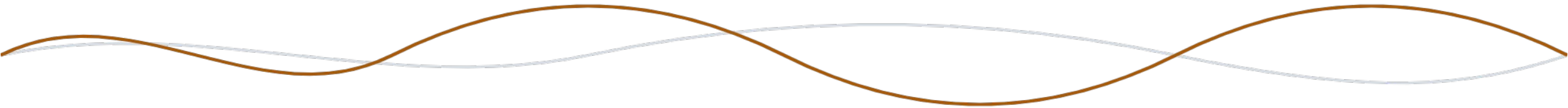
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

# 7-дәріс

# Сызықтық дискретті жүйелер және цифрлық сүзгілер

Айырымдық теңдеу · СИС және ШИС құрылымдары · биквадрат блок · децимация мен интерполяция



КІРІСПЕ · 7-ДӘРІС

# Дәрістің мақсаты мен жоспары

## Мақсат

СДЖ элементтерін, рекурсивті және рекурсивті емес сүзгілердің құрылымы мен сипаттамаларын, сондай-ақ іріктеу жиілігін өзгерту жүйелерін (дециматор, интерполятор) меңгеру.

1. СДЖ элементтері: қосқыш, көбейткіш, кідіріс
2. СИС (КИХ) және ШИС (БИХ) сүзгілері, беріліс функциясы
3. АЖС, ФЖС және биквадрат блок
4. Децимация мен интерполяция, көпкезеңді жүйелер

# Сызықтық стационар дискретті жүйенің қасиеттері

| Ұғым | Мағынасы |
|---|---|
| Сызықтық | $a\cdot x_1 + b\cdot x_2 \to a\cdot y_1 + b\cdot y_2$ (суперпозиция) |
| Стационарлық | $x[n-k] \to y[n-k]$: параметрлер уақытпен өзгермейді |
| Себептілік | $y[n]$ тек $x[n]$, $x[n-1]$, … мәндеріне тәуелді |
| Тұрақтылық (BIBO) | $\Sigma\lvert h[n]\rvert < \infty \Leftrightarrow$ $H(z)$ полюстері $\lvert z\rvert < 1$ |
| Импульстік сипаттама | $h[n]$ — $\delta[n]$ әсеріне жауап; $y = x * h$ |
| Беріліс функциясы | $H(z) = Y(z)/X(z) = \Sigma b_k z^{-k} / (1 + \Sigma a_k z^{-k})$ |

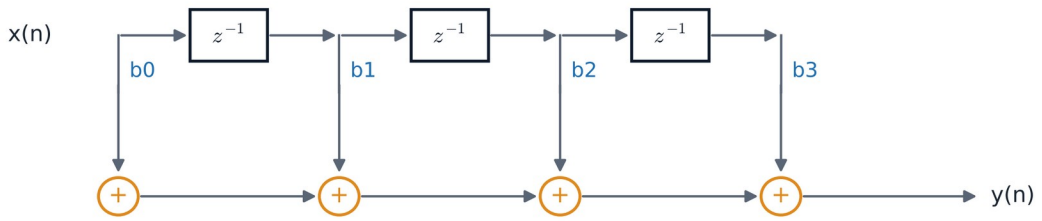
# Айырымдық теңдеу және сүзгі құрылымдары

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k)$$

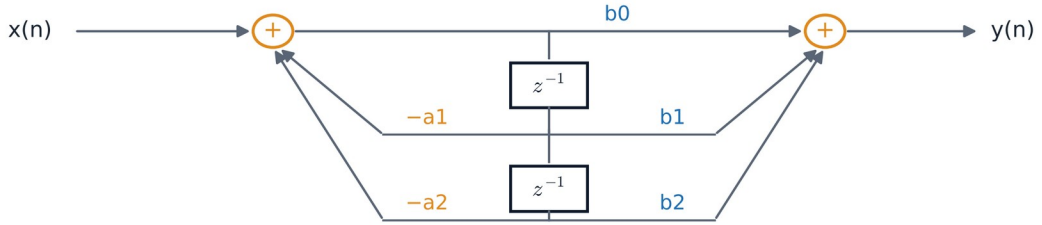
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$H(e^{j\omega T}) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega T}} = |H|\, e^{j\varphi(\omega)}$$

Рекурсивті емес (КИХ / СИС) — трансверсал құрылым

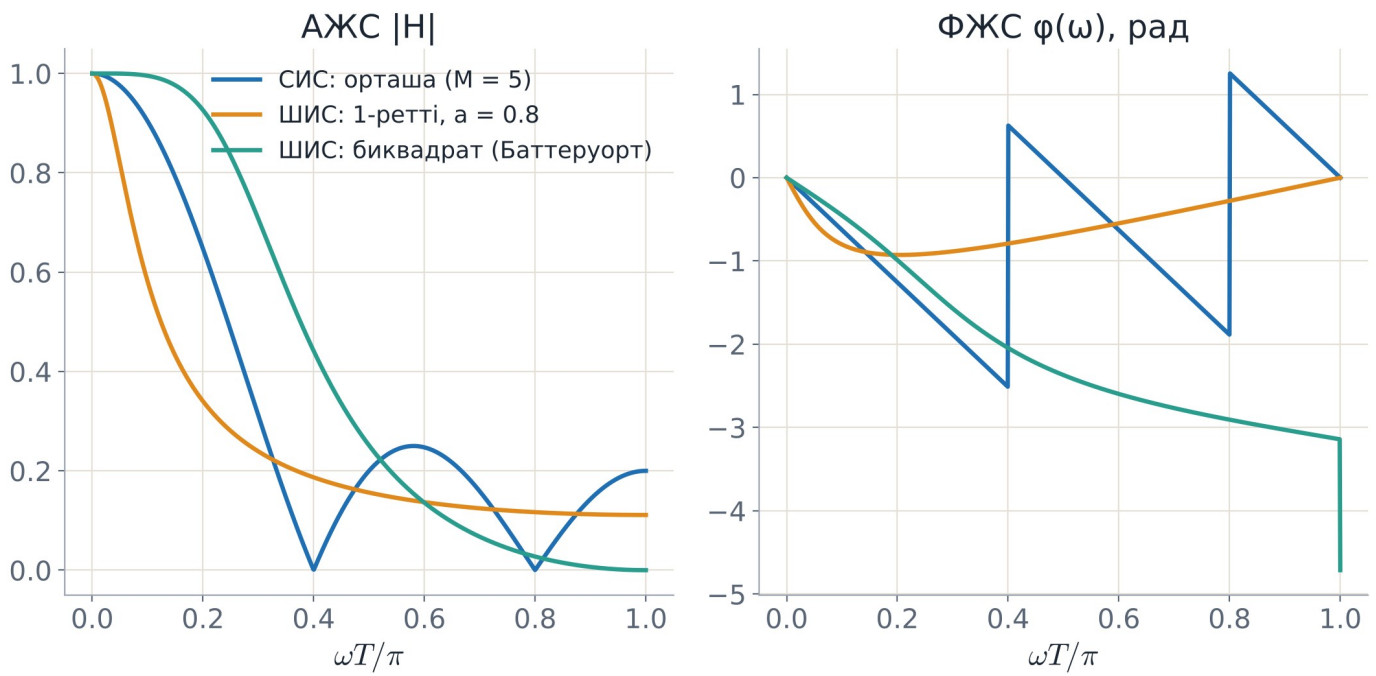



Рекурсивті (БИХ / ШИС) — биквадрат блок (тура форма II)




$a_k = 0$ → рекурсивті емес (СИС); $a_k \neq 0$ → кері байланыс бар (ШИС).

# СИС және ШИС сүзгілерінің АЖС пен ФЖС




## СИС

ФЖС сызықтық (секірулер — АЖС нөлдерінде), әрқашан тұрақты.

## ШИС

Аз коэффициентпен тік АЖС, бірақ ФЖС сызықтық емес.

## Биквадрат

Жоғары ретті ШИС 2-ретті блоктардың каскадымен жүзеге асады — кванттауға сезімталдық азаяды.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

# Рекурсивті емес және рекурсивті сүзгілер

| Белгі | СИС (КИХ) | ШИС (БИХ) |
|---|---|---|
| Импульстік сипаттама | шектеулі, N үлгі | шексіз, сөнетін |
| Тұрақтылық | әрқашан тұрақты | полюстерге тәуелді |
| ФЖС | дәл сызықтық болуы мүмкін | сызықтық емес |
| Бірдей талапқа рет | жоғары (ондаған) | төмен (бірлік) |
| Кванттауға сезімталдық | төмен, шекті цикл жоқ | жоғары, шекті цикл мүмкін |
| Синтез | терезе, жиіліктік таңдау, Ремез | аналогтық прототип + бисызықтық түрлендіру |

# Айырымдық теңдеу, H(z) және тұрақтылық

### Айырымдық теңдеуден H(z)-ке

$y[n] = \Sigma\, b_k\, x[n-k] - \Sigma\, a_k\, y[n-k]$

Z-түрлендіру: $Y(z)(1 + \Sigma a_k z^{-k}) = X(z)\cdot\Sigma b_k z^{-k}$

$H(z) = B(z)/A(z)$; АЖС: $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

### Мысал: 1-ретті рекурсивті сүзгі

$y[n] = x[n] + a\cdot y[n-1]$

$H(z) = 1/(1 - a\, z^{-1})$, $h[n] = a^n\, u[n]$

$|a| < 1$ — тұрақты; $a = 0.9$ — ТЖС, $a = -0.9$ — ЖЖС

### Нөлдер мен полюстер

$B(z) = 0$ — нөлдер (АЖС «ойықтары»), $A(z) = 0$ — полюстер (АЖС «шыңдары»).

### СИС ерекшелігі

$A(z) = 1$ — полюстер тек $z = 0$ нүктесінде: СИС әрқашан тұрақты.

АНИМАЦИЯ · ДЕЦИМАЦИЯДАҒЫ АЛИАСИНГ

# Тон жиілігі өскенде ↓4 сиретуден кейін не болады?

[Interactive web embed — view it in the original presentation]

Байқаңыз: π/4-тен жоғары тон сүзгісіз сиретуде төмен жиілікке «бүктеліп», жалған сигнал болады; антиалиасинг ТЖС оны алдын ала басады.

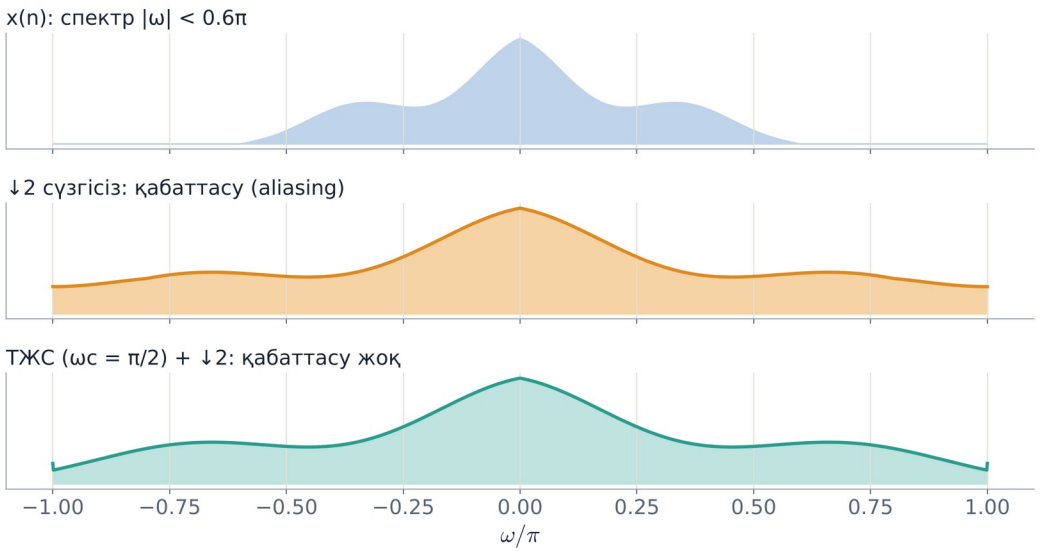
# Децимация: алдымен сүзу, сосын сиретү

$$\downarrow M: \quad y(m) = x(mM), \qquad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi k)/M})$$

$$\uparrow L: \quad y(m) = x(m/L)$$

$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$ — спектр бейнелері

$f_{\text{new}} = f_{\text{d}}\, L/M$




Ереже: ↓M алдында кесу жиілігі π/M болатын ТЖС қажет; ↑L-ден кейін бейнелерді жою үшін кесу жиілігі π/L және күшейту L болатын ТЖС қажет.

АНИМАЦИЯ · ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ↑3

# Нөлдер енгізу және сүзу арқылы жиілікті арттыру

[Interactive web embed — view it in the original presentation]

### Үш кезең

Үлгілер → нөлдер енгізу (спектр бейнелері пайда болады) → бейнелерді басатын ТЖС.

### Байқаңыз

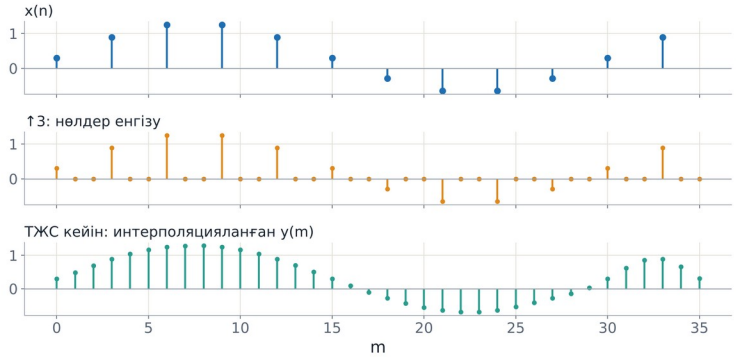
Бастапқы үлгілер өзгермейді — ТЖС тек жаңа нүктелерді толтырады.

ЗЕРТТЕУ · КӨПКЕЗЕҢДІ ДЕЦИМАЦИЯ

# 1 МГц → 20 кГц: бір кезең бе, әлде екі кезең бе?

| Құрылым | СИС реттері | Көбейту, млн/с |
|---|---|---|
| 1 кезең: ↓50 | 1812 | 36.24 |
| ↓25 · ↓2 | 166 + 74 | 8.12 |
| ↓10 · ↓5 | 46 + 183 | 8.26 |
| ↓5 · ↓10 | 21 + 364 | 11.48 |
| ↓2 · ↓25 | 9 + 907 | 22.64 |

Өткізу жолағы 8 кГц, басу 60 дБ; рет Кайзер формуласымен, көбейту = рет × шығыс жиілігі.




Қорытынды: ↓25·↓2 құрылымы есептеу көлемін 4.5 есе (36.24 → 8.12 млн/с) азайтады: бірінші кезеңде өтпелі жолақ кең болғандықтан сүзгі қысқа, ал ұзын сүзгі төмен жиілікте жұмыс істейді.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

# 3 нүктелі жылжымалы орташа сүзгі

## Шарты

y[n] = (x[n] + x[n−1] + x[n−2]) / 3. H(z), АЖС, нөлдер және ω = 0, π/2, 2π/3 нүктелердегі |H| мәнін табыңыз.

## Шешуі

1. $H(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2})/3$.

2. H(e^{jω}) = e^{−jω}(1 + 2cos ω)/3 — топтық кідіріс 1 үлгі.

3. |H(0)| = 1; |H(π/2)| = 1/3; |H(2π/3)| = 0.

4. Нөлдер: z = e^{±j2π/3} — бірлік шеңберде.

**ТЖС: тұрақты құраушыны өткізеді, fд/3 жиілікті толық басады.**

### Неге 2π/3?

1 + 2cos ω = 0 ⇒ cos ω = −½.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

# Іріктеу жиілігін өзгерту

## Шарты

а) 48 кГц → 8 кГц: M және антиалиасинг сүзгісінің кесу жиілігін табыңыз.

ә) 44.1 кГц → 48 кГц (CD → студия): L/M қатынасын табыңыз.

## Шешуі

а) M = 48/8 = 6; жаңа Найквист жиілігі 4 кГц.

Сүзгі: ωc = π/M = π/6 (≈ 4 кГц), одан кейін әр 6-шы үлгі алынады.

ә) 48000/44100 = 480/441 = 160/147.

L = 160 (нөлдер енгізу) → ТЖС ωc = π/160 → M = 147.

Аралық жиілік: 44.1·160 = 7.056 МГц.

**M = 6, ωc = π/6; L/M = 160/147 — іс жүзінде көпкезеңді немесе полифазалы құрылыммен.**

### Неліктен көпкезеңді?

7 МГц аралық жиілікте тікелей сүзу өте ауыр; полифазалы сүзгі нөлдерге көбейтуді болдырмайды.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

# Сүзу және жиілікті өзгерту: Python мен MATLAB

**Python**

```
import scipy.signal as sg
b = [1/3, 1/3, 1/3]
y = sg.lfilter(b, [1], x) # СИС
y2 = sg.lfilter([1], [1,-0.9], x) # ШИС
w, H = sg.freqz(b, 1, 512)
z, p, k = sg.tf2zpk(b, [1])
yd = sg.decimate(x, 6, ftype='fir')
yr = sg.resample_poly(x, 160, 147)
```

**MATLAB**

```
b = ones(1,3)/3;
y = filter(b, 1, x);
y2 = filter(1, [1 -0.9], x);
freqz(b, 1, 512); zplane(b, 1);
yd = decimate(x, 6, 'fir');
yi = interp(x, 4);
yr = resample(x, 160, 147);
```

resample_poly / resample полифазалы сүзгіні автоматты түрде құрады.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

# Көпжылдамдықты өңдеудің қолдану салалары

### Аудио

44.1 ↔ 48 кГц түрлендіру, сигма-дельта АЦТ-дағы децимация (64× → 1×).

### SDR және байланыс

Цифрлық төмен түрлендіргіш (DDC): CIC + жартылай жолақты сүзгілер каскады.

### Кескін және бейне

Масштабтау, ажыратымдылықты өзгерту, 4:2:0 хроманы сирету.

### Медицина және өлшеу

ЭКГ/ЭЭГ сүзгілері, датчик сигналдарын децимациялап сақтау.

### Неге көпжылдамдықты?

Өңдеуді ең төменгі жарамды жиілікте жүргізу есептеуді M есе азайтады.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

# Сүзгілерді талдау және іріктеу жиілігін өзгерту

1. СИС (жылжымалы орта) және ШИС (1-ретті) сүзгілерінің h[n], АЖС, ФЖС-ін салыңыз.
2. Нөл-полюс диаграммасын тұрғызып, тұрақтылықты тексеріңіз.
3. Сигналды M = 6 есе сиретіңіз: сүзгімен және сүзгісіз — алиасингті көрсетіңіз.
4. L = 4 интерполяция жасап, спектр кескіндерін салыстырыңыз.
5. 1 МГц → 20 кГц үшін бір және екі кезеңді құрылымдардың есептеу көлемін салыстырыңыз.

### Есепте болуы тиіс

- h[n], АЖС, ФЖС графиктері
- Нөл-полюс диаграммасы
- Алиасинг мысалы
- MAC/с салыстыру кестесі
- Қорытынды

### Қолдану салалары

Аудио ресемплинг, SDR, датчиктер, медициналық сигналдар.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

# Жылдам тест

**1. СИС сүзгісі әрқашан…**

А) тұрақты Б) рекурсивті В) сызықтық емес

**2. ШИС тұрақтылығының шарты?**

А) нөлдер |z| < 1 Б) полюстер |z| < 1 В) a > 1

**3. Децимация алдында не қажет?**

А) интерполяция Б) антиалиасинг ТЖС В) ЖЖС

**4. 3 нүктелі орта сүзгі қай жиілікті толық басады?**

А) π/2 Б) 2π/3 В) π

**5. 44.1 → 48 кГц үшін L/M?**

А) 48/44 Б) 147/160 В) 160/147 Г) 4/3

**Жауаптары: 1 — А, 2 — Б, 3 — Б, 4 — Б, 5 — В**

ҚОРЫТЫНДЫ

# Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Сызықтық стационар жүйе h[n] немесе H(z) арқылы толық сипатталады; $y = x * h$.

02 СИС әрқашан тұрақты және сызықтық фазалы бола алады; ШИС аз ретпен тік АЖС береді.

03 Децимацияда алдымен сүзу, сосын сирету; интерполяцияда нөлдер енгізу, сосын сүзу.

04 1 МГц → 20 кГц: екі кезеңді құрылым ($\downarrow 25 \cdot \downarrow 2$) бір кезеңдіден ≈ 4.5 есе үнемді (8.1 / 36.2 млн МАС/с).

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

# Қазақша — орысша — ағылшынша

| Қазақша | Русский | English |
|---|---|---|
| Сызықтық дискретті жүйе | линейная дискретная система | linear discrete-time system |
| Айырымдық теңдеу | разностное уравнение | difference equation |
| Беріліс функциясы | передаточная функция | transfer function |
| Рекурсивті сүзгі | рекурсивный фильтр | recursive (IIR) filter |
| Децимация | децимация (прореживание) | decimation (downsampling) |
| Интерполяция | интерполяция | interpolation (upsampling) |
| Полифазалы сүзгі | полифазный фильтр | polyphase filter |

БЕКІТУ · 7-ДӘРІС

# Бақылау сұрақтары

1. СДЖ-нің негізгі элементтерін атаңыз.
2. Ығысу-инварианттылық қасиеті нені білдіреді?
3. Рекурсивті және рекурсивті емес сүзгілердің айырмашылығы неде?
4. Биквадраттық блок не үшін қолданылады?
5. Децимация кезінде қандай қателік пайда болады, оны қалай болдырмайды?
6. Интерполятордың жұмысы қалай орындалады?
7. Көпкезеңді құрылым неліктен тиімді?