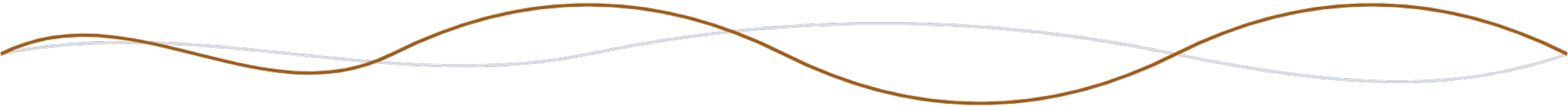
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

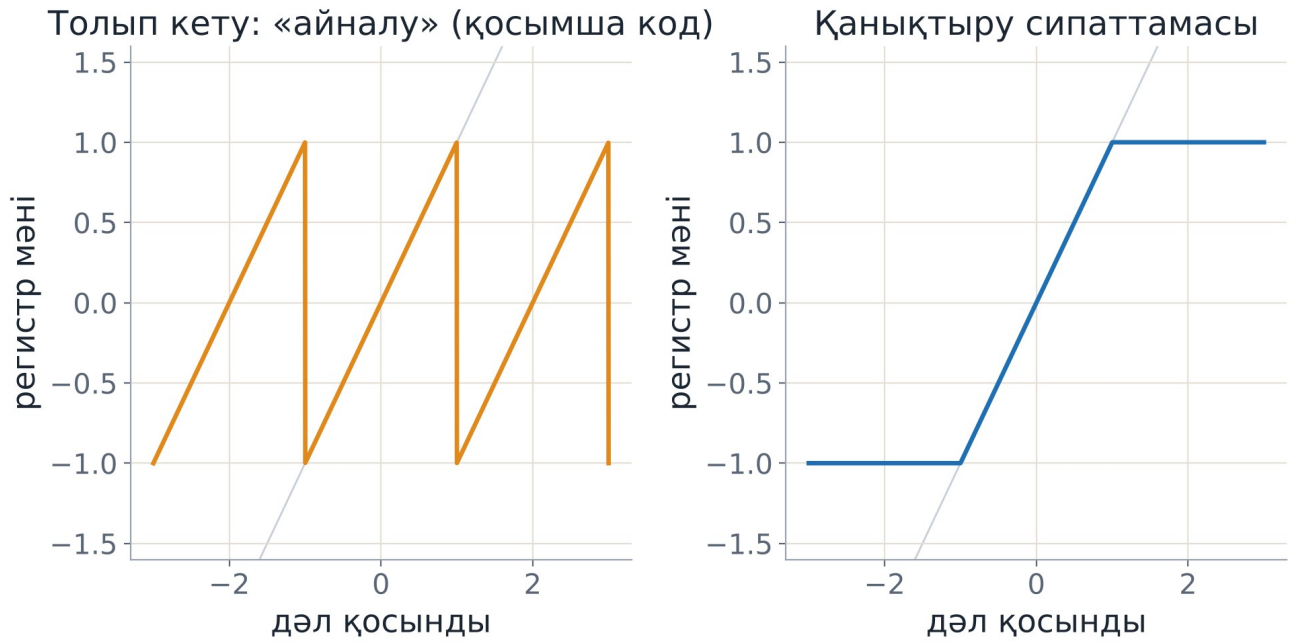
9-дәріс

Цифрлық сүзгілерде кванттау және масштабтау

Толып кету мен қанықтыру · шекті циклдер · L1, L2, L∞ нормалары · ЖФТ масштабтау · көпөлшемді сигналдар



Қосымша кодтағы «айналу» және қанықтыру



Айналу қаупі

Үлкен оң сан теріс болып шығады — ШИС сүзгісінде үлкен амплитудалы тербеліс тудырады.

Қанықтыру

Нәтиже шекті мәнмен шектеледі: қате шектеулі, толып кету тербелісі жойылады. ССӨП-та аппараттық түрде бар.

Дәрістің негізгі ұғымдары

Ұғым	Мағынасы
Толып кету	Нәтиже сөз разрядтылығының ауқымынан шығуы
Қанықтыру	Толған нәтижені ±max мәнге шектеу
Шекті цикл	Нөлдік кірісте дөңгелектеуден туатын сөнбейтін тербеліс
Өлі аймақ	Шығыс «қатып» қалатын $\|y\| \le (q/2)/(1 - \|a\|)$ аймағы
Масштабтау	Ішкі түйіндерде толып кетпеу үшін сигналды $s < 1$ есе кішірейту
Норма (L1, L2, L∞)	Масштабтау коэффициентін есептеудің шарты

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Q15 форматындағы толып кету

Шарты

Q15 (16 бит, 1 = 32768). a = 0.75, b = 0.5. a + b қосындысын қосымша кодта «айналумен» және қанықтырумен есептеңіз.

Шешуі

1. a = 24576, b = 16384; қосынды 40960 > 32767.

2. Айналу: 40960 − 65536 = −24576 ⇒ −0.75 (таңбасы ауысты!).

3. Қанықтыру: 32767 ⇒ 0.99997.

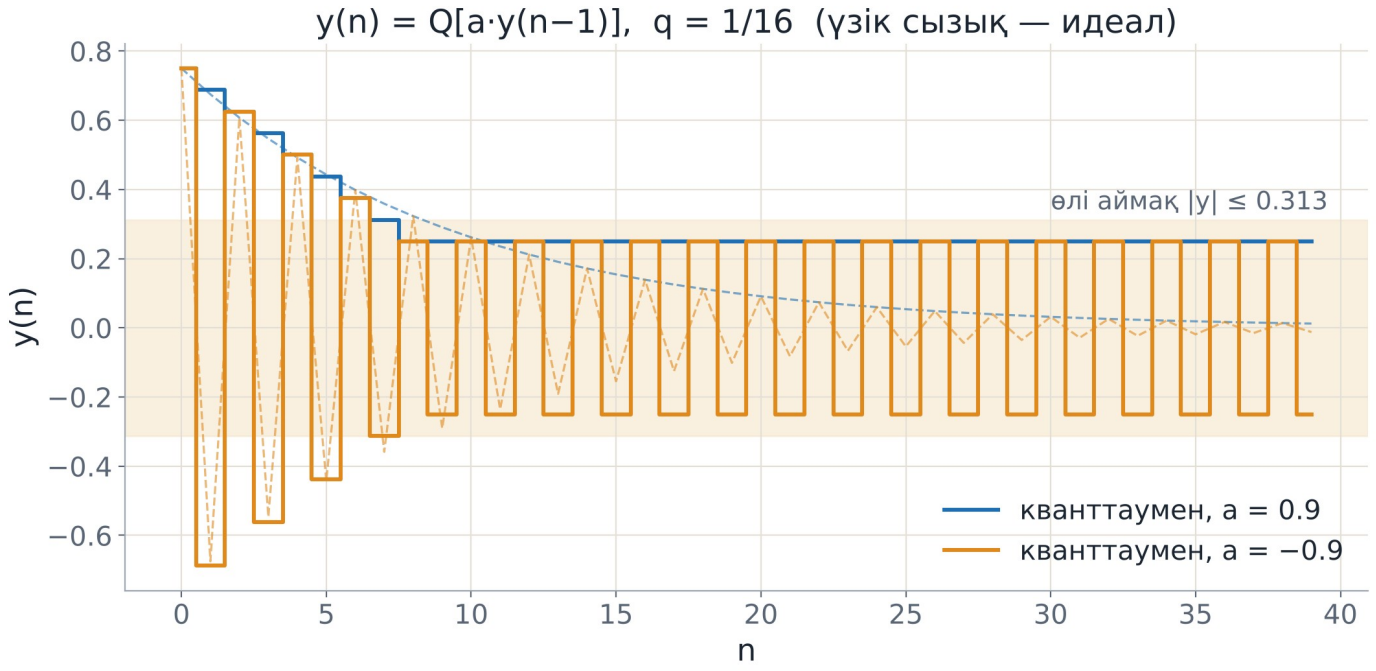
4. Қате: айналуда 2.0, қанықтыруда 0.25.

Айналу −0.75 береді (қате 2.0), қанықтыру 0.99997 (қате 0.25) — сондықтан ССӨП-та қанықтыру режимі қосылады.

Ескерту

Аралық нәтиже толса да, соңғы қосынды ауқымда болса — айналу дұрыс нәтиже береді (қосымша кодтың қасиеті).

Дөңгелектеу сүзгіні «өлі аймақта» ұстап қалады



a = 0.9

Шығыс нөлге жетпей, 0.25 деңгейінде «қатып» қалады.

a = −0.9

±0.25 арасындағы сөнбейтін тербеліс — шекті цикл.

Өлі аймақ

$|y| \le (q/2)/(1 - |a|) = 0.3125$ ($q = 1/16$).

Шекті циклдердің екі түрі және оларды жою

Гранулалық шекті циклдер

Себебі — көбейтіндіні дөңгелектеу (кіші амплитуда, ~q).

Шығыс тұрақты деңгейде немесе ±k тербелісте қатып қалады.

Шекара: $|y| \le (q/2)/(1 - |a|)$.

Толып кету тербелістері

Себебі — қосымша кодтағы айналу (үлкен амплитуда, толық шкала).

Кіріс жойылса да жалғаса береді.

Өте қауіпті: шығыс толығымен бұзылады.

Жою тәсілдері

Қанықтыру арифметикасы — толып кету тербелістерін жояды.

Модуль бойынша кесу (magnitude truncation), қатені кері байланыспен тасымалдау (error feedback).

Толқындық сандық сүзгілер, күй кеңістігі құрылымдары, разрядтылықты арттыру.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Бірінші ретті сүзгідегі шекті цикл

Шарты

$y[n] = Q[0.9 \cdot y[n-1]]$, Q — бүтінге дейін дөңгелектеу (0.5 жоғары қарай), $y[0] = 10$. Шығыс тізбегін табыңыз. $a = -0.9$ болса не болады?

Шешуі

1. $0.9 \cdot 10 = 9 \to 9$; $8.1 \to 8$; $7.2 \to 7$; $6.3 \to 6$; $5.4 \to 5$.

2. $0.9 \cdot 5 = 4.5 \to 5$: шығыс 5 деңгейінде қатып қалады.

3. Өлі аймақ шекарасы: $0.5/(1 - 0.9) = 5$ — сәйкес.

4. $a = -0.9$: $-9, 8, -7, 6, -5, 5, -5, \ldots$ — ± 5 тербеліс.

Нөлге сөнудің орнына $y = 5$ ($a = 0.9$) немесе ± 5 тербеліс ($a = -0.9$) — шекті цикл.

Неге?

$|a \cdot y| - |y| < q/2$ болғанда дөңгелектеу мәнді өзгертпейді: сүзгі энергия жоғалтпайды.

Масштабтау коэффициентін нормалар бойынша таңдау

$$|y(n)| \le \sum_k |h(k)| \cdot \max|x| \;\Rightarrow\; s_1 = 1/\|h\|_1$$

$$\|h\|_2 = \sqrt{\sum_k h^2(k)} \;\Rightarrow\; s_2 = 1/\|h\|_2$$

$$\|H\|_\infty = \max_\omega |H(e^{j\omega})| \;\Rightarrow\; s_\infty = 1/\|H\|_\infty$$

$$\|h\|_2 \le \|H\|_\infty \le \|h\|_1, \qquad s = 2^{-m}$$

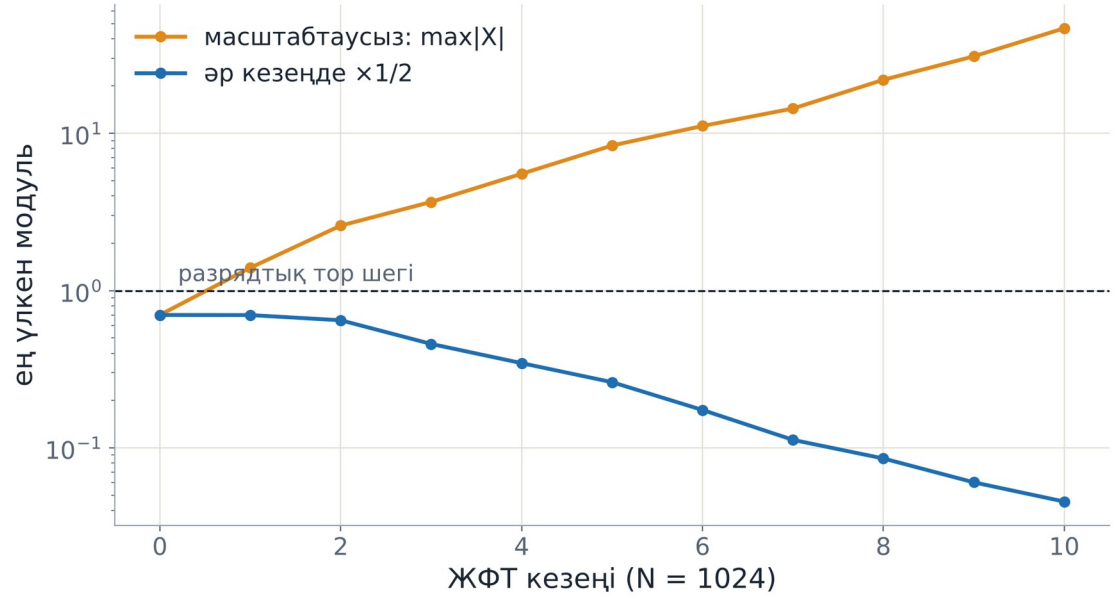
Мысал: 4-ретті эллиптикалық ТЖС (0.5 дБ, 40 дБ, ωc = 0.2π) — есептеу нәтижесі

Норма	Мәні	s	Ығысу m
L1	1.814	0.551	1
L∞ (Чебышев)	1.000	1.000	0
L2	0.453	2.209	0

Ымыра

L1 толып кетуді толық болдырмайды, бірақ СШҚ-ны 1 битке (≈ 6 дБ) азайтады; L2 мен L∞ — ықтималдық тұрғыдан қауіпсіз, СШҚ жоғары.

Кіріс бойынша ма, әр кезеңде ме?



N	Кіріс ×1/N	Кезеңде ×1/2
64	54.6 дБ	67.2 дБ
256	42.4 дБ	60.9 дБ
1024	30.3 дБ	54.8 дБ

Шығыс СШҚ, 16 биттік тұрақты нүктелі ЖФТ моделі.

Қорытынды: модуль әр кезеңде ≤ 2 есе өседі; кезеңдік ×1/2 масштабтау N = 1024 үшін СШҚ-ны 24.5 дБ-ге (≈ 4 бит) жақсартады, себебі сигнал разрядтық торды толық пайдаланады.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

Толып кетумен күресу әдістерін салыстыру

Әдіс	Артықшылығы	Кемшілігі
Айналу (wrap-around)	аппараттық тегін	үлкен тербеліс, тек аралық нәтижеге
Қанықтыру	тербелісті жояды	қосымша логика, сызықтық емес бұрмалану
Кіріс масштабтау (L1)	толып кетуге кепілдік	СШҚ ең көп жоғалады
L2 / L∞ масштабтау	СШҚ жақсырақ	сирек толып кетуге жол береді
Қорғаныс биттері	қарапайым	аккумулятор кеңейеді (8 бит)
Блоктық өзгермелі нүкте	динамикалық диапазон кең	экспонента өңдеу қажет

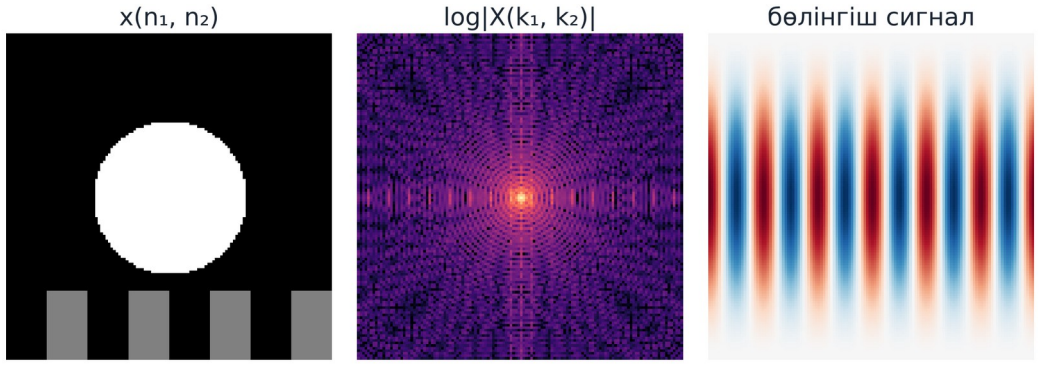
Практикада: ШИС сүзгілерде — қанықтыру + L2/L∞ масштабтау; ЖФТ-да — әр кезеңде 1/2-ге масштабтау немесе блоктық өзгермелі нүкте.

Екі өлшемді конволюция және 2D ДФТ

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1, k_2)\, x(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2)\, W_{N_1}^{n_1 k_1} W_{N_2}^{n_2 k_2}$$

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1)\, x_2(n_2) \;\Rightarrow\; X = X_1(k_1)\, X_2(k_2)$$



Бөлінгіштік: 2D ДФТ жолдар бойынша, сосын бағандар бойынша 1D ЖФТ-мен есептеледі — N×N кескін үшін $2N \cdot (N/2)\log_2 N$ көбейту.

2D сүзудің есептеу көлемі мен разрядтылығы

Әдіс (512×512 кескін, 7×7 ядро)	Көбейту саны	Салыстыру
Тікелей 2D конволюция	$512^2 \cdot 49 \approx 12.8$ млн	1×
Бөлінгіш ядро (жол + баған)	$512^2 \cdot 14 \approx 3.7$ млн	3.5× аз
2D ЖФТ (1024×1024 нөлмен)	$\approx 3 \cdot N^2 \cdot \log_2 N \approx 31$ млн	ұзын ядро үшін

Бөлінгіштік

$h(n_1,n_2) = h_1(n_1) \cdot h_2(n_2)$ болса, 2D сүзу екі 1D сүзуге бөлінеді: P^2 орнына $2P$ көбейту.

2D-дегі кванттау

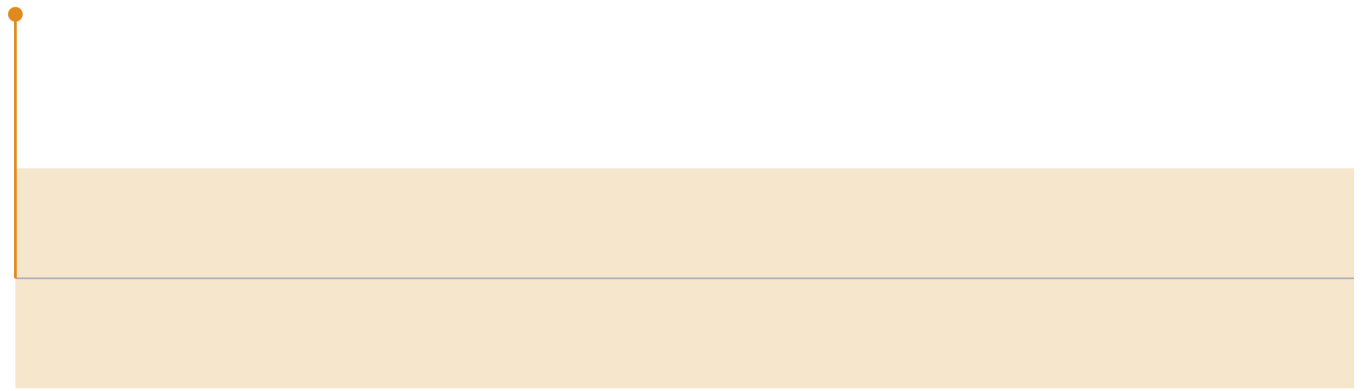
Әр пиксель 8 бит: аралық конволюция нәтижесі $8 + 8 + \log_2 49 \approx 22$ бит — аккумулятор кемінде 24 бит болуы керек.

Қорытынды

Кіші ядрода — тікелей/бөлінгіш, үлкен ядрода — 2D ЖФТ.

АНИМАЦИЯ · ШЕКТІ ЦИКЛ

Идеал сүзгі мен кванттаушы сүзгіні қатар бақылау



сұр — идеал (сөнеді), қызғылт сары — дөңгелектеумен; жолақ — өлі аймақ

Не көрінеді

Кіріс жоқ, бастапқы шарт 0.75; a = 0.9 және a = −0.9 кезектесіп көрсетіледі.

Жою жолдары

Разрядтылықты арттыру, нөлге қарай кесу (magnitude truncation), кездейсоқ дөңгелектеу (dither).

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

Толып кету мен шекті циклді модельдеу

Python

```
def q(x, b=16): # Q(b-1)
s = 2**(b-1)
return np.round(x*s)/s
def sat(x): return np.clip(x, -1, 1-2**-15)
def wrap(x): return (x+1) % 2 - 1
y = 10.0; out = []
for n in range(20):
y = np.round(0.9*y) # шекті цикл
out.append(y)
sos = sg.tf2sos(b, a) # каскад
L1 = np.sum(np.abs(h)); L2 = np.sqrt(np.sum(h**2))
```

MATLAB

```
T = numerictype(1,16,15);
F = fimath('OverflowAction','Saturate', ...
'RoundingMethod','Nearest');
x = fi(0.75, T, F) + fi(0.5, T, F)
y = 10; for n=1:20, y = round(0.9*y); end
[sos,g] = tf2sos(b, a);
h = impz(b, a, 1000);
s1 = 1/sum(abs(h)); % L1
s2 = 1/norm(h); % L2
```

Fixed-Point Designer (fi, fimath) — қанықтыру мен дөңгелектеу режимдерін дәл модельдейді.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Тұрақты нүктелі сүзгідегі эффектілерді зерттеу

1. 2-ретті ШИС-ті Q15 форматында айналу және қанықтыру режимдерімен модельдеңіз.
2. Нөлдік кірісте шекті циклді тауып, өлі аймақ шекарасымен салыстырыңыз.
3. L1, L2, L∞ нормалары бойынша масштабтау коэффициенттерін есептеңіз.
4. Әр масштабтаудағы шығыс СШҚ мен толып кету жиілігін өлшеңіз.
5. N = 64…1024 ЖФТ-да кіріс және әр кезеңдегі масштабтауды салыстырыңыз.

Есепте болуы тиіс

- Толып кету мысалдары
- Шекті цикл графиктері
- Нормалар кестесі
- СШҚ салыстыру
- Қорытынды

Қолдану салалары

Аудио ССӨП, байланыс модемдері, FPGA сүзгілері, бейне өңдеу.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. Қосымша кодта 0.75 + 0.5 (Q15, айналу) = ?

А) 1.25 Б) −0.75 В) 0.99997

2. Шекті циклдің себебі?

А) дөңгелектеу Б) іріктеу В) алиасинг

3. Толып кетуге кепілдік беретін норма?

А) L2 Б) L∞ В) L1

4. a = 0.9, q = 1: өлі аймақ шекарасы?

А) 0.5 Б) 5 В) 10

5. Бөлінгіш 7×7 ядрода бір пикселге көбейту саны?

А) 49 Б) 14 В) 7 Г) 98

Жауаптары: 1 — Б, 2 — А, 3 — В, 4 — Б, 5 — Б

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Толып кету қосымша кодта таңбаны ауыстырады; қанықтыру қатені шектеп, тербелістерді жояды.

02 Шекті циклдер дөңгелектеуден туады: 1-ретті сүзгіде өлі аймақ $|y| \le (q/2)/(1 - |a|)$.

03 L1 масштабтау толып кетуге кепілдік береді, бірақ СШҚ-ны көбірек жоғалтады; L2 мен L∞ — ымыра.

04 ЖФТ-да әр кезеңде масштабтау N = 1024 үшін СШҚ-ны 30.3-тен 54.8 дБ-ге дейін жақсартады.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Толып кету	переполнение	overflow
Қанықтыру арифметикасы	арифметика с насыщением	saturation arithmetic
Шекті цикл	предельный цикл	limit cycle
Өлі аймақ	мёртвая зона	dead band
Масштабтау	масштабирование	scaling
Қосымша код	дополнительный код	two’s complement
Блоктық өзгермелі нүкте	блочная плавающая точка	block floating point

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Шекті разрядтылық эффектілері қайда маңызды?

Аудио

24 бит ССӨП-тағы эквалайзерлер: биквадраттар каскады + қанықтыру.

Байланыс

OFDM модемдеріндегі тұрақты нүктелі ЖФТ: блоктық өзгермелі нүкте.

FPGA

Разрядтылықты әр түйінде оңтайлау — аудан мен қуатты үнемдейді.

Кескін және бейне

8 бит пиксельдер, 2D сүзгілер мен ДКТ — 16…24 бит аккумулятор.

Неге маңызды?

Дұрыс масштабталмаған сүзгі тұрақсыз болып, жүйені толығымен істен шығаруы мүмкін.

БЕКІТУ · 9-ДӘРІС

Бақылау сұрақтары

1. Қосу кезінде толып кету қандай жағдайда пайда болады?
2. Қанықтыру сипаттамасы бар қосқыштың артықшылығы неде?
3. Шекті цикл дегеніміз не және ол қашан туындайды?
4. Масштабтау коэффициентін таңдауда қандай нормалар қолданылады?
5. Коэффициентті екінің дәрежесі етіп алу не үшін ыңғайлы?
6. ЖФТ-да әр кезеңде неге 2 есе масштабтайды?
7. 2D ДФТ қалай есептеледі?