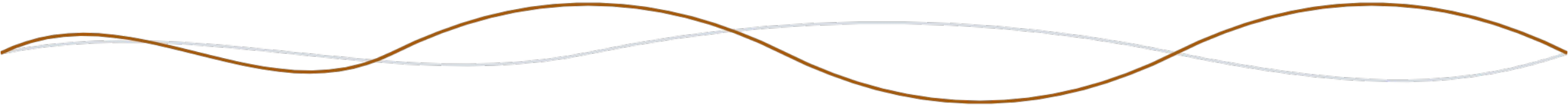
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

6-дәріс

ДКТ, Z-түрлендіру және дискретті конволюция

Энергияны шоғырландыру · Чебышев түйіндері · полюстер мен тұрақтылық · сызықтық және дөңгелек конволюция



Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

ДКТ-ның теориясы мен энергияны шоғырландыру қасиетін, Z-түрлендіруді және дискретті конволюцияны тікелей әрі ЖФТ арқылы есептеуді меңгеру.

1. ДКТ: анықтамасы, базистік функциялар, Чебышев көпмүшелерімен байланысы
2. Энергияны шоғырландыру: ДКТ, ДФТ және Уолш салыстыруы
3. Дискретті Лаплас және Z-түрлендіру, полюстер мен тұрақтылық
4. Дискретті конволюция: тікелей және ЖФТ арқылы

Дәрістің негізгі ұғымдары

Ұғым	Мағынасы
ДКТ-II	$X(k) = \Sigma\, x(n)\cdot\cos[\pi k(2n+1)/2N]$ — нақты, ортогоналды түрлендіру
Z-түрлендіру	$X(z) = \Sigma\, x(n)\cdot z^{-n}$ — Лаплас түрлендіруінің дискретті аналогы
Жинақталу аймағы (ЖА)	$X(z)$ қатары жинақталатын z мәндерінің сақинасы
Полюстер / нөлдер	$X(z)$-тің бөлімі / алымы нөлге айналатын нүктелер
Сызықтық конволюция	$y(n) = \Sigma\, x(k)\cdot h(n-k)$; ұзындығы $N_1 + N_2 - 1$
Дөңгелек конволюция	N модулі бойынша; ДФТ көбейтіндісіне сәйкес

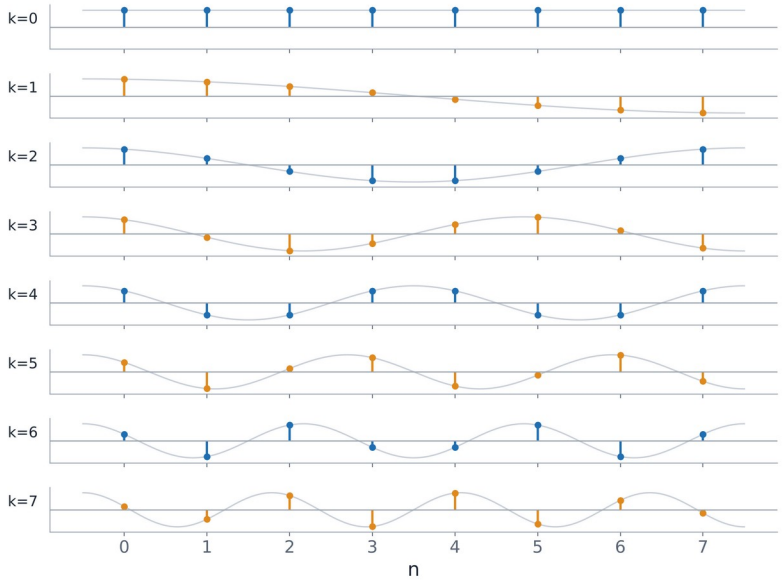
ДКТ-II: нақты, ортогоналды, JPEG/MPEG негізі

$$C(k) = \alpha(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{\pi(2n+1)k}{2N}, \quad k = 0..N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k)\, C(k) \cos \frac{\pi(2n+1)k}{2N}$$

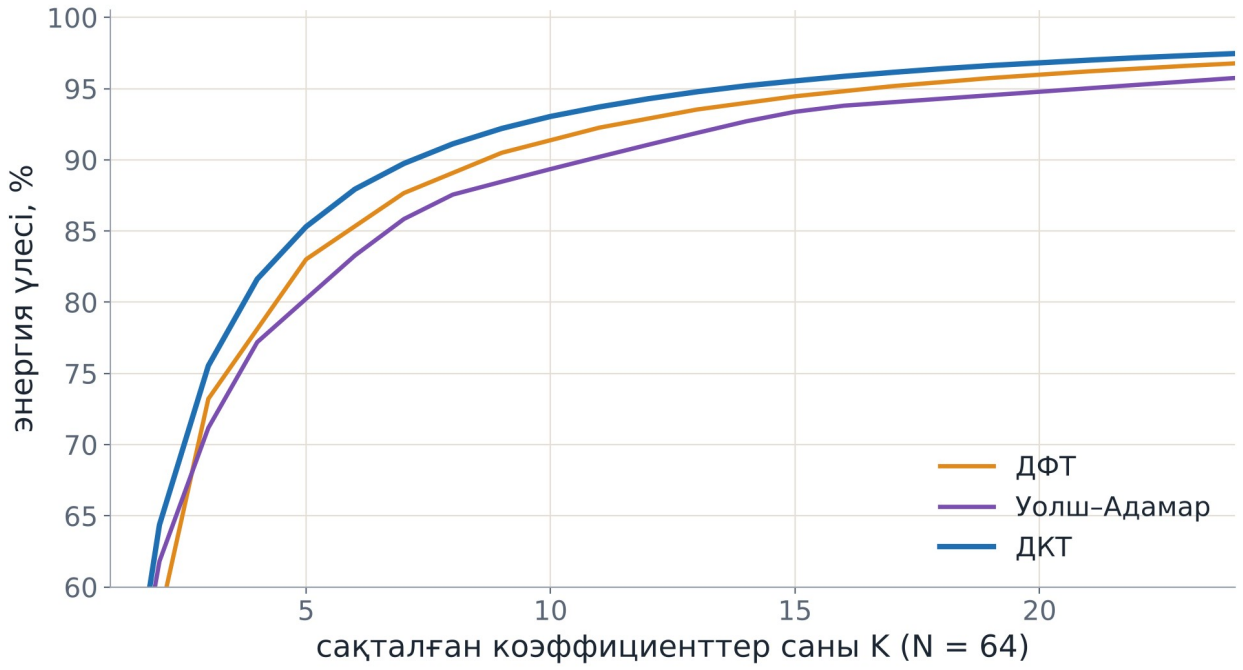
$$\alpha(0) = \sqrt{1/N}, \qquad \alpha(k) = \sqrt{2/N} \quad (k \geq 1)$$

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x) \;\Rightarrow\; x_n = \cos \frac{\pi(2n+1)}{2N}$$ — Чебышев түйіндері



Неге ДКТ? Сигнал жұп түрде жалғастырылады — шекарада секіру болмайды, сондықтан жоғары жиілікті «жайылу» аз, энергия алғашқы коэффициенттерге жиналады.

Қай түрлендіру энергияны аз коэффициентке жинайды?



K	ДФТ	Уолш	ДКТ
1	42.3	42.3	42.3
2	57.7	61.8	64.4
4	78.1	77.2	81.6
8	89.1	87.6	91.1
16	94.8	93.8	95.9

Энергия үлесі, %; AR(1), ρ = 0.95, N = 64, 4000 жүзеге асу.

Қорытынды

Барлық K үшін ДКТ көш бастайды — оңтайлы Карунен–Лоэв түрлендіруіне ең жақын.

Z-түрлендірудің негізгі қасиеттері

Қасиет	Уақыт аймағы	Z-аймақ
Сызықтық	$a \cdot x_1 + b \cdot x_2$	$a \cdot X_1(z) + b \cdot X_2(z)$
Уақыт бойынша кідіріс	$x(n - k)$	$z^{-k} \cdot X(z)$
Экспонентаға көбейту	$a^n \cdot x(n)$	$X(z/a)$
Конволюция	$x(n) * h(n)$	$X(z) \cdot H(z)$
n-ге көбейту	$n \cdot x(n)$	$-z \cdot dX(z)/dz$
Бастапқы мән	$x(0)$	$\lim X(z),\ z \to \infty$
Соңғы мән	$x(\infty)$	$\lim (1 - z^{-1})X(z),\ z \to 1$

Типтік тізбектердің Z-бейнелері

x(n)	X(z)	ЖА
$\delta(n)$	1	барлық z
$u(n)$	$1 / (1 - z^{-1})$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n \cdot u(n)$	$1 / (1 - a \cdot z^{-1})$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$n \cdot a^n \cdot u(n)$	$a \cdot z^{-1} / (1 - a \cdot z^{-1})^2$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n) \cdot u(n)$	$(1 - z^{-1}\cos\omega_0) / (1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2})$	$\lvert z\rvert > 1$
$-a^n \cdot u(-n-1)$	$1 / (1 - a \cdot z^{-1})$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

Назар аударыңыз

Соңғы екі жолдағы X(z) бірдей — тек ЖА әртүрлі. Сондықтан ЖА-сыз Z-бейне бір мәнді анықталмайды.

Тұрақтылық

Себепті жүйе тұрақты ⇔ ЖА бірлік шеңберді қамтиды ⇔ барлық полюстер $\lvert z\rvert < 1$.

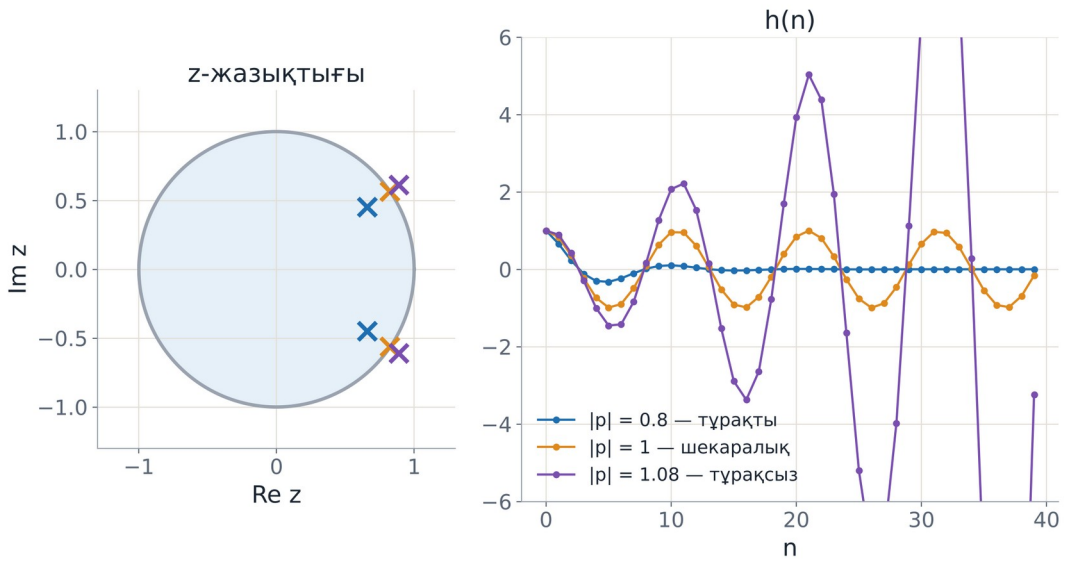
Полюстер бірлік шеңбердің ішінде — жүйе тұрақты

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}, \qquad z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

$$\delta(n) \to 1, \quad 1(n) \to \frac{z}{z-1}, \quad a^n 1(n) \to \frac{z}{z-a}, \ |z| > |a|$$

$$x(n-m) \to z^{-m} X(z), \qquad x * h \to X(z) H(z)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{n-1} dz$$



s → z: сол жақ жарты жазықтық (σ < 0) бірлік шеңбердің ішкі бөлігіне, jω осі — шеңбердің өзіне бейнеленеді.

Сызықтық және дөңгелек конволюция

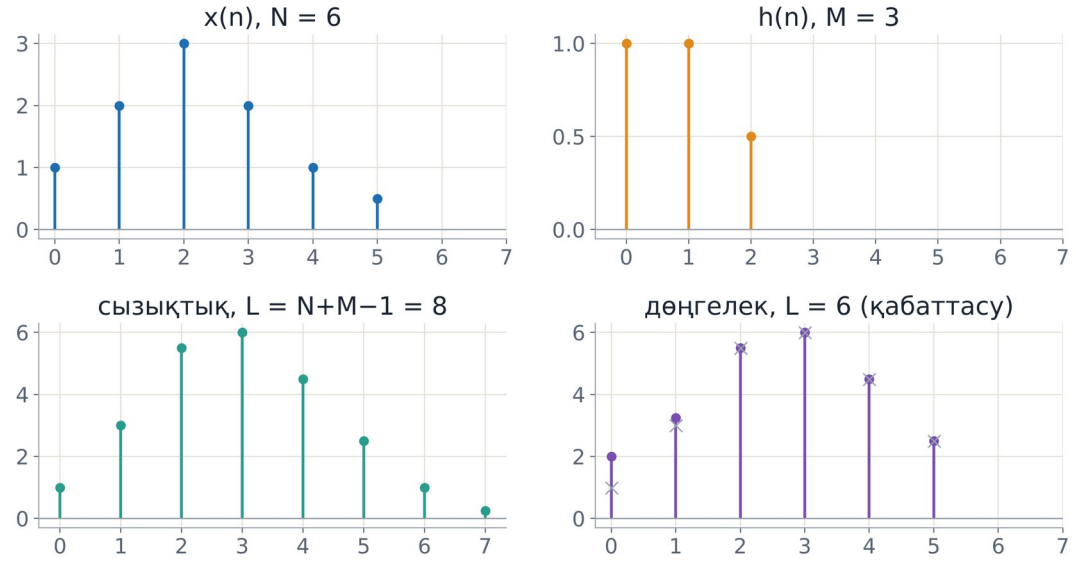
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, h(n-k), \qquad n = 0..N+M-2$$

$$y_c(n) = \sum_{k=0}^{L-1} x(k)\, h((n-k) \bmod L)$$

$$y = \text{ОДФТ}\{\text{ДФТ}\{x\} \cdot \text{ДФТ}\{h\}\}, \qquad L \geq N+M-1$$

Қабаттасу қатесі

L < N + M − 1 болса, «құйрық» басына оралады: y_c(0) = y(0) + y(6).



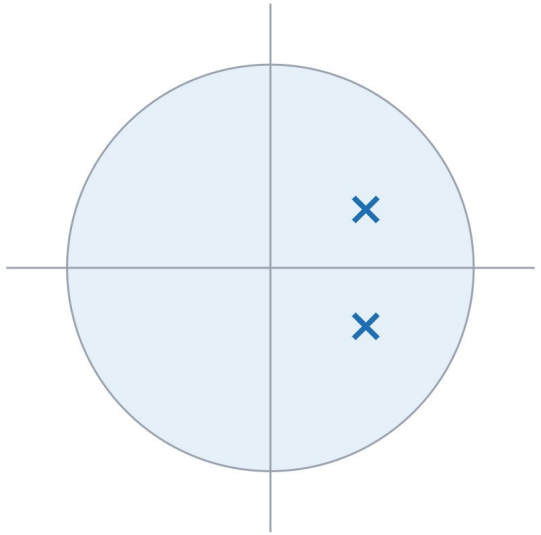
Ұзын сигналдар: қабаттасып қосу (overlap-add) және қабаттасып сақтау (overlap-save) әдістері.

АНИМАЦИЯ · ПОЛЮС ЖӘНЕ ТҰРАҚТЫЛЫҚ

Полюс бірлік шеңберге жақындағанда

|p| = 0.550

тұрақты: h(n) сөнеді





z-жазықтығы

h(n) = |p|ⁿ·cos(θn)

Не көрінеді

Түйіндес полюстер жұбы бұрышы θ = 0.55 рад, радиусы 0.55-тен 1.1-ге дейін өзгереді.

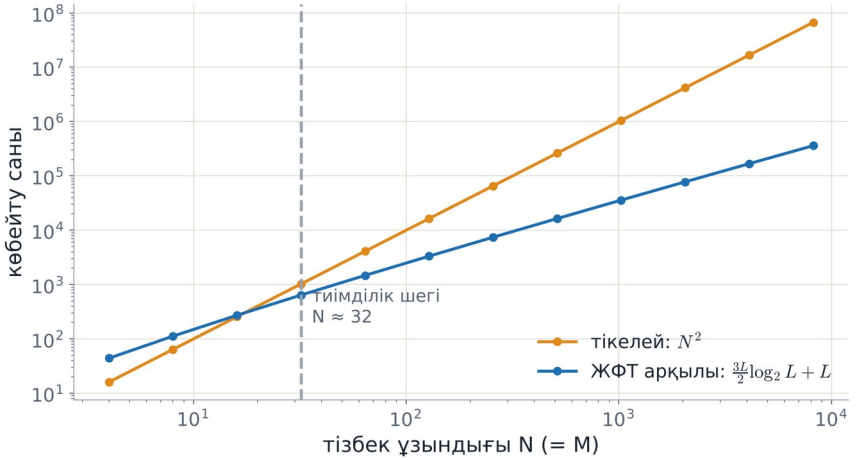
Ереже

|p| — сөну жылдамдығы, arg p — тербеліс жиілігі. Тұрақтылық: барлық $|p_k| < 1$.

ЖФТ қай ұзындықтан бастап тиімді?

N	Тікелей	ЖФТ	t_1, мс	t_2, мс
16	256	272	0.003	0.018
64	4 096	1 472	0.004	0.015
256	65 536	7 424	0.015	0.021
1024	1 048 576	35 840	0.137	0.047
4096	16 777 216	167 936	2.374	0.197

Көбейту саны (теория) және өлшенген уақыт: t_1 — numpy.convolve, t_2 — rfft арқылы.



Қорытынды: теория бойынша ЖФТ N ≈ 32-ден бастап тиімді; нақты өлшеуде шек N ≈ 256–1024 аралығына жылжиды (тікелей әдістің оңтайландырылған іске асырылуы). N = 4096 болғанда ЖФТ 12 есе жылдам.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

Конволюцияны есептеу әдістерін салыстыру

Әдіс	Көбейту саны	Кідіріс	Қашан тиімді
Тікелей (уақыт аймағы)	$N \cdot M$	нөл	қысқа сүзгі, $M < 64$
ДФТ/ЖФТ арқылы	$\approx 3 \cdot (N/2) \cdot \log_2 N + N$	бүкіл блок	ұзын, бір реттік сигнал
Overlap-add	блоктық ЖФТ	бір блок	ағын, ұзын $h(n)$
Overlap-save	блоктық ЖФТ	бір блок	ағын, жадты үнемдеу

Нәтиже: зерттеуде $N = 1024$-тен бастап ЖФТ арқылы конволюция тікелей әдістен жылдам болды (0.047 мс / 0.137 мс), $N = 4096$-да ≈ 12 есе.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Кері Z-түрлендіру: жай бөлшектерге жіктеу

Шарты

$H(z) = 1 / [(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})]$. Себепті $h(n)$-ді табыңыз және тұрақтылығын тексеріңіз.

Шешуі

1. $H(z) = A/(1 - 0.5z^{-1}) + B/(1 - 0.25z^{-1})$.
2. $A = 1/(1 - 0.25/0.5) = 2$; $B = 1/(1 - 0.5/0.25) = -1$.
3. $h(n) = [2 \cdot 0.5^n - 0.25^n] \cdot u(n)$.
4. Тексеру: $h(0) = 1$, $h(1) = 0.75$ — қатарға жіктеумен сәйкес.
5. Полюстер 0.5 және 0.25 — бірлік шеңбер ішінде.

$h(n) = 2 \cdot 0.5^n - 0.25^n$, $n \geq 0$; жүйе тұрақты.

Әдіс

Жай бөлшектерге жіктеу + $a^n u(n) \leftrightarrow 1/(1 - az^{-1})$ жұбы.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Сызықтық және дөңгелек конволюция

Шарты

$x(n) = \{1, 2, 3\}$, $h(n) = \{1, 1\}$. Сызықтық конволюцияны және $N = 3$, $N = 4$ үшін дөңгелек конволюцияны табыңыз.

Шешуі

1. Сызықтық: $y = \{1, 1+2, 2+3, 3\} = \{1, 3, 5, 3\}$, ұзындығы $3 + 2 - 1 = 4$.

2. $N = 3$: соңғы үлгі басына «оралады»: $\{1+3, 3, 5\} = \{4, 3, 5\}$.

3. $N = 4 \geq 4$: дөңгелек = сызықтық = $\{1, 3, 5, 3\}$.

4. Ереже: $N \geq N_1 + N_2 - 1$ болса, ДФТ арқылы конволюция дұрыс.

Сызықтық $\{1, 3, 5, 3\}$; $N = 3$ дөңгелек $\{4, 3, 5\}$ — уақыттық алиасинг.

Практика

ЖФТ-мен сүзуде тізбектерді нөлмен $N_1 + N_2 - 1$-ге дейін толықтыру міндетті.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

ДКТ, Z-түрлендіру және конволюция: Python мен MATLAB

Python

```
from scipy.fft import dct, idct, fft, ifft
import scipy.signal as sg
X = dct(x, type=2, norm='ortho')
z, p, k = sg.tf2zpk([1], [1,-0.75,0.125])
r, pl, _ = sg.residuez([1], [1,-0.75,0.125])
y = np.convolve(x, h) # сызықтық
L = len(x)+len(h)-1
yf = ifft(fft(x,L)*fft(h,L)).real
yc = sg.oaconvolve(x, h) # overlap-add
```

MATLAB

```
X = dct(x);
[z,p,k] = tf2zp(1,[1 -0.75 0.125]);
zplane(1,[1 -0.75 0.125]);
[r,p,c] = residuez(1,[1 -0.75 0.125]);
y = conv(x, h);
yc = cconv(x, h, 3); % дөңгелек
yf = ifft(fft(x,4).*fft(h,4));
y2 = fftfilt(h, x); % overlap-add
```

residuez жай бөлшектерге жіктеуді автоматты орындайды: r = [2, −1], p = [0.5, 0.25].

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

ДКТ, Z-түрлендіру және конволюцияны зерттеу

1. AR(1) сигналы үшін ДФТ, Уолш және ДКТ энергия шоғырлануын салыстырыңыз.
2. Берілген H(z) үшін нөл-полюс диаграммасын салып, тұрақтылықты бағалаңыз.
3. residuez арқылы h(n)-ді аналитикалық және сандық түрде табыңыз.
4. Сызықтық және дөңгелек конволюцияны N-нің әр мәнінде салыстырыңыз.
5. Тікелей және ЖФТ арқылы конволюция уақытын N = 16…4096 үшін өлшеңіз.

Есепте болуы тиіс

- Энергия шоғырлану кестесі
- Нөл-полюс диаграммалары
- h(n) графиктері
- Уақыт өлшеу кестесі
- Қорытынды

Қолдану салалары

Кескін/бейне қысу (JPEG, MPEG), цифрлық сүзгілер синтезі, жылдам сүзу.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. ДКТ-ның ДФТ-дан басты артықшылығы?

А) комплекс мәндер Б) энергияны жақсы шоғырландырады В) жылдамырақ

2. $a^n u(n)$-нің Z-бейнесі?

А) $1/(1 - az^{-1})$ Б) $1/(1 - z^{-1})$ В) az^{-1}

3. Себепті жүйе тұрақты, егер полюстер...

А) $|z| > 1$ Б) $|z| < 1$ В) $z = 1$

4. x ұзындығы 3, h ұзындығы 2: сызықтық конволюция ұзындығы?

А) 3 Б) 4 В) 5

5. Z-аймақта конволюция неге сәйкес?

А) қосындыға Б) көбейтіндіге В) бөлуге Г) туындыға

Жауаптары: 1 — Б, 2 — А, 3 — Б, 4 — Б, 5 — Б

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 ДКТ — нақты ортогоналды түрлендіру; AR(1) сигналында 8 коэффициент энергияның 91 %-ын жинайды.

02 Z-түрлендіру айырымдық теңдеуді алгебралық теңдеуге айналдырады; ЖА-сыз бейне бір мәнді емес.

03 Себепті жүйенің тұрақтылығы — барлық полюстердің бірлік шеңбер ішінде болуы.

04 Дөңгелек конволюция сызықтыққа тең болу үшін $N \geq N_1 + N_2 - 1$; ұзын тізбектерде ЖФТ арқылы есептеу тиімді.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Дискретті косинустық түрлендіру	дискретное косинусное преобразование	discrete cosine transform (DCT)
Z-түрлендіру	Z-преобразование	Z-transform
Жинақталу аймағы	область сходимости	region of convergence (ROC)
Полюс / нөл	полюс / нуль	pole / zero
Сызықтық конволюция	линейная свёртка	linear convolution
Дөңгелек конволюция	круговая свёртка	circular convolution
Жай бөлшектерге жіктеу	разложение на простые дроби	partial fraction expansion

БЕКІТУ · 6-ДӘРІС

Бақылау сұрақтары

1. ДКТ-ның негізгі формулаларын жазыңыз.
2. ДКТ-ның Чебышев көпмүшелерімен байланысы қандай?
3. Неліктен ДКТ энергияны жинақтау қабілеті жоғары?
4. Z-түрлендірудің Лаплас түрлендіруімен ұқсастығы неде?
5. Полюстердің орналасуы тұрақтылыққа қалай әсер етеді?
6. Сызықтық және дөңгелек конволюцияның айырмашылығы қандай?
7. Конволюцияны ЖФТ арқылы есептеу қандай артықшылық береді?