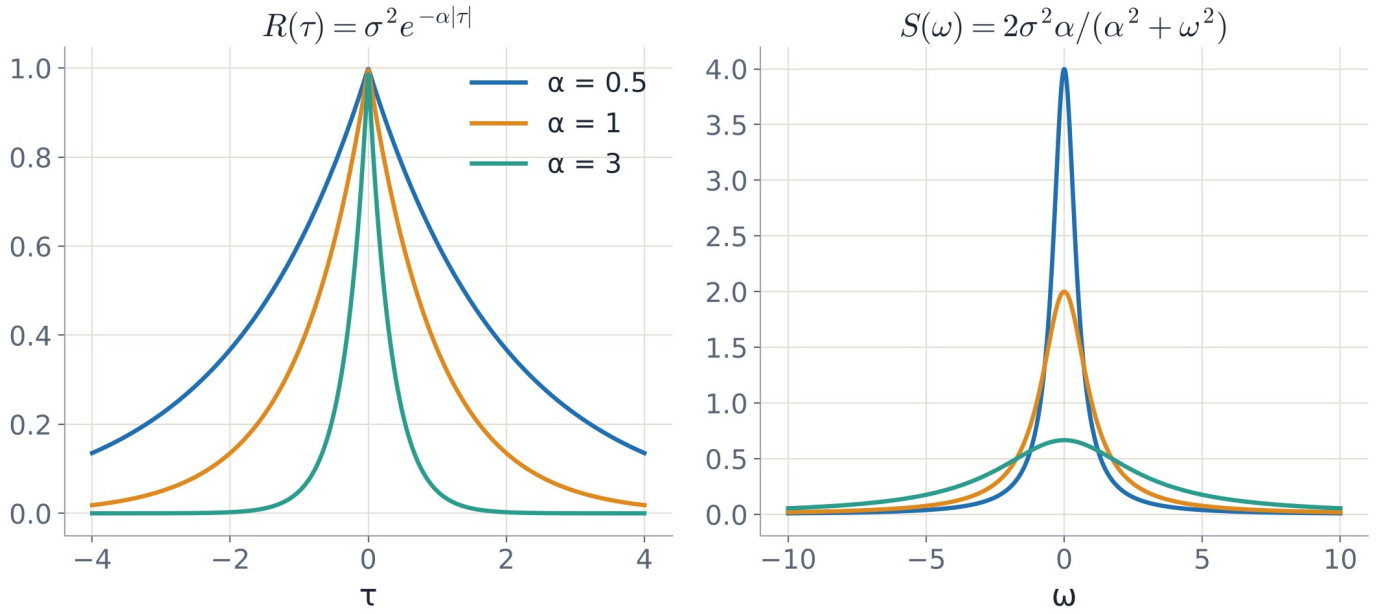
$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$



Эргодикалық процесс

Ансамбль бойынша орташа бір ұзын жүзеге асу бойынша уақыттық орташаға тең.

Корреляция мен қуат спектрі — Фурье жұбы



Корреляция уақыты

$\tau_k \approx 1/\alpha$: α өссе, R(τ) тез сөнеді.

Спектр ені

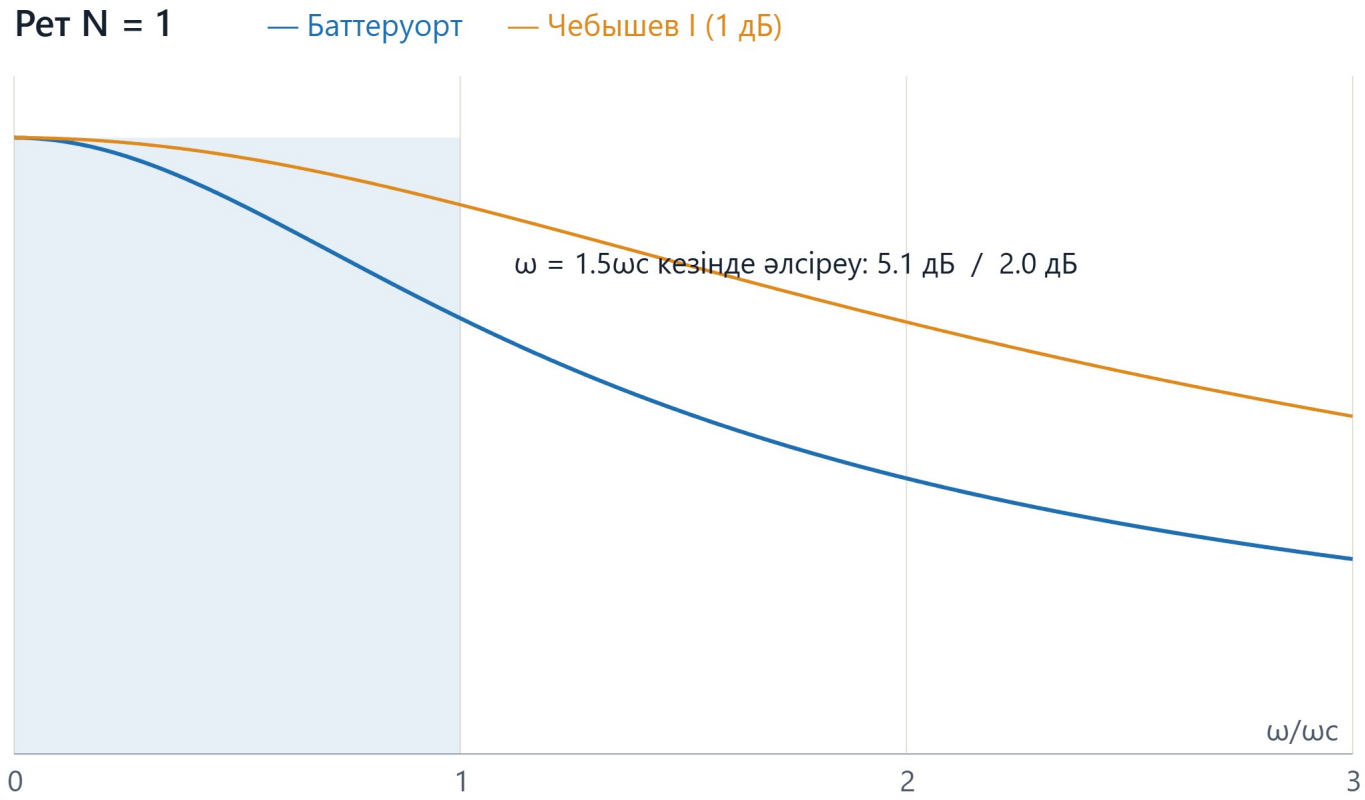
$\Delta\omega \approx \alpha$: жылдам өзгеретін процесс — кең жолақты.

Дисперсия

$\sigma^2 = R(0) = (1/2\pi)\int S(\omega)d\omega$ — спектр астындағы аудан.

АНИМАЦИЯ · СҮЗГІ РЕТІ

Рет өскенде АЖС идеалға жақындайды



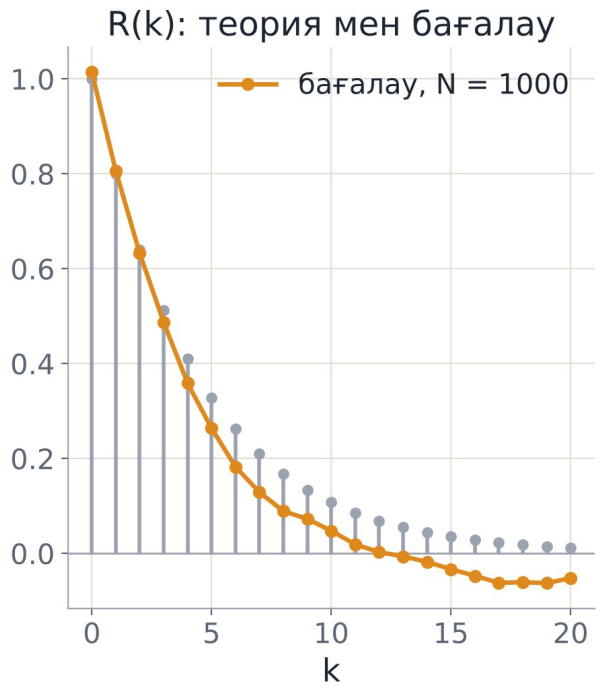
Не көрінеді

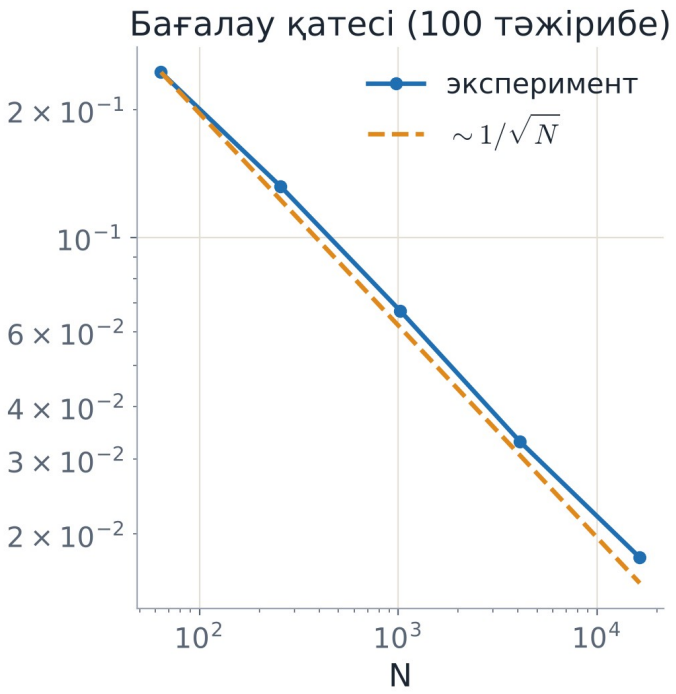
N = 1…10 циклмен өзгереді; көк аймақ — идеал ТЖС-тің өткізу жолағы.

Байқаңыз

Бірдей N кезінде Чебышев сүзгісі 1.5ωс жиілігінде әлдеқайда көп әлсіретеді, бірақ өткізу жолағында N толқын береді.

Корреляцияны бағалау дәлдігі жазба ұзындығына тәуелді





N	RMS қате
64	0.2451
256	0.1319
1 024	0.0671
4 096	0.0330
16 384	0.0176

AR(1), a = 0.8; 0…20 лагтар; 100 тәжірибе бойынша орташа.

Қорытынды

N 4 есе артса, қате ≈ 2 есе кемиді: бағалау ауқатты, қате ~ 1/√N.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

Аналогтық сүзгі түрлерін салыстыру

Сүзгі	Өткізу жолағы	Басу жолағы	N (1/1.5 кГц, 1/40 дБ)	Фаза / кідіріс
Баттеруорт	максималды тегіс	монотонды	14	орташа
Чебышев I	толқынды	монотонды	7	нашар
Чебышев II	монотонды	толқынды	7	орташа
Эллиптикалық	толқынды	толқынды	5	ең нашар
Бессель	тегіс, баяу құлайды	монотонды	≫ 14	сызықтық фаза

Таңдау ережесі: АЖС тіктігі маңызды болса — эллиптикалық; фаза мен импульс пішіні маңызды болса — Бессель; ымыра — Баттеруорт.

Типтік кездейсоқ процестердің сипаттамалары

Процесс	Корреляция $R(\tau)$	Қуат спектрі $S(\omega)$
Ақ шу	$(N_0/2)\cdot\delta(\tau)$	$N_0/2$ — барлық жиілікте тұрақты
RC-сүзілген шу	$\sigma^2\cdot e^{-\lvert\tau\rvert/\tau_c}$	$2\sigma^2\tau_c/(1+\omega^2\tau_c^2)$ — Лоренц пішіні
Жолақпен шектелген ақ шу	$N_0B\cdot\sin(2\pi B\tau)/(2\pi B\tau)$	$N_0/2$, $\lvert f\rvert \le B$
Кездейсоқ фазалы синусоида	$(A^2/2)\cdot\cos\omega_0\tau$	$(\pi A^2/2)[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

Винер–Хинчин теоремасы: $R(\tau)$ пен $S(\omega)$ — Фурье жұбы; $R(0)=\sigma^2$ — процестің орташа қуаты; корреляция уақыты τ_c мен спектр ені кері пропорционал.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Баттеруорт сүзгісінің ретін есептеу

Шарты

f_p = 1 кГц, A_p = 1 дБ; f_s = 1.5 кГц, A_s = 40 дБ. Баттеруорт ТЖС-інің минимал ретін табыңыз.

Шешуі

1. $N \geq \lg[(10^{0.1A_s} - 1)/(10^{0.1A_p} - 1)] / [2 \cdot \lg(f_s/f_p)]$.

2. Алымы: lg(9999/0.2589) = lg 38 621 = 4.587.

3. Бөлімі: 2·lg 1.5 = 0.352.

4. $N \geq 13.02 \Rightarrow N = 14$.

N = 14 (зерттеу кестесімен сәйкес); эллиптикалық сүзгіге сол талапқа N = 5 жеткілікті.

Неге көп?

Баттеруорт АЖС-і $-20N$ дБ/декада заңымен баяу құлайды.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Ақ шудың RC-сүзгіден өтуі

Шарты

Біржақты спектрлік тығыздығы $N_0 = 10^{-8}$ $В^2$/Гц ақ шу fc = 1 кГц RC-ТЖС-ке түседі. Шығыс шудың қуаты мен СКО-ын табыңыз.

Шешуі

1. Шулық жолақ ені: Вш = (π/2)·fc = 1571 Гц.
2. Қуат: $P = N_0 \cdot Вш = 10^{-8} \cdot 1571 = 1.57 \cdot 10^{-5}$ $В^2$.
3. СКО: σ = √P = 3.96 мВ.
4. Шығыс корреляциясы: R(τ) = σ²·e^{−|τ|/RC}, RC = 0.159 мс.

$P = 1.57 \cdot 10^{-5}$ $В^2$, σ ≈ 4 мВ; шығыс шу енді «түсті» — корреляция уақыты 0.16 мс.

Шулық жолақ

1-ретті ТЖС үшін Вш = 1.57·fc — −3 дБ жолағынан 57 % кең.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

Аналогтық сүзгілер мен кездейсоқ сигналдар

Python

```
import scipy.signal as sg
wp, ws = 2*np.pi*1e3, 2*np.pi*1.5e3
N, wn = sg.buttord(wp, ws, 1, 40, analog=True)
b, a = sg.ellip(5, 1, 40, wp, analog=True)
w, H = sg.freqs(b, a)
x = np.random.randn(2**14)
r = np.correlate(x, x, 'full')/len(x)
f, P = sg.welch(x, fs=1e4)
```

MATLAB

```
[N, wn] = buttord(wp, ws, 1, 40, 's')
[b, a] = ellip(5, 1, 40, wp, 's');
freqs(b, a)
x = randn(1, 2^14);
[r, lags] = xcorr(x, 20, 'biased');
[P, f] = pwelch(x, [], [], [], 1e4);
plot(f, 10*log10(P))
```

buttord/cheb1ord/ellipord минимал ретті бірден есептейді: Баттеруорт 14, эллиптикалық 5.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Аналогтық сүзгілер мен кездейсоқ процестердің қолданылуы

АЦТ алдында

Антиалиасинг сүзгі — Найквист жиілігінен жоғарыны басады.

Аудио

Кроссоверлер (Линквиц–Райли), эквалайзерлер.

Байланыс

Шу жолағын шектеу, СШҚ-ны арттыру, сәйкес сүзгі.

Өлшеу

Корреляциялық талдау — кідірісті, жаңғырықты анықтау.

Негізгі идея

Сүзгі сигнал спектрін пішіндейді, корреляция — кездейсоқтықты сипаттайды.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Аналогтық сүзгілер мен корреляцияны зерттеу

1. Берілген талапқа Баттеруорт, Чебышев I/II, эллиптикалық сүзгілердің ретін есептеңіз.
2. АЖС, ФЖС және топтық кідірісті салыстырыңыз.
3. Ақ шуды RC-сүзгіден өткізіп, корреляция мен спектрді бағалаңыз.
4. AR(1) процесі үшін ACF бағалау қатесінің N-ге тәуелділігін зерттеңіз.
5. 1/√N заңын тексеріңіз.

Есепте болуы тиіс

- Реттер кестесі
- АЖС/ФЖС графиктері
- Корреляция функциялары
- Қате кестесі
- Қорытынды

Қолдану салалары

АЦТ сүзгілері, аудио, байланыс, өлшеу.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. Өткізу жолағы максималды тегіс сүзгі?

А) Чебышев I Б) Баттеруорт В) эллиптикалық

2. Ең аз ретті сүзгі?

А) Баттеруорт Б) Бессель В) эллиптикалық

3. Ақ шудың корреляциясы?

А) тұрақты Б) δ(τ) В) экспонента

4. R(τ) мен S(ω) байланысы?

А) Лаплас Б) Фурье жұбы В) Гильберт

5. N 4 есе артса, ACF бағалау қатесі...

А) 4 есе кемиді Б) 2 есе кемиді В) өзгермейді Г) өседі

Жауаптары: 1 — Б, 2 — В, 3 — Б, 4 — Б, 5 — Б

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Нақты сүзгілер идеал АЖС-ті жуықтайды: Баттеруорт, Чебышев, эллиптикалық, Бессель.

02 Бір талапқа: Баттеруорт N = 14, Чебышев N = 7, эллиптикалық N = 5 — тіктік фаза сызықтығы есебінен.

03 Кездейсоқ процесс моменттермен, корреляциямен және қуат спектрімен сипатталады; $R(\tau) \leftrightarrow S(\omega)$.

04 Корреляцияны бағалау қатесі $\sim 1/\sqrt{N}$: N = 64 → 0.245, N = 16384 → 0.018.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Аналогтық сүзгі	аналоговый фильтр	analog filter
Баттеруорт сүзгісі	фильтр Баттерворта	Butterworth filter
Эллиптикалық сүзгі	эллиптический фильтр	elliptic (Cauer) filter
Корреляциялық функция	корреляционная функция	correlation function
Қуат спектрі	спектральная плотность мощности	power spectral density
Ақ шу	белый шум	white noise
Стационарлық	стационарность	stationarity

БЕКІТУ

Бақылау сұрақтары

1. Өткізу және тежеу жолақтары қалай анықталады?
2. Чебышев сүзгісінің Баттеруорт сүзгісінен айырмашылығы неде?
3. Эллиптикалық сүзгілердің басты артықшылығы қандай?
4. Бессель сүзгілері қандай жағдайда қолданылады?
5. Математикалық күтім мен дисперсия нені сипаттайды?
6. Эргодикалық процесс дегеніміз не?
7. Винер–Хинчин түрлендірулері нені сипаттайды?