ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

8-дәріс

Цифрлық сигналды өңдеудегі кванттау эффектілері

Тұрақты және жылжымалы нүкте · қосымша код · дөңгелектеу мен кесу · кванттау шуы · СШҚ = 6.02b + 1.76 дБ

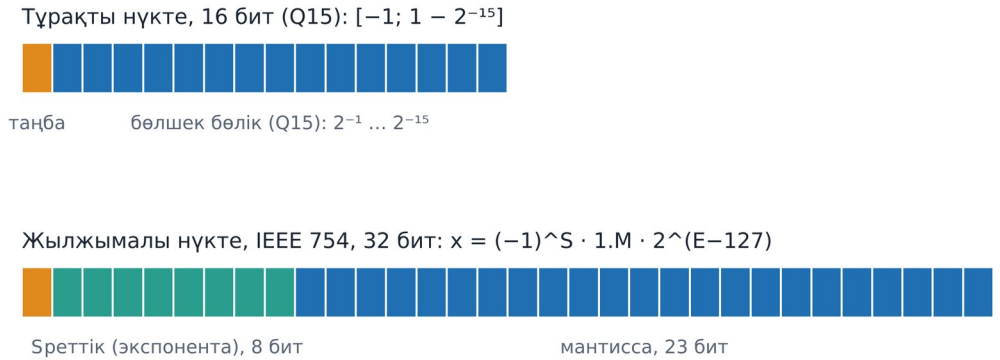
Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

Шектеулі разрядтылықтың салдарын бағалау: сандарды бейнелеу формалары, кванттау қатесінің статистикасы және оның сигнал/шу қатынасына әсері.

1. Тұрақты және жылжымалы нүкте, қосымша код
2. Кванттау әдістері: дөңгелектеу және кесу
3. Қатенің орташа мәні, дисперсиясы, ықтималдық таралуы
4. Кванттаудың сигнал/шу қатынасына әсері — модельдеу

Тұрақты және жылжымалы нүкте



Формат	Диапазон	Қадам / дәлдік	Ерекшелігі
Q15, 16 бит	$[-1;\ 1-2^{-15}]$	$q = 2^{-15} \approx 3\cdot10^{-5}$	толып кету қаупі
IEEE 754, 32 бит	$\approx \pm 3.4\cdot10^{38}$	салыстырмалы 2^{-23}	кең динамикалық диапазон

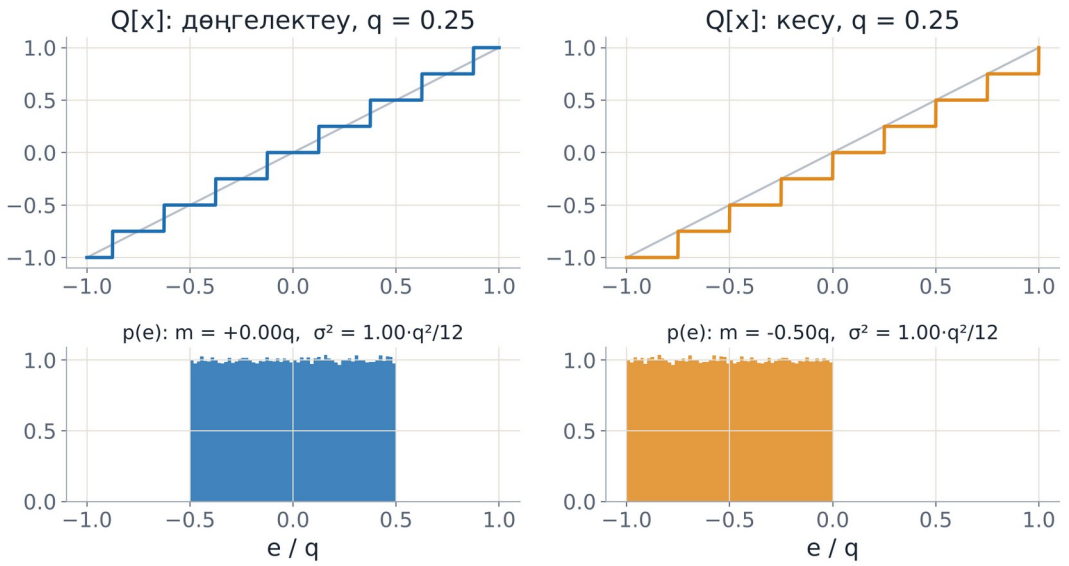
Дөңгелектеу мен кесу: бірдей дисперсия, әртүрлі ығысу

Дөңгелектеу: $-q/2 \le e < q/2, \quad m_e = 0, \quad \sigma_e^2 = q^2/12$

Кесу (қосымша код): $-q < e \le 0, \quad m_e = -q/2, \quad \sigma_e^2 = q^2/12$

$q = 2^{-b}$ (b — бөлшек разрядтар саны)

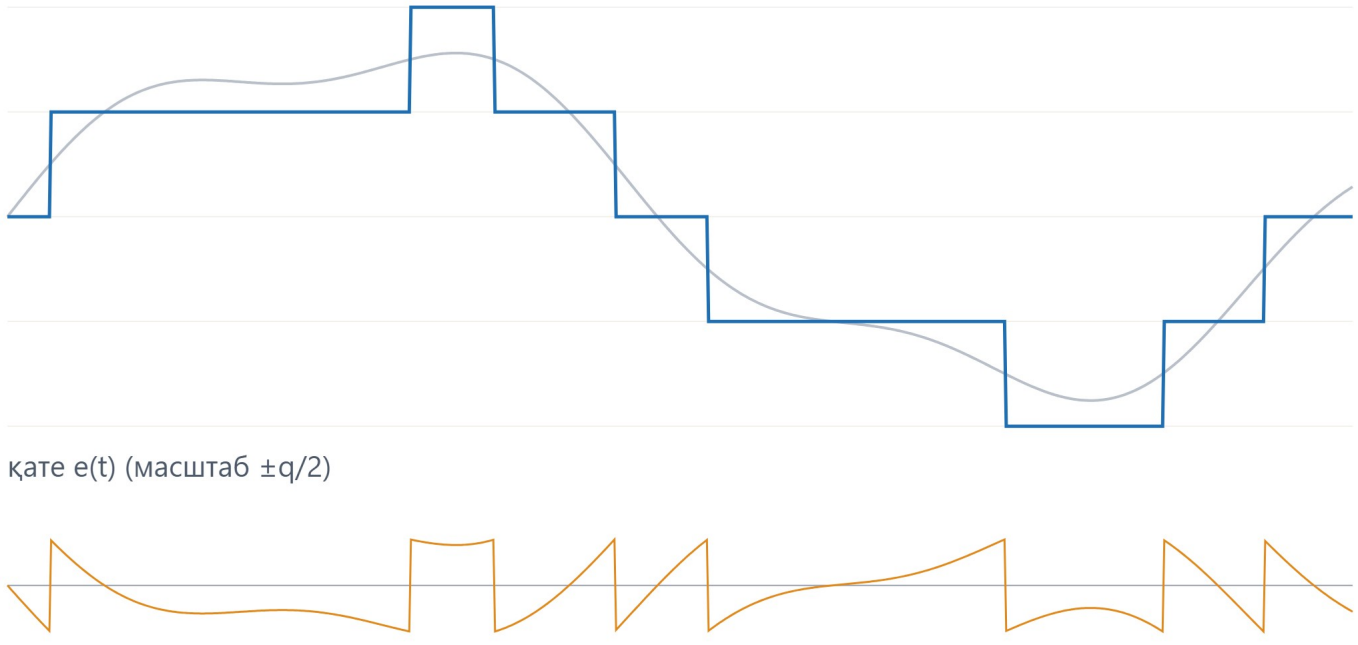
СШҚ $= 10\lg \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 6.02\,b + 10.8 + 10\lg \sigma_x^2$ дБ



Модельдеу (200 000 үлгі): қате біркелкі таралған; дөңгелектеуде m = 0, кесуде m = −q/2, екеуінде де $\sigma^2 = q^2/12$ — аддитивті ақ шу моделі расталды.

АНИМАЦИЯ · РАЗРЯДТЫЛЫҚ

Әр бит СШҚ-ны шамамен 6 дБ-ге арттырады



Не көрінеді

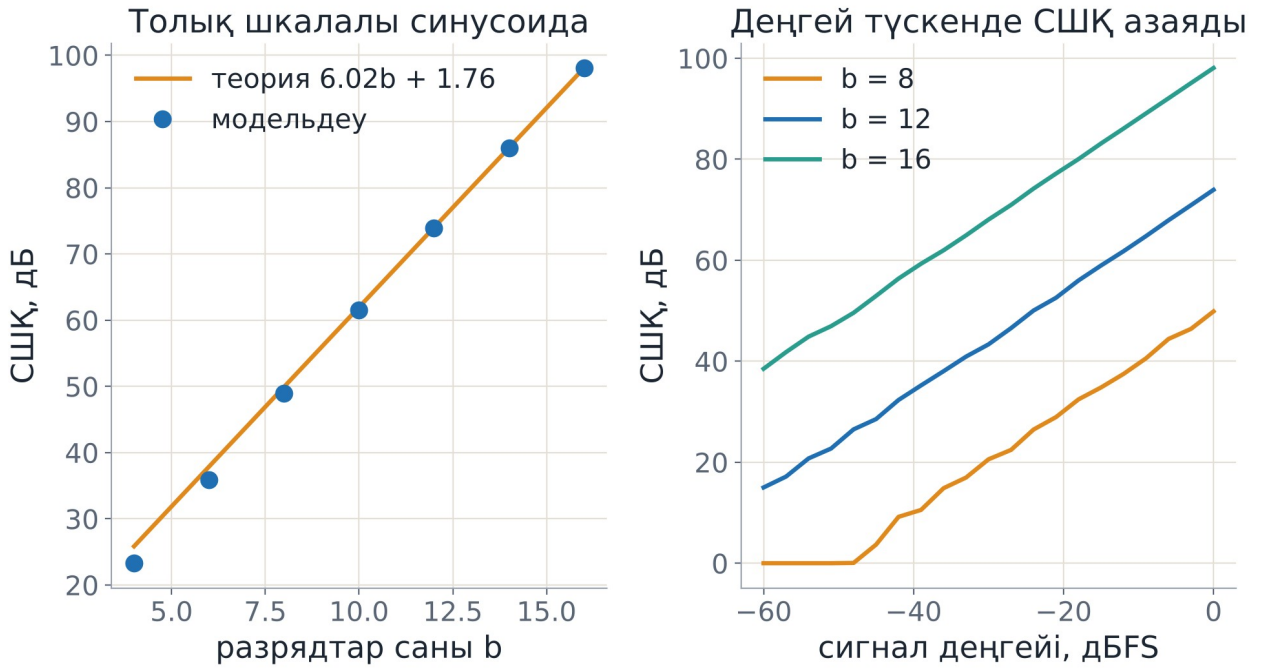
b = 2…8 бит: көк — квантталған сигнал, төменде — ±q/2 масштабтағы қате.

Байқаңыз

Аз разрядта қате сигналмен корреляцияланған; b өскенде ол «шу тәрізді» болады.

Теория мен эксперимент: 6.02b + 1.76 дБ

b	Теория, дБ	Модель, дБ
4	25.84	23.29
6	37.88	35.92
8	49.92	48.99
10	61.96	61.52
12	74.00	73.90
14	86.04	86.04
16	98.08	98.09

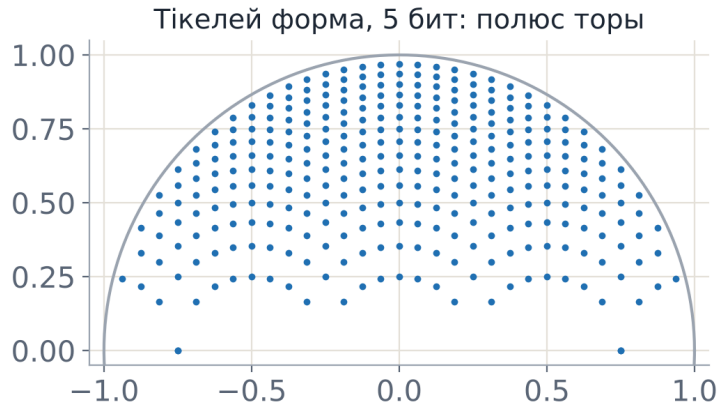


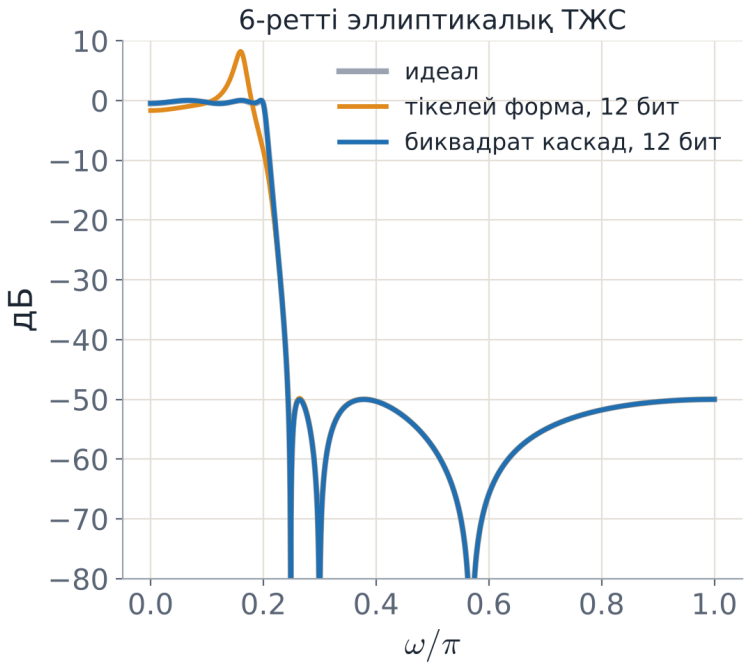
Қорытынды: b ≥ 10 кезінде модель теориямен 0.5 дБ дәлдікпен сәйкес; деңгей 20 дБ түссе, СШҚ де 20 дБ азаяды — масштабтаудың маңызы осында.

Цифрлық сүзгідегі қатенің төрт көзі

Ұғым	Мағынасы
Кванттау қадамы q	$q = 2^{-(b-1)}$ — b биттік бөлшек сан үшін (Q-формат)
АЦТ кванттау шуы	біркелкі үлестірілген, $\sigma^2 = q^2/12$
Көбейтіндіні дөңгелектеу	әр көбейткіштен кейін қосымша шу көзі
Коэффициенттерді кванттау	АЖС-ті және полюстердің орнын өзгертеді (детерминделген қате)
СШҚ	6.02·b + 1.76 дБ (толық шкаладағы синус)
Шудың күшеюі	$\sigma^2_{шығ} = \sigma^2 \cdot \Sigma h^2(n)$ — сүзгінің шу коэффициенті

Коэффициенттерді кванттау полюстерді жылжытады





Полюстер торы

Тікелей формада полюстер $z = \pm 1$ маңында сирек — тар жолақты ТЖС полюстері ығысып кетеді.

Каскад

Жоғары ретті сүзгіні 2-ретті буындарға бөлгенде әр полюс тек өз буынының 2 коэффициентіне тәуелді.

Себебі: полюстердің коэффициенттерге сезімталдығы $\partial p_i / \partial a_k \sim 1 / \prod |p_i - p_j|$: полюстер жақын орналасса, сезімталдық күрт өседі.

ЗЕРТТЕУ · САНДЫҚ ЭКСПЕРИМЕНТ

Тікелей форма мен биквадрат каскадты салыстыру

Бит	Тікелей: max|p|	Тікелей: АЖС қатесі, дБ	Каскад: max|p|	Каскад: АЖС қатесі, дБ
8	1.177 — тұрақсыз	—	0.968	2.10
10	1.083 — тұрақсыз	—	0.976	0.39
12	0.969	8.23	0.974	0.12
16	0.976	0.38	0.975	0.008

Әдістеме

6-ретті эллиптикалық ТЖС (0.5 дБ, 50 дБ, ωc = 0.2π); бөлім коэффициенттері b бит, бүтін бөлігі үшін 2 бит; өткізу жолағындағы ең үлкен АЖС ауытқуы.

Қорытынды

Тікелей форма 10 битте де тұрақсыз; каскадта 8 бит жеткілікті, 16 битте қате 0.008 дБ — 50 есе дәлірек.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

Сандарды бейнелеу форматтарын салыстыру

Формат	Ауқым	Қадам / дәлдік	СШҚ (шамамен)
Q15 (16 бит)	[−1, 1)	$3.05 \cdot 10^{-5}$	≈ 98 дБ
Q31 (32 бит)	[−1, 1)	$4.66 \cdot 10^{-10}$	≈ 194 дБ
half (IEEE, 16 бит)	±65504	салыстырмалы $9.8 \cdot 10^{-4}$	≈ 66 дБ (мантисса)
single (IEEE, 32 бит)	$\pm 3.4 \cdot 10^{38}$	салыстырмалы $6 \cdot 10^{-8}$	≈ 150 дБ (мантисса)
Блоктық өзгермелі нүкте	блок экспонентасы	блокқа тәуелді	тұрақты нүктеден жоғары

Ымыра: тұрақты нүкте — арзан, аз қуатты, бірақ масштабтау қажет; өзгермелі нүкте — масштабтаусыз, кең ауқым, кристалл ауданы мен қуаты көп.

Кванттау шуы рекурсивті сүзгіде қалай күшейеді?

Шудың сүзгі арқылы өтуі

Әр дөңгелектеу — дисперсиясы $\sigma^2 = q^2/12$ ақ шу көзі.

Шығыстағы шу: $\sigma^2_{шығ} = \sigma^2 \cdot \Sigma\, h^2(n)$, $h(n)$ — шу көзінен шығысқа дейінгі импульстік сипаттама.

ШИС-те кері байланыс шуды күшейтеді.

Мысал: $y(n) = x(n) + a \cdot y(n-1)$

$h(n) = a^n \Rightarrow \Sigma h^2 = 1/(1 - a^2)$.

$a = 0.9$: $\Sigma h^2 = 5.26 \Rightarrow$ шу +7.2 дБ.

$a = 0.99$: $\Sigma h^2 = 50.3 \Rightarrow$ шу +17 дБ ($\approx$ 3 бит жоғалады).

Қорытынды: полюс бірлік шеңберге неғұрлым жақын болса, кванттау шуы соғұрлым көп күшейеді — тар жолақты ШИС сүзгілер үшін қосымша 2–4 бит қажет.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

АЦТ-ның сигнал/шу қатынасы

Шарты

12 биттік АЦТ. Толық шкаладағы синус және деңгейі −20 дБ төмен синус үшін СШҚ-ны табыңыз. 90 дБ СШҚ үшін неше бит керек?

Шешуі

1. СШҚ = 6.02·b + 1.76 = 6.02·12 + 1.76 = 74.0 дБ.

2. Сигнал −20 дБ төмен: 74.0 − 20 = 54.0 дБ (шу деңгейі өзгермейді).

3. 90 дБ үшін: b = (90 − 1.76)/6.02 = 14.7 ⇒ 15 бит.

4. Зерттеуде (a06) 12 бит үшін өлшенген СШҚ — 73.9 дБ.

74.0 дБ; −20 дБ сигналда 54.0 дБ; 90 дБ үшін кемінде 15 бит (іс жүзінде 16 бит АЦТ).

Бас қор

Толып кетпеу үшін сигналды 6–12 дБ төмен ұстайды — СШҚ сонша азаяды.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Q15 форматындағы кванттау

Шарты

0.3 және −0.75 сандарын Q15 (16 бит) форматында дөңгелектеумен бейнелеңіз; кванттау қатесін бағалаңыз.

Шешуі

1. $q = 2^{-15} = 3.05 \cdot 10^{-5}$.

2. $0.3 \cdot 32768 = 9830.4 \rightarrow 9830 = 0x2666$; қайта: 0.29999 (қате $1.2 \cdot 10^{-5} \le q/2$).

3. $-0.75 \cdot 32768 = -24576 \rightarrow$ қосымша кодта 0xA000; қате 0 (дәл бейнеленеді).

4. Дөңгелектеу қатесі $|e| \le q/2 = 1.53 \cdot 10^{-5}$, $\sigma = q/\sqrt{12} = 8.8 \cdot 10^{-6}$.

0.3 → 0x2666 (қате $1.2 \cdot 10^{-5}$); −0.75 → 0xA000 (қатесіз).

Ереже

Екінің дәрежелерінің қосындысы болатын сандар қатесіз бейнеленеді.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

Кванттау эффектілерін модельдеу

Python

```
def quant(x, b, mode='round'):
s = 2**(b-1)
f = np.round if mode=='round' else np.floor
return np.clip(f(x*s), -s, s-1)/s
e = quant(x, 12) - x
snr = 10*np.log10(np.var(x)/np.var(e))
sos = sg.ellip(6, .5, 50, .2, output='sos')
b, a = sg.ellip(6, .5, 50, .2)
p = np.roots(quant(a/4, 10)*4) # тұрақты ма?
print(np.max(np.abs(p)))
```

MATLAB

```
xq = round(x*2^11)/2^11; % 12 бит
snr = 10*log10(var(x)/var(xq-x));
[b,a] = ellip(6, 0.5, 50, 0.2);
aq = round(a*2^7)/2^7; % 10 бит
max(abs(roots(aq)))
sos = tf2sos(b, a);
Hq = dfilt.df2sos(sos);
Hq.Arithmetic = 'fixed';
fvtool(Hq)
```

dfilt + Arithmetic='fixed' тікелей және каскадты құрылымдарды бит-дәл салыстыруға мүмкіндік береді.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Кванттау эффектілері практикада қай жерде маңызды?

АЦТ таңдау

Аудио 24 бит (144 дБ), байланыс 12–16 бит, радар 8–14 бит — қажетті СШҚ бойынша.

ССӨП сүзгілері

16 бит деректер, 32–40 бит аккумулятор; ШИС — тек биквадрат каскад.

FPGA / ASIC

Әр түйіннің разрядтылығын азайту — аудан мен қуат үнемі.

Машиналық оқыту

Нейрожелілерді INT8/INT4 кванттау — сол шу моделі қолданылады.

Негізгі ереже

Әр бит = 6 дБ: қажетті СШҚ + бас қор + шудың күшеюі = разрядтылық.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Кванттау эффектілерін тәжірибелік зерттеу

1. Синусты b = 4…16 битпен кванттап, СШҚ-ны өлшеңіз және 6.02b + 1.76 формуласымен салыстырыңыз.
2. Дөңгелектеу мен кесу қателерінің гистограммасын, орта мәнін және дисперсиясын табыңыз.
3. Эллиптикалық ТЖС-тің коэффициенттерін 8…16 битпен кванттап, тұрақтылығын тексеріңіз.
4. Тікелей форма мен биквадрат каскадтың АЖС-ін салыстырыңыз.
5. 1-ретті ШИС-тің шығыс шуын өлшеп, $\sigma^2 \cdot \Sigma h^2$ формуласымен салыстырыңыз.

Есепте болуы тиіс

- СШҚ(b) кестесі мен графигі
- Қате гистограммалары
- Полюс диаграммалары
- АЖС салыстыруы
- Қорытынды

Қолдану салалары

АЦТ/ЦАТ таңдау, ССӨП бағдарламалау, FPGA сүзгілері.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. Әр қосымша бит СШҚ-ны қаншаға арттырады?

А) 3 дБ Б) 6 дБ В) 10 дБ

2. Кванттау шуының дисперсиясы?

А) $q/2$ Б) $q^2/12$ В) $q^2/2$

3. Кесудің дөңгелектеуден айырмашылығы?

А) дисперсия үлкен Б) орта мәні $-q/2$ ығысады В) айырмашылық жоқ

4. Жоғары ретті ШИС-ті қалай іске асырған жөн?

А) тікелей форма Б) биквадрат каскад В) бір буын

5. a = 0.9 бірінші ретті ШИС шуды қанша күшейтеді?

А) 0.9 Б) 1.9 В) 5.26 Г) 10

Жауаптары: 1 — Б, 2 — Б, 3 — Б, 4 — Б, 5 — В

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Кванттау шуы $\sigma^2 = q^2/12$; СШҚ = 6.02·b + 1.76 дБ — 12 битте 74 дБ (өлшенгені 73.9 дБ).

02 Кесу дөңгелектеумен бірдей дисперсия береді, бірақ $-q/2$ тұрақты ығысу қосады.

03 Коэффициенттерді кванттау полюстерді жылжытады: 6-ретті ТЖС тікелей формада 10 битте тұрақсыз, каскадта 8 бит жеткілікті.

04 ШИС кері байланысы шуды Σh^2 есе күшейтеді (a = 0.9 — 7.2 дБ).

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Кванттау қадамы	шаг квантования	quantization step
Кванттау шуы	шум квантования	quantization noise
Дөңгелектеу / кесу	округление / усечение	rounding / truncation
Тұрақты нүкте	фиксированная точка	fixed point
Сигнал/шу қатынасы	отношение сигнал/шум	signal-to-noise ratio (SNR)
Коэффициенттер сезімталдығы	чувствительность к коэффициентам	coefficient sensitivity
Биквадрат каскад	каскад биквадратных звеньев	cascade of biquads (SOS)

БЕКІТУ · 8-ДӘРІС

Бақылау сұрақтары

1. Тұрақты және жылжымалы нүкте формаларының айырмашылығы неде?
2. Қосымша кодтың артықшылығы неде?
3. Дөңгелектеу мен кесудің айырмашылығы неде?
4. Кванттау қатесі қандай ықтималдық заңына бағынады?
5. Қатенің орташа мәні мен дисперсиясы қалай анықталады?
6. Разряд санының артуы СШҚ-ға қалай әсер етеді?