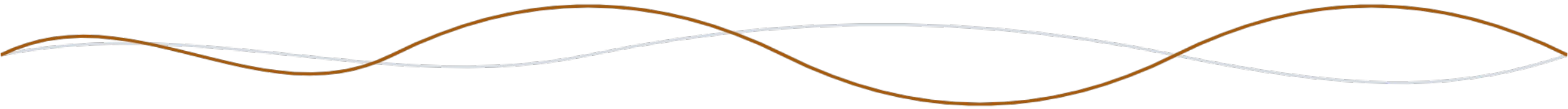
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

10-дәріс

Сандық спектрлік талдау және периодограмма әдісі

Бағалаудың ығысуы мен дисперсиясы · спектр жайылуы · терезе функциялары · Бартлетт пен Уэлч · AR модель



КІРІСПЕ

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

Сигналдың спектрлік құрамын бағалау әдістерін меңгеру: периодограмма, терезелер, Бартлетт пен Уэлч орташалауы, параметрлік (AR) модельдеу; бағалау сапасын статистикалық тұрғыда талдау.

1. Спектрлік талдаудың мақсаты, бағалаудың статистикалық қасиеттері
2. Периодограмма және спектрдің жайылуы
3. Терезе функциялары: Ханн, Хемминг, Блэкман, Кайзер
4. Бартлетт және Уэлч әдістері
5. Параметрлік модельдеу: AR, MA, ARMA

НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР

Спектрлік талдаудың тілі

Ұғым	Анықтама
Қуаттың спектрлік тығыздығы	Процесс қуатының жиілік бойынша таралуы; R(τ)-ның Фурье түрлендіруі
Ажыратымдылық	Бөлек көрінетін екі гармониканың ең аз жиілік айырмасы, ≈ fд/N
Спектр жайылуы	Терезелеу салдарынан энергияның көрші жиіліктерге таралуы
Бүйір жапырақ деңгейі	Терезе спектріндегі ең үлкен бүйір шыңның негізгі шыңға қатынасы, дБ
Ауқатты бағалау	N → ∞ кезінде ығысуы да, дисперсиясы да нөлге ұмтылатын бағалау
ENBW	Терезенің эквивалентті шу жолағы — шу қуатының өсу коэффициенті

Бағалаудың сапасы: ығысу, дисперсия, ауқаттылық

$$B = M[\hat{P}(\omega)] - P(\omega) \quad \text{— ығысу}$$

$$D = M\big[(\hat{P} - M[\hat{P}])^2\big] \quad \text{— дисперсия}$$

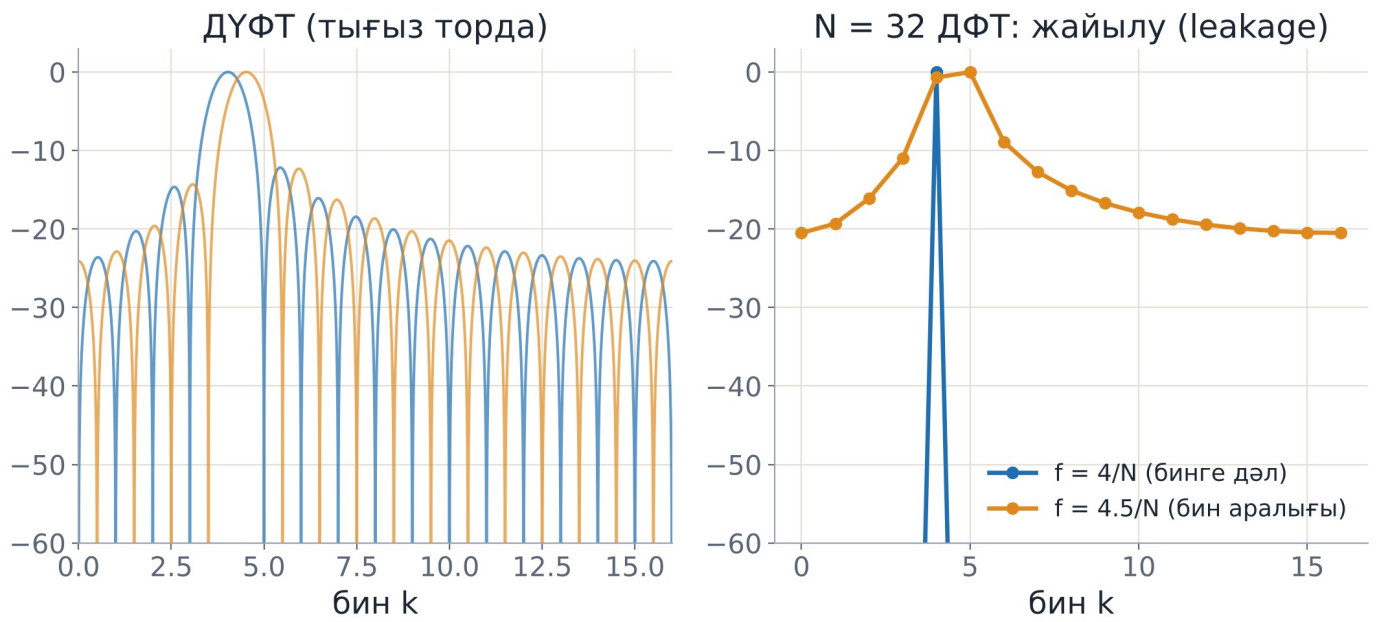
$$\lim_{N\to\infty} B = 0, \quad \lim_{N\to\infty} D = 0 \quad \text{— ауқатты бағалау}$$

$$\hat{P}(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\omega n}\right|^2 \quad \text{— периодограмма}$$



Парадокс: N өскенде ажыратымдылық жақсарады (0.20 мен 0.23 бөлінеді), бірақ шу бөлігінің құбылмалылығы азаймайды — периодограмма ауқатсыз бағалау.

Жиілік бинге дәл түспесе, энергия «жайылады»



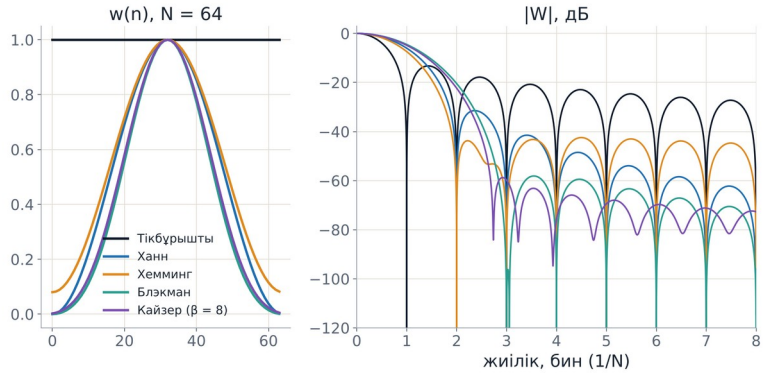
Себебі

N үлгіні алу — тікбұрышты терезеге көбейту; спектрде оның sinc-тәрізді ДНПФ-ымен конволюция.

Салдары

Бүйір жапырақтар әлсіз гармоникаларды бүркемелейді: −13 дБ-ден төмен сигналдар көрінбеуі мүмкін.

Ажыратымдылық пен бүйір жапырақ арасындағы ымыра



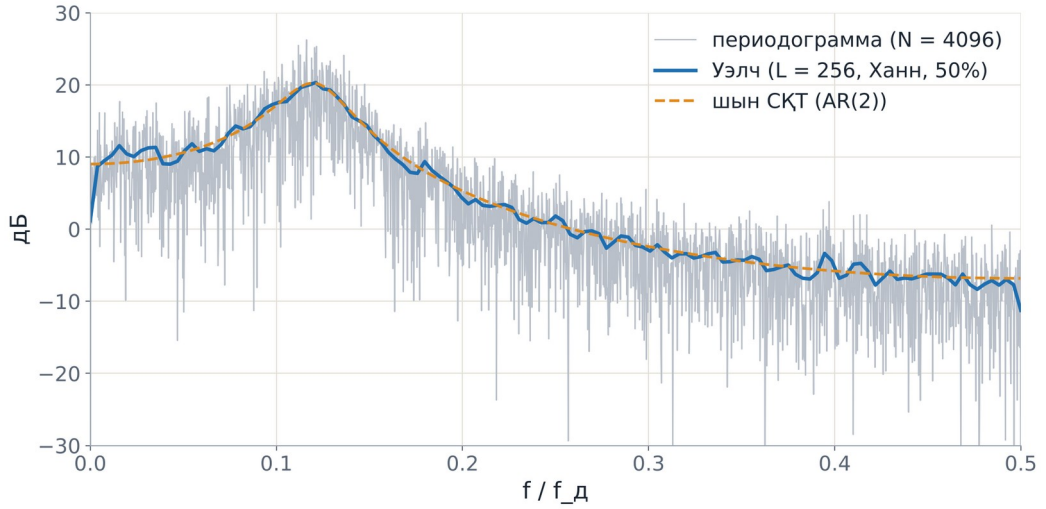
Терезе (N = 64)	Негізгі жапырақ, бин	Бүйір жапырақ, дБ	−3 дБ ені, бин	ENBW, бин
Тікбұрышты	2.00	−13.3	0.88	1.00
Ханн	4.00	−31.5	1.44	1.50
Хемминг	4.00	−42.4	1.30	1.36
Блэкман	6.00	−58.1	1.64	1.73
Кайзер (β = 8)	5.47	−58.8	1.58	1.67

Орташалау арқылы дисперсияны азайту

Бартлетт: $\hat{P}_B = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\hat{P}_i(\omega), \quad D\{\hat{P}_B\} \approx \frac{1}{K}P^2(\omega)$

Уэлч: $\hat{P}_W = \frac{1}{KU}\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{L}\left|\sum_{n} w(n)\,x_i(n)\,e^{-j\omega n}\right|^2$

$U = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} w^2(n),$ 50% қабаттасу



Баға

Сегмент қысқарған сайын ажыратымдылық ≈ 1/L-ге дейін нашарлайды.

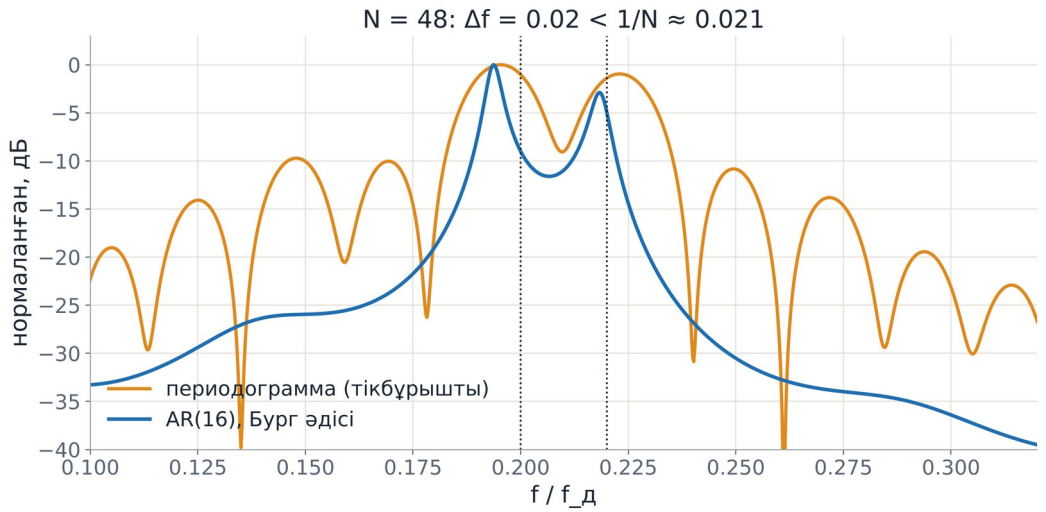
Нәтиже: Уэлч бағалауы (көк) шын спектрді (үзік сызық) тегіс қайталайды, ал жай периодограмма ±10 дБ құбылады.

AR модель қысқа жазбада жоғары ажыратымдылық береді

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k\, x(n-k) + e(n)$$

$$\hat{P}_{AR}(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k} \right|^2}$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_k R_x(m-k) = -R_x(m), \quad m = 1..p \quad \text{(Юл–Уокер)}$$



Нәтиже: Δf = 0.02 < 1/N болғанда периодограмма екі шыңды ажырата алмайды, ал AR(16) Бург бағалауы екі айқын шың береді. AR — шыңды, MA — ойықты, ARMA — екеуін де жақсы сипаттайды.

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

Классикалық және параметрлік әдістер

Әдіс	Ажыратымдылық	Дисперсия	Қашан қолдану керек
Периодограмма	≈ 1/N (ең жақсы классикалық)	жоғары	Детерминирленген тондар, ұзын жазба
Бартлетт	≈ 1/L	≈ 1/K азаяды	Стационар шу, қарапайым есептеу
Уэлч	≈ 1.5/L (Ханн)	Бартлеттен төмен	Өлшеу құралдары, стандарт әдіс
AR (Бург, Юл–Уокер)	1/N-нен жоғары	ретке тәуелді	Қысқа жазба, шыңды спектрлер
MA / ARMA	орташа	ретке тәуелді	Ойықты немесе аралас спектрлер

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Екі тонды ажырату үшін қанша үлгі қажет?

Шарты

$f_д$ = 8 кГц. Сигналда 1000 Гц және 1012 Гц тондары бар. Ханн терезесімен ДФТ қолданылады. Ең аз N (2-нің дәрежесі) қандай?

Шешуі

1. Ханн терезесінің негізгі жапырағы — 4 бин, ажырату үшін шыңдар кемінде 2 бин қашық болуы керек.

2. Шарт: $\Delta f \geq 2 \cdot f_д / N \Rightarrow N \geq 2 \cdot 8000/12 \approx 1334$.

3. Ең жақын 2-нің дәрежесі: **N = 2048** (жазба ұзақтығы 0.256 с, Δf = 3.9 Гц).

Тікбұрышты терезеде N = 1024 жетер еді, бірақ бүйір жапырақ −13 дБ.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Уэлч бағалауының параметрлерін есептеу

Шарты

N = 8192 үлгі, fд = 16 кГц, сегмент L = 512, Ханн терезесі, 50 % қабаттасу. Сегмент саны K, жиілік қадамы, шу жолағы және дисперсияның азаюы қандай?

Шешуі

1. K = (N − L)/(L/2) + 1 = (8192 − 512)/256 + 1 = **31**.

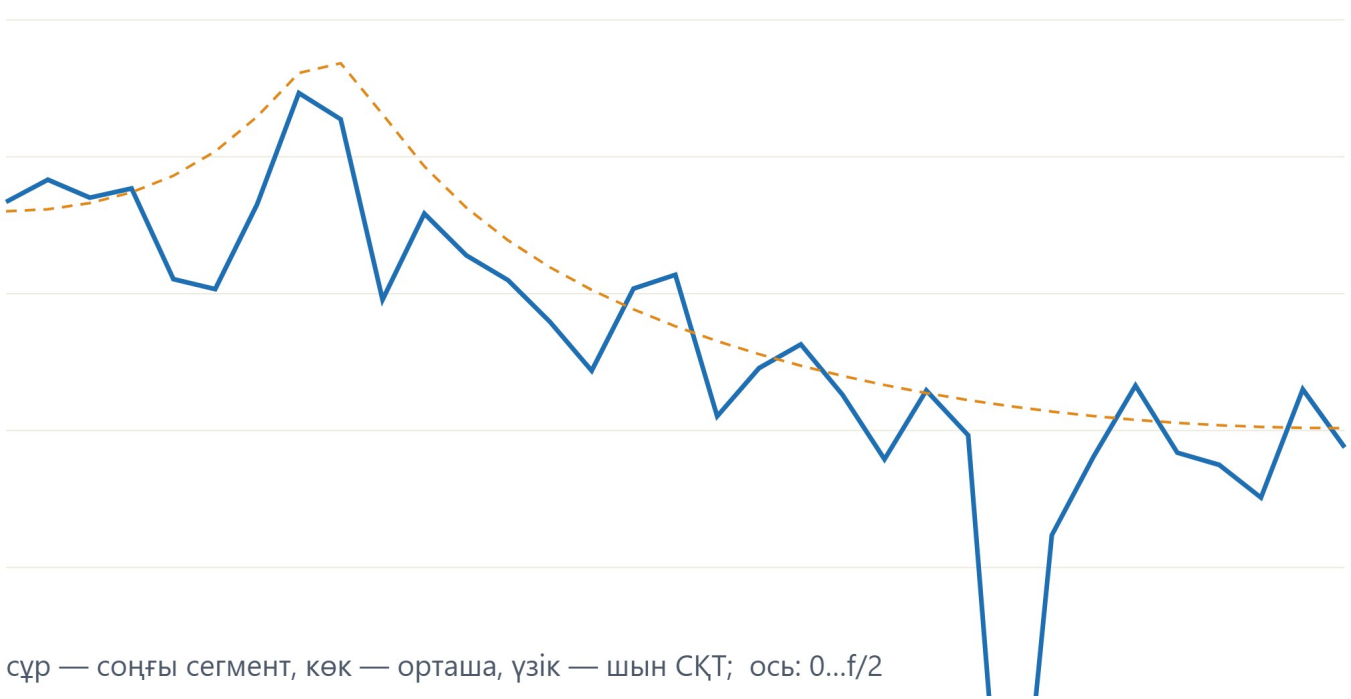
2. Жиілік қадамы: fд/L = 16000/512 = **31.25 Гц**.

3. Шу жолағы: ENBW = 1.5 бин ≈ **46.9 Гц**.

4. Дисперсия ≈ 1/K: 31 есе дерлік азаяды (зерттеуде өлшенген мән 0.034 ≈ 1/29).

АНИМАЦИЯ · УЭЛЧ ОРТАШАЛАУЫ

Сегменттер көбейген сайын бағалау тегістеледі



Не көрінеді

AR(2) процесінің жеке периодограммалары біртіндеп орташаланады, K = 1…40.

Заңдылық

Құбылмалылық ≈ 1/√K есе азаяды; ажыратымдылықты сегмент ұзындығы L анықтайды.

Дисперсия мен ажыратымдылықтың ымырасы

Сегмент L	K	Салыстырмалы дисперсия	Ажыратымдылық 1/L
8192	1	1.000	0.00012
2048	7	0.151	0.00049
1024	15	0.070	0.00098
512	31	0.034	0.00195
256	63	0.016	0.00391
128	127	0.008	0.00781

Ақ шу, N = 8192, 60 тәжірибе; Уэлч: Ханн терезесі, 50 % қабаттасу. Дисперсия K = 1 мәніне нормаланған.

Қорытынды

Дисперсия ≈ 1/K заңымен азаяды (K = 127 үшін 126 есе), ал ажыратымдылық сегмент ұзындығына кері пропорционал нашарлайды.

Таңдау ережесі: $L \geq 1/\Delta f$, мұндағы Δf — ажыратылуы тиіс ең жақын екі жиіліктің айырмасы.

ПРАКТИКА · PYTHON

Спектрлік бағалау: 10 жол код

```
import numpy as np
from scipy import signal

fs = 16000; n = np.arange(8192)
x = np.sin(2*np.pi*1000*n/fs) + 0.5*np.random.randn(n.size)

# периодограмма (тікбұрышты терезе)
f1, P1 = signal.periodogram(x, fs)
# Уэлч: L = 512, Ханн, 50 %
f2, P2 = signal.welch(x, fs, 'hann', nperseg=512, noverlap=256)
```

MATLAB баламасы

```
periodogram(x,[],[],fs)
pwelch(x,hann(512),256,[],fs)
pburg(x,16,[],fs)
```

Тапсырма

nperseg = 128, 512, 2048 мәндерінде шу деңгейінің құбылуын салыстырыңыз.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Спектрлік талдау телекоммуникацияда және одан тыс

Радиомониторинг

Эфирдегі арналардың жүктемесін, кедергілерді және рұқсатсыз таратқыштарды анықтау.

OFDM / 5G өлшеулері

Спектрлік маска, жолақтан тыс сәулелену (ACLR), арна шуын бағалау.

Діріл диагностикасы

Подшипник пен редуктор ақауларын сипаттамалық жиіліктер бойынша анықтау.

Сөйлеу және медицина

Форманттарды AR модельмен (LPC) бағалау; ЭЭГ ырғақтарын талдау.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Спектрлік бағалау әдістерін эксперименттік салыстыру

1. Жиіліктері 0.20 және 0.22 (fd-ға қатысты) екі синусоида мен ақ шудан тұратын N = 256 сигналды құрыңыз.
2. Тікбұрышты, Ханн және Блэкман терезелерімен периодограммаларды салыңыз.
3. L = 32, 64, 128 үшін Уэлч бағалауын есептеңіз.
4. Бург әдісімен p = 8, 16, 32 AR спектрлерін алыңыз.
5. Әр әдіс үшін ажыратымдылықты және шу деңгейінің дисперсиясын кестеге жазыңыз.

Есепте болуы тиіс

- 4 график
- салыстыру кестесі
- әдіс таңдау бойынша негізделген қорытынды

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. Бүйір жапырағы ең төмен терезе?

А) тікбұрышты Б) Ханн В) Хемминг Г) Блэкман

2. Периодограмма дисперсиясы N өскенде…

А) нөлге ұмтылады Б) азаймайды В) өседі

3. Уэлчте K өссе, ажыратымдылық…

А) жақсарады Б) нашарлайды В) өзгермейді

4. Қысқа жазбада жақын шыңдарды ажыратуға тиімді…

А) периодограмма Б) Бартлетт В) AR модель

5. fд = 8 кГц, N = 1024 болса, ДФТ жиілік қадамы?

А) 3.9 Гц Б) 7.8 Гц В) 15.6 Гц Г) 1024 Гц

Жауаптары: 1 — Г, 2 — Б, 3 — Б, 4 — В, 5 — Б

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Периодограмма ығыспаған, бірақ ауқатсыз: N өссе де дисперсиясы азаймайды.

02 Терезе — ажыратымдылық (негізгі жапырақ) пен динамикалық диапазон (бүйір жапырақ) арасындағы ымыра.

03 Уэлч орташалауы дисперсияны ≈ 1/K азайтады, ажыратымдылық 1/L-ге дейін нашарлайды.

04 Параметрлік AR әдістері қысқа жазбаларда 1/N шегінен жоғары ажыратымдылық береді, бірақ модель ретін дұрыс таңдау қажет.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Қуаттың спектрлік тығыздығы	спектральная плотность мощности	power spectral density
Спектрдің жайылуы	растекание спектра	spectral leakage
Терезе функциясы	оконная функция	window function
Бүйір жапырақ	боковой лепесток	sidelobe
Ауқатты бағалау	состоятельная оценка	consistent estimate
Авторегрессиялық модель	авторегрессионная модель	autoregressive model

БЕКІТУ · 10-ДӘРІС

Бақылау сұрақтары

1. Спектрлік талдаудың негізгі мақсаты қандай?
2. Бағалаудың ығысуы мен дисперсиясының мағынасы қандай?
3. Ауқатты бағалау дегеніміз не?
4. Терезе функцияларын қолдану не үшін қажет?
5. Бартлетт пен Уэлч әдістерін салыстырыңыз.
6. AR, MA және ARMA модельдерінің айырмашылығы қандай?
7. Параметрлік әдістер қашан тиімді?