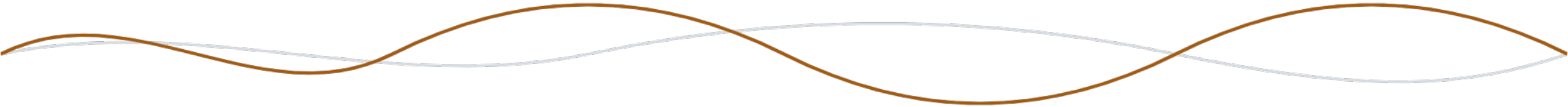
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

5-дәріс

Дискреттеу, Котельников теоремасы, ДФТ және ЖФТ

Спектрдің периодтылығы · aliasing · ДҮФТ · ДФТ қасиеттері · «көбелек» алгоритмі



КІРІСПЕ

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

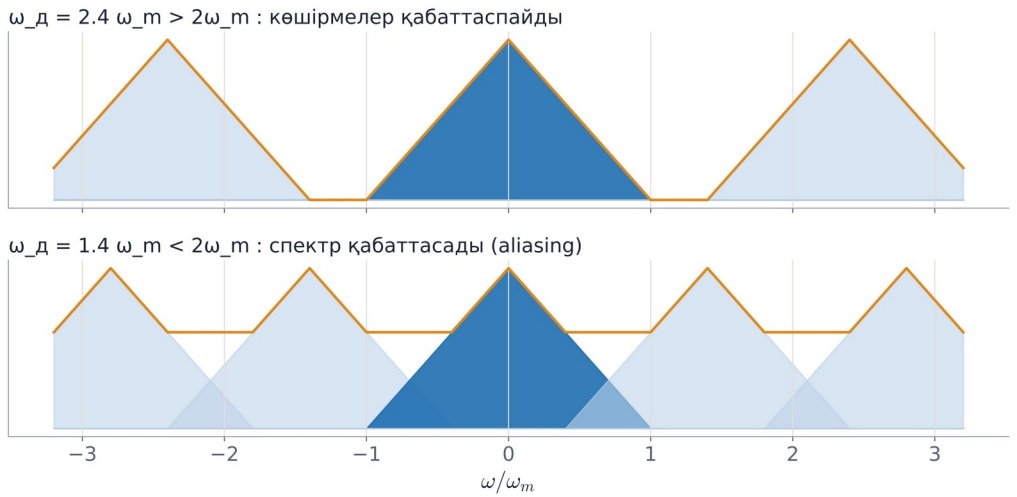
Дискреттеу кезінде спектрдің периодты қайталануын түсіну, Котельников теоремасын қолдану, ДФТ мен ЖФТ алгоритмдерінің формулалары мен есептеу тиімділігін меңгеру.

1. Дискреттеу және спектрдің периодтылығы
2. Котельников теоремасы және қалпына келтіру
3. Дискретті-үздіксіз (ДҮФТ) және дискретті (ДФТ) Фурье түрлендірулері
4. Жылдам Фурье түрлендіруі (ЖФТ)
5. Зерттеу: ДФТ мен ЖФТ уақытын өлшеу

Дискреттелген сигналдың спектрі периодты

$$u_{\mathrm{d}}(t) = u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n} u(nT)\, \delta(t - nT)$$

$$S_{\mathrm{d}}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_{\mathrm{d}}), \qquad \omega_{\mathrm{d}} = \frac{2\pi}{T}$$



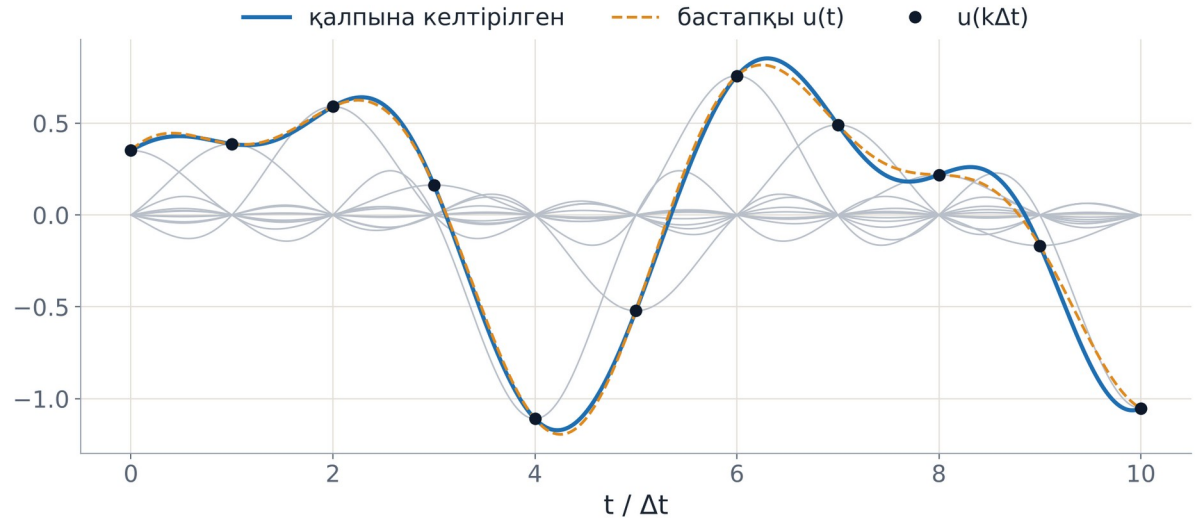
Aliasing

ωд < 2ωm болса, көршілес көшірмелер қабаттасып, бастапқы спектрді қалпына келтіру мүмкін болмайды. Қорғаныс: дискреттеуге дейін ТЖС (anti-aliasing).

Сигнал өз үлгілері арқылы дәл қалпына келеді

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t)\,\frac{\sin \omega_m (t - k\Delta t)}{\omega_m (t - k\Delta t)}$$

$$\Delta t \le \frac{1}{2F_m}, \qquad f_\text{д} \ge 2F_m$$



Найквист жиілігі

fд = 2Fm — шекті дискреттеу жиілігі; қалпына келтіру — идеал ТЖС.

Практикада неге дәл емес?

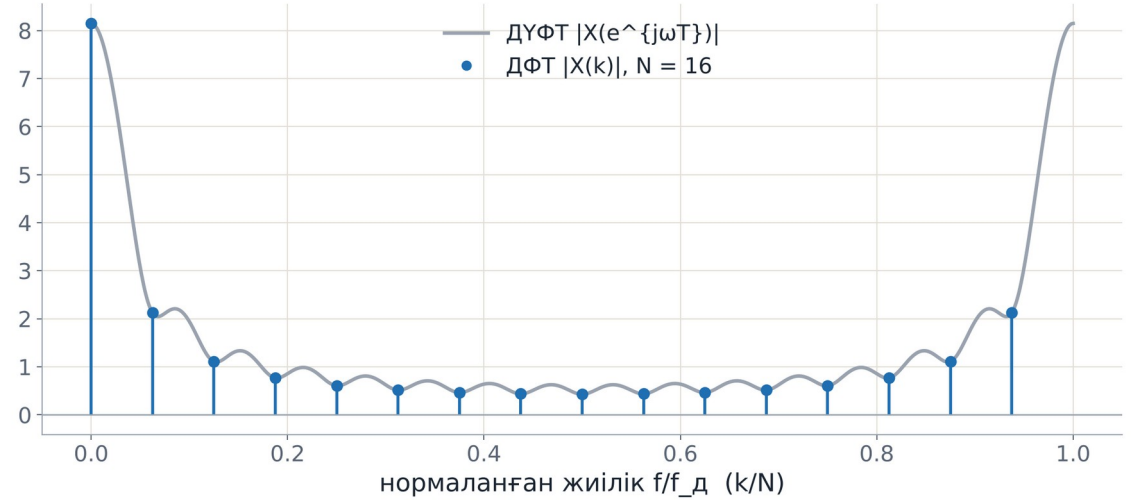
Нақты сигнал уақыт бойынша шектеулі, ал спектрі шексіз; идеал ТЖС жүзеге аспайды, сондықтан fд = (2.2…2.5)Fm алынады.

ДФТ — ДҮФТ-ның N нүктедегі үлгілері

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n T}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}, \qquad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-nk}$$



Периодтылық

X(k + N) = X(k); x(n + N) = x(n).

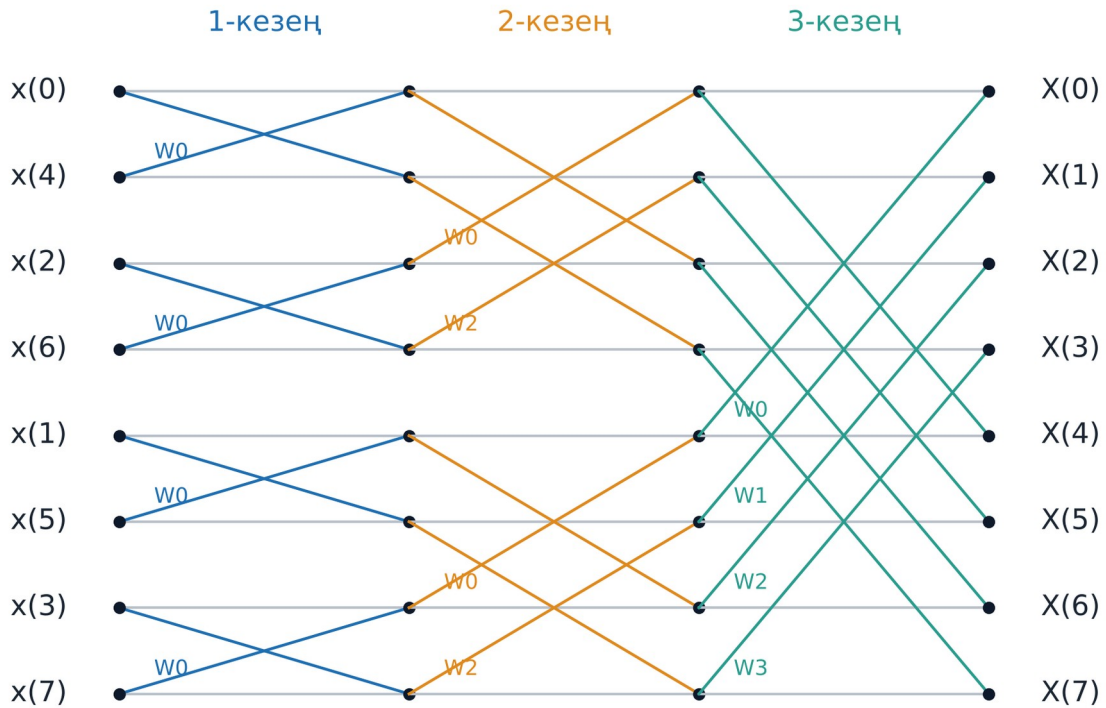
Симметрия

Нақты x(n) үшін X(N − k) = X*(k).

Жиілік торы

Δf = fд/N — спектрлік ажыратымдылық.

Уақыт бойынша жіктеу: 8 нүктелі «көбелек» графы



$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$$

$$X(k + N/2) = G(k) - W_N^k H(k)$$

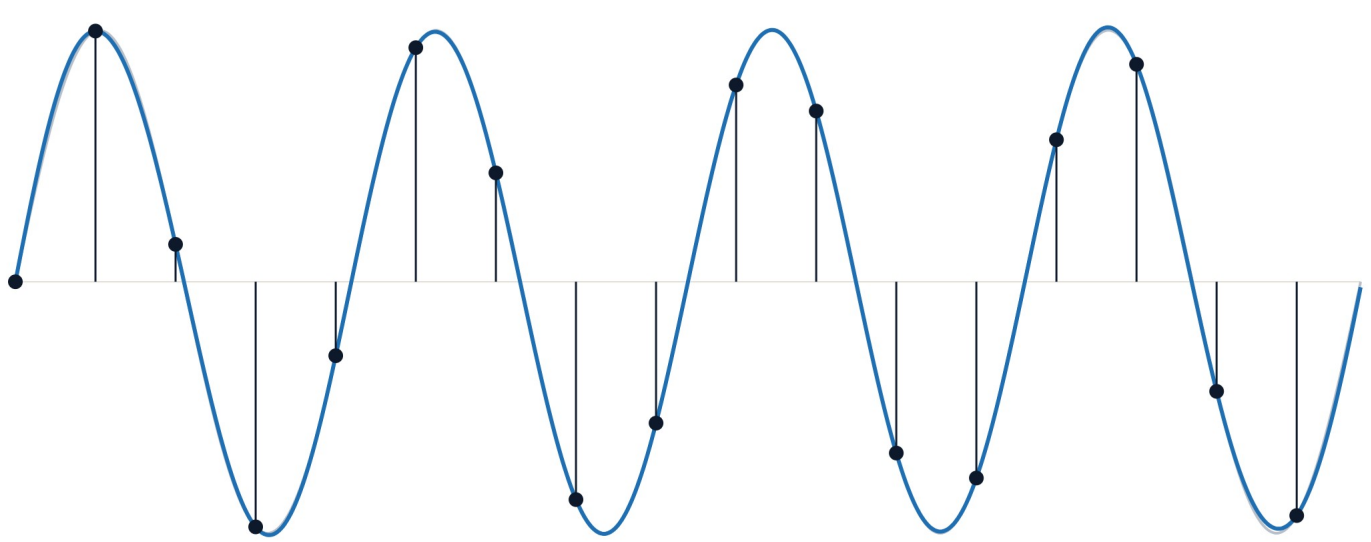
ДФТ: N^2 көбейту, ЖФТ: $\frac{N}{2}\log_2 N$

Идея

N нүктелі ДФТ жұп және тақ үлгілердің екі N/2 нүктелі ДФТ-сына бөлінеді; $\log_2 N$ кезең.

АНИМАЦИЯ · ALIASING

Дискреттеу жиілігі азайғанда не болады?



сұр — бастапқы синусоида, қара — үлгілер, түсті — sinc-интерполяция

Не көрінеді

fд біртіндеп $4.2f_0$-ден $0.8f_0$-ге дейін азаяды; үлгілер бойынша Котельников қатарымен қалпына келтірілген сигнал салынады.

Байқаңыз

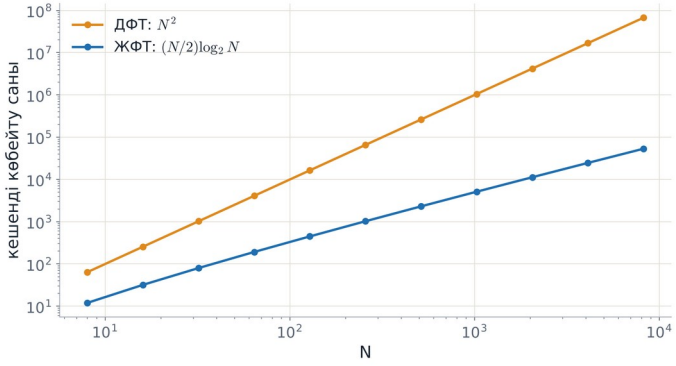
$f_д < 2f_0$ болғанда төмен жиілікті «жалған» синусоида пайда болады: $|f_0 - k \cdot f_д|$.

ЗЕРТТЕУ · УАҚЫТТЫ ӨЛШЕУ

ДФТ мен ЖФТ: есептеу көлемі және нақты уақыт

N	ДФТ: N^2	ЖФТ	Ұтыс	ДФТ, мс	ЖФТ, мс
64	4 096	192	21×	0.163	0.005
256	65 536	1 024	64×	2.02	0.007
1024	1 048 576	5 120	205×	33.3	0.017
2048	4 194 304	11 264	372×	166.2	0.029

Көбейту саны — теориялық; уақыт — Python/NumPy-да матрицалық ДФТ мен numpy.fft өлшенді (осы жұмыс ортасында).



Қорытынды: N = 2048 болғанда ЖФТ көбейту санын 372 есе қысқартады, ал өлшенген уақыт айырмашылығы одан да үлкен (≈ 5 650×) — жадқа қол жеткізу мен кэш тиімділігі де әсер етеді.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

Фурье түрлендірулерінің төрт түрі

Түрлендіру	Уақыт	Жиілік	Қолданылуы
Фурье қатары	үздіксіз, периодты	дискретті	Периодты сигналдардың спектрі
Фурье түрлендіруі	үздіксіз	үздіксіз	Аналогтық сигналдар мен жүйелер
ДҮФТ	дискретті	үздіксіз, периодты	Цифрлық сүзгінің АЖС, теориялық талдау
ДФТ / ЖФТ	дискретті, N	дискретті, N	Компьютерде есептеу, спектр анализаторлары

Заңдылық: бір аймақтағы дискреттілік екінші аймақта периодтылыққа әкеледі. Сондықтан ДФТ-да уақыт пен жиілік екеуі де дискретті әрі периодты.

ДФТ-ның негізгі қасиеттері

Қасиет	x(n)	X(k)
Сызықтық	a·x + b·y	a·X + b·Y
Дөңгелек ығысу	x((n − m) mod N)	W_N^{km}·X(k)
Нақты сигнал	x(n) ∈ ℝ	X(N − k) = X*(k)
Дөңгелек конволюция	x ⊛ y	X(k)·Y(k)
Парсеваль	Σ|x(n)|²	(1/N)·Σ|X(k)|²
Ажыратымдылық	—	Δf = fд/N = 1/T

Неге маңызды?

Нақты сигналда спектрдің жартысы ғана тәуелсіз: N/2 + 1 бин жеткілікті (rfft).

Ажыратымдылық

Δf-ті тек жазба ұзақтығы T анықтайды; нөлмен толықтыру тек интерполяциялайды.

Спектрдің ағуы және терезе функциялары

Терезе	Бас жапырақ, бин	Бүйір жапырақ, дБ	Қолдану
Тікбұрышты	2	−13	өтпелі процестер, дәл бүтін период
Ханн	4	−31	жалпы мақсатты талдау
Хемминг	4	−43	сөйлеу, байланыс
Блэкман	6	−58	әлсіз компоненттерді табу
Flat-top	10	−93	амплитуданы дәл өлшеу

Спектрдің ағуы (leakage): жазбаға бүтін емес период сыйса, энергия көрші биндерге «ағады»; терезе бүйір жапырақтарды басады, бірақ бас жапырақты кеңейтеді.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Котельников теоремасы және алиасинг

Шарты

$f_д$ = 8 кГц. 5 кГц және 11 кГц тондары қай жиілікте көрінеді? 3.4 кГц сөйлеу сигналы үшін минимал $f_д$ қандай?

Шешуі

1. Найквист жиілігі $f_д/2$ = 4 кГц — екі тон да одан жоғары.

2. 5 кГц: $|5 - 8|$ = 3 кГц.

3. 11 кГц: $|11 - 8|$ = 3 кГц — екеуі де 3 кГц-ке «бүктеледі».

4. Сөйлеу: $f_д \geq 2 \cdot 3.4 = 6.8$ кГц; стандартта 8 кГц (сүзгіге қор).

Екі тон да 3 кГц-те жалған көрінеді; сөйлеуге $f_д \geq 6.8$ кГц, іс жүзінде 8 кГц.

Қорғаныс

Алиасингті тек дискреттеуге дейінгі аналогтық ТЖС болдырмайды.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

ДФТ ажыратымдылығы және ЖФТ ұтысы

Шарты

$f_д$ = 1 кГц, N = 1024. Жиіліктік ажыратымдылықты, жазба ұзақтығын және ЖФТ-ның көбейту бойынша ұтысын табыңыз.

Шешуі

1. $\Delta f = f_д/N = 1000/1024 = 0.977$ Гц; $T = N/f_д = 1.024$ с.

2. ДФТ: $N^2 = 1\,048\,576$ комплекс көбейту.

3. Негіз-2 ЖФТ: $(N/2)\cdot\log_2 N = 512\cdot 10 = 5120$.

4. Ұтыс: 1 048 576/5120 = 204.8 есе.

$\Delta f \approx 0.98$ Гц, $T = 1.024$ с; ЖФТ 204.8 есе аз көбейту (өлшенген уақытта 36.8/0.016 мс).

Ереже

Ажыратымдылықты 2 есе жақсарту үшін жазбаны 2 есе ұзарту керек.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

Дискреттеу, ДФТ және ЖФТ: Python мен MATLAB

Python

```
fs, N = 1000, 1024
t = np.arange(N)/fs
x = np.sin(2*np.pi*50*t) + 0.5*np.sin(2*np.pi*120*t)
w = np.hanning(N)
X = np.fft.rfft(x*w)
f = np.fft.rfftfreq(N, 1/fs)
Xd = np.exp(-2j*np.pi*np.outer(np.arange(N),
np.arange(N))/N) @ x
print(np.allclose(np.fft.fft(x), Xd))
```

MATLAB

```
fs = 1000; N = 1024; t = (0:N-1)/fs;
x = sin(2*pi*50*t) + 0.5*sin(2*pi*120*t);
w = hann(N)';
X = fft(x.*w);
f = (0:N-1)*fs/N;
plot(f(1:N/2), abs(X(1:N/2)))
Xd = dftmtx(N)*x.'; % тікелей ДФТ
```

Матрицалық ДФТ (N^2) мен fft нәтижелері дәл сәйкес келеді, бірақ уақыт 200 еседен көп ерекшеленеді.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Дискреттеу мен ЖФТ-ның қолданылуы

Аудио

44.1/48 кГц дискреттеу, MP3/AAC кодектеріндегі спектрлік талдау.

Байланыс

OFDM (Wi-Fi, LTE, 5G): ЖФТ/кері ЖФТ — модуляцияның өзі.

Радар

Доплер жиілігін ЖФТ арқылы өлшеу, импульстік сығу.

Медицина

ЭЭГ/ЭКГ спектрлері, МРТ-да кескінді 2D ЖФТ-мен қалпына келтіру.

Негізгі идея

Котельников теоремасы — цифрлауға рұқсат; ЖФТ — спектрді нақты уақытта есептеу.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Дискреттеу мен спектрлік талдауды зерттеу

1. Синусты әртүрлі fd-мен дискреттеп, алиасингті көрсетіңіз.
2. Котельников қатарымен сигналды үлгілерінен қалпына келтіріңіз.
3. Тікелей ДФТ мен ЖФТ уақытын N = 64…2048 үшін өлшеңіз.
4. Тікбұрышты, Ханн, Блэкман терезелерімен ағуды салыстырыңыз.
5. Екі жақын тонды ажырату үшін қажетті N-ді анықтаңыз.

Есепте болуы тиіс

- Алиасинг мысалдары
- Қалпына келтіру қатесі
- Уақыт кестесі
- Терезелер салыстыруы
- Қорытынды

Қолдану салалары

Аудио, OFDM, радар, медициналық сигналдар.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. Котельников шарты?

А) $f_д \geq f_{max}$ Б) $f_д \geq 2f_{max}$ В) $f_д \geq 4f_{max}$

2. $f_д$ = 8 кГц-те 5 кГц тон қайда көрінеді?

А) 5 кГц Б) 3 кГц В) 13 кГц

3. ДФТ ажыратымдылығы?

А) $f_д \cdot N$ Б) $f_д / N$ В) $N / f_д$

4. N = 1024 үшін ЖФТ ұтысы?

А) 10 Б) 102 В) 204.8

5. Бүйір жапырағы ең төмен терезе?

А) тікбұрышты Б) Ханн В) Хемминг Г) Блэкман

Жауаптары: 1 — Б, 2 — Б, 3 — Б, 4 — В, 5 — Г

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Дискреттеу спектрді fд периодымен қайталайды; fд ≥ 2fmax болса, сигнал үлгілерінен дәл қалпына келеді.

02 ДФТ — ДҮФТ-ның N нүктедегі үлгілері; ажыратымдылық $\Delta f = f_д/N$ жазба ұзақтығымен анықталады.

03 ЖФТ көбейту санын $N^2 \to (N/2)\log_2 N$ дейін азайтады: N = 1024 үшін 204.8 есе.

04 Спектрдің ағуын терезелер басады: Блэкман бүйір жапырақтарды −58 дБ-ге дейін түсіреді.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Дискреттеу	дискретизация	sampling
Котельников теоремасы	теорема Котельникова	sampling theorem (Nyquist–Shannon)
Алиасинг	наложение спектров	aliasing
Дискретті Фурье түрлендіруі	дискретное преобразование Фурье	discrete Fourier transform (DFT)
Жылдам Фурье түрлендіруі	быстрое преобразование Фурье	fast Fourier transform (FFT)
Спектрдің ағуы	растекание спектра	spectral leakage
Терезе функциясы	оконная функция	window function

БЕКІТУ

Бақылау сұрақтары

1. Дискреттелген сигналдың спектрі қандай заңдылыққа бағынады?
2. Спектрлік қабаттасу қашан пайда болады және оны қалай болдырмайды?
3. Котельников теоремасын тұжырымдаңыз.
4. ДФТ мен кері ДФТ арасындағы байланыс қандай?
5. Неліктен ДФТ спектрі периодты?
6. ДФТ есептеудің күрделілігі қандай?
7. ЖФТ алгоритмінің негізгі идеясы неде?