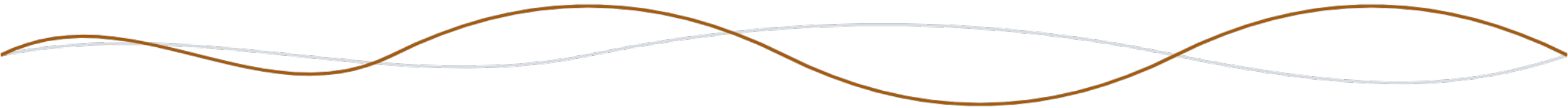
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

11-дәріс

Цифрлық сүзгілерді синтездеу әдістері

Сызықтық фазалы СИС · терезе әдісі · жиіліктік таңдау · Ремез алгоритмі · аналогтық прототип және бисызықтық түрлендіру



КІРІСПЕ

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

Берілген жиілік талаптары бойынша рекурсивті емес (СИС) және рекурсивті (ШИС) цифрлық сүзгілердің коэффициенттерін есептеу әдістерін меңгеру және оларды салыстыра білу.

1. Сызықтық фазалы СИС сүзгілердің төрт типі
2. Терезе әдісі және Гиббс эффектісі
3. Жиіліктік таңдау және Ремез алгоритмі
4. Аналогтық прототип және бисызықтық түрлендіру
5. СИС пен ШИС салыстыруы — сандық зерттеу

НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР

Сүзгі синтезінің тілі

Ұғым	Анықтама
Синтез	Берілген АЖС талаптары бойынша сүзгі коэффициенттерін анықтау
Талаптар шаблоны	ω_p, ω_s, өткізу жолағындағы толқын A_p, тежеу жолағындағы басу A_s
Сызықтық ФЖС	$\varphi(\omega) = -\alpha\omega$: барлық жиіліктер бірдей кідіріспен өтеді
Минимакс жуықтау	Ең үлкен ауытқуды азайту (Чебышев критерийі), Ремез алгоритмінің негізі
Аналогтық прототип	Нормаланған аналогтық ТЖС, цифрлық ШИС-ке түрлендірілетін бастама
Жиілікті бұрмалау	Бисызықтық түрлендірудегі $\Omega = (2/T)\cdot\mathrm{tg}(\omega T/2)$ сызықтық емес сәйкестік

Симметрия тұрақты топтық кідіріс береді

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\, z^{-n}, \qquad h(n) = \pm h(N-1-n)$$

$H(e^{j\omega}) = A(\omega)\, e^{-j\omega(N-1)/2}$ — сызықтық ФЖС

$\tau_{\text{гр}} = \dfrac{N-1}{2}$ тұрақты топтық кідіріс

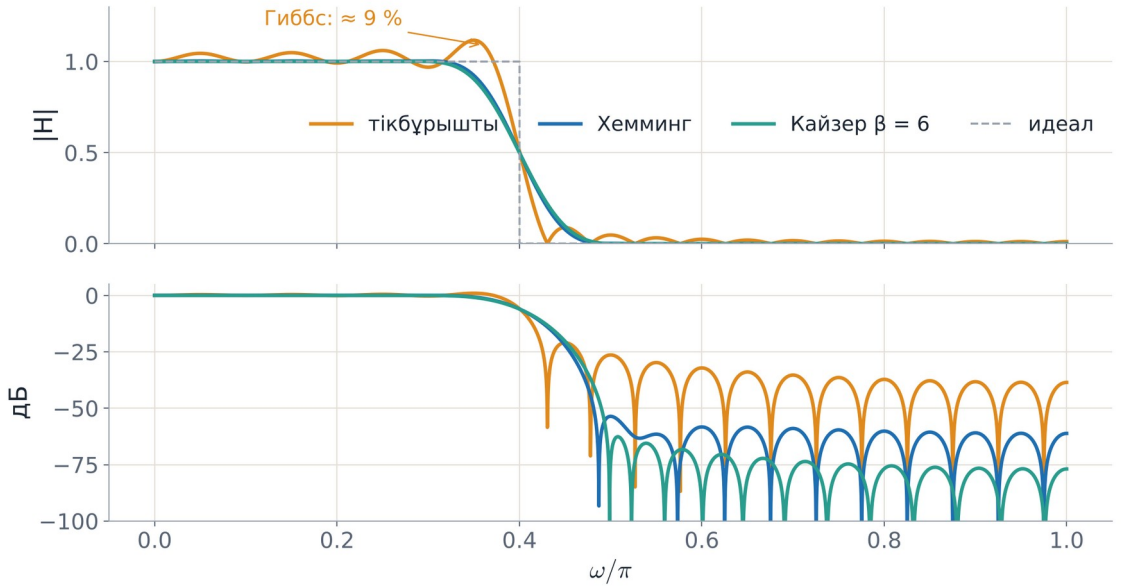
Тип	Симметрия	N	Міндетті нөлдер	Жарамды сүзгілер
I	жұп	тақ	жоқ	кез келген
II	жұп	жұп	ω = π	ТЖС, жолақтық
III	тақ	тақ	ω = 0 және π	Гильберт, дифференциатор
IV	тақ	жұп	ω = 0	ЖЖС, дифференциатор

Идеал сипаттаманы кесу және терезелеу

$$h_d(n) = \frac{\sin \omega_c (n-\alpha)}{\pi (n-\alpha)}, \quad \alpha = \frac{N-1}{2}, \quad h(n) = h_d(n)\, w(n)$$

$$\beta = 0.1102 (A - 8.7) \quad (A > 50 \text{ дБ})$$

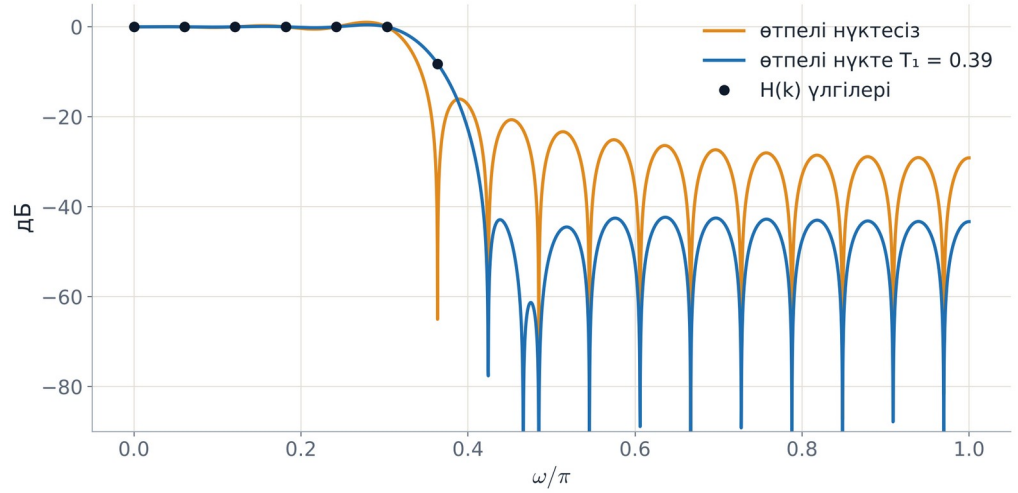
$$N \approx \frac{A - 8}{2.285\, \Delta\omega} + 1 \quad \text{— Кайзер формуласы}$$

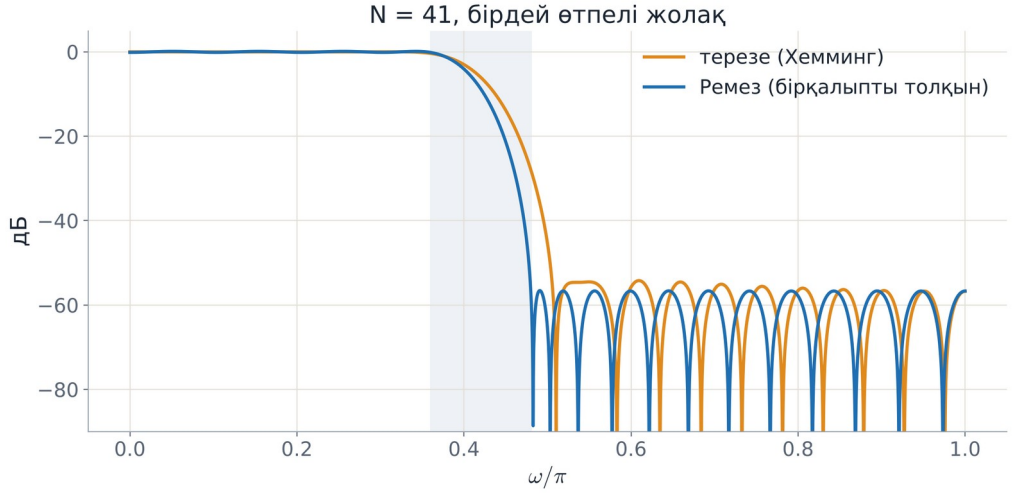


Гиббс эффектісі

Тікбұрышты терезеде ≈ 9 % толқын және −21 дБ басу N-ге тәуелсіз; тегіс терезелер басуды −53…−75 дБ-ге дейін жақсартады.

Өтпелі үлгі мен бірқалыпты жуықтау





Бір өтпелі үлгі

$T_1 = 0.39$ басуды −20.7 дБ-ден −42.3 дБ-ге жақсартты (есептеу нәтижесі).

Ремез (Паркс–Макклеллан)

Қате бүкіл жолақта бірқалыпты таралады — берілген N үшін минимакс-оңтайлы сүзгі.

Бисызықтық түрлендіру және жиілікті бұрмалау

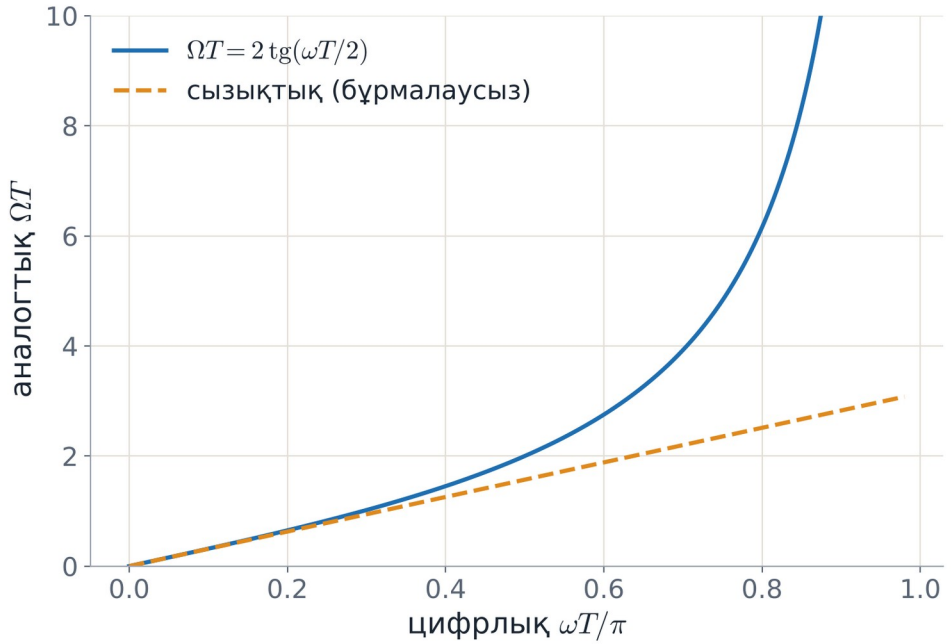
$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$ — жиілікті алдын ала бұрмалау

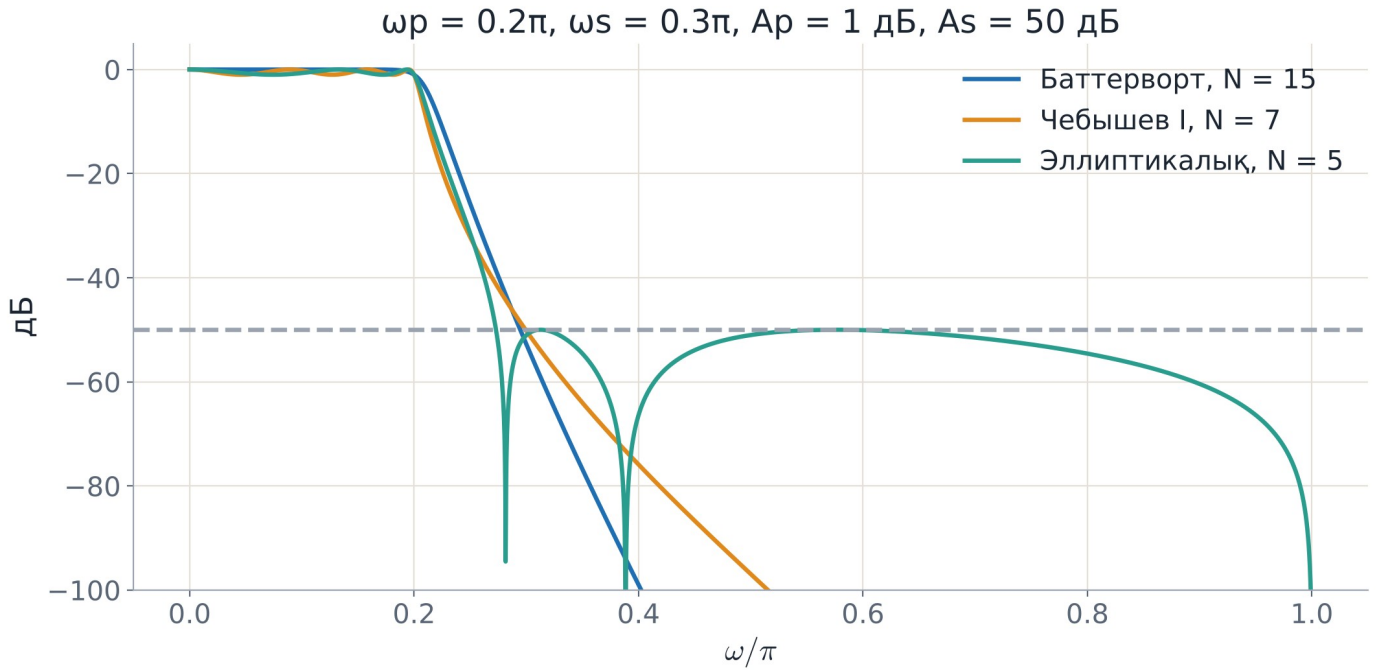
$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

Алгоритм

1) ω_p, ω_s-ті бұрмалау; 2) аналогтық прототипті есептеу; 3) s-ті ауыстыру. Тұрақтылық сақталады, aliasing болмайды.



Бір талапқа үш прототип



Талап

$\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$, $A_p = 1$ дБ, $A_s = 50$ дБ.

Реттер

Баттерворт — 15, Чебышев I — 7, эллиптикалық — 5.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Кайзер терезесімен СИС сүзгісінің ретін табу

Шарты

ТЖС: тежеу жолағында басу A_s = 60 дБ, өтпелі жолақ ені $\Delta f = 0.05 \cdot f_д$. Кайзер терезесінің β параметрін және сүзгі ұзындығын N анықтаңыз.

Шешуі

1. $A > 50$ дБ $\Rightarrow \beta = 0.1102 \cdot (60 - 8.7) \approx$ **5.65**.
2. $\Delta\omega = 2\pi \cdot 0.05 = 0.314$ рад.
3. $N \approx (60 - 8)/(2.285 \cdot 0.314) + 1 \approx 73.4$.
4. I тип (тақ N) үшін **N = 75**, топтық кідіріс $(N - 1)/2 = 37$ үлгі.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Бисызықтық түрлендірумен 1-ретті ШИС сүзгісі

Шарты

$f_д$ = 8 кГц. Кесу жиілігі f_c = 1 кГц болатын 1-ретті Баттерворт ТЖС-ін $H(s) = \Omega_c/(s + \Omega_c)$ прототипінен бисызықтық түрлендірумен алыңыз.

Шешуі

1. $\omega_c T = 2\pi \cdot 1000/8000 = \pi/4$.

2. Бұрмалау: $\Omega_c = 2f_д \cdot \operatorname{tg}(\pi/8) = 16000 \cdot 0.4142 \approx 6627$ рад/с ($\approx$ 1055 Гц).

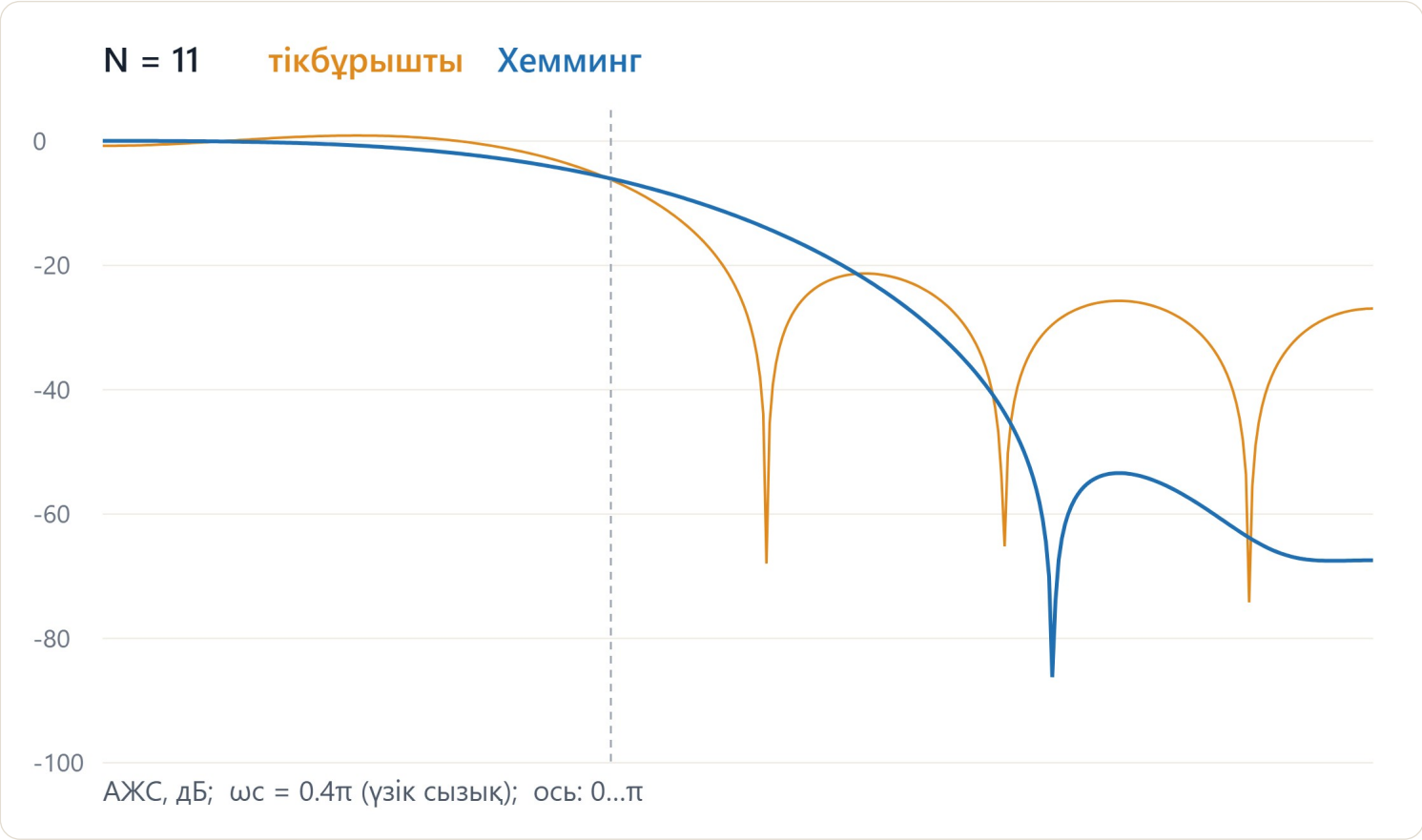
3. $s = 2f_д(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$ қойып, жеңілдетеміз:

$$\mathbf{H(z) = 0.2929 \cdot (1 + z^{-1}) / (1 - 0.4142 \cdot z^{-1})}$$

Тексеру: $z = 1 \Rightarrow H = 1$; $z = -1 \Rightarrow H = 0$.

АНИМАЦИЯ · ТЕРЕЗЕ ӘДІСІ

Сүзгі ұзындығы N өскенде не өзгереді?



Байқаңыз

N өскенде өтпелі жолақ ~1/N заңымен тарылады, бірақ бүйір жапырақтардың деңгейі өзгермейді.

Ереже

Басу деңгейін терезе түрі, ал өтпелі жолақ енін N анықтайды.

ЗЕРТТЕУ · СИС ПЕН ШИС САЛЫСТЫРУ

Бір талап — бес шешім: рет, көбейту, кідіріс

Сүзгі	Рет	Көбейту / үлгі	Топтық кідіріс, үлгі
СИС, терезе (Кайзер)	59	60	30 (тұрақты)
СИС, Ремез	34	35	17 (тұрақты)
ШИС, Баттерворт	15	31	өзгермелі
ШИС, Чебышев I	7	15	өзгермелі
ШИС, эллиптикалық	5	11	4.9 … 30.6

Талап: $\omega_p = 0.2\pi$, $\omega_s = 0.3\pi$, $A_p = 1$ дБ, $A_s = 50$ дБ. Ремез реті талап орындалғанша итерациямен ізделді (scipy.signal).

Қорытынды: эллиптикалық ШИС есептеу көлемі бойынша СИС-тен 3–5 есе үнемді, бірақ фазасы сызықтық емес. Фаза маңызды болса (деректер беру, кескін) — Ремез СИС; есептеу ресурсы шектеулі болса — эллиптикалық ШИС.

ПРАКТИКА · PYTHON

Бір талапқа төрт сүзгі — scipy.signal

```
from scipy import signal
wp, ws, Ap, As = 0.2, 0.3, 1, 50 # п-ге нормаланған

# СИС: Кайзер терезесі
N, beta = signal.kaiserord(As, ws - wp)
h_kai = signal.firwin(N, (wp+ws)/2, window=('kaiser', beta))
# СИС: Ремез (fs = 2 бірлігінде)
h_rem = signal.remez(35, [0, wp/2, ws/2, 0.5], [1, 0])
# ШИС: эллиптикалық
n, wn = signal.ellipord(wp, ws, Ap, As)
b, a = signal.ellip(n, Ap, As, wn)
```

MATLAB баламасы

`kaiserord, fir1`
`firpm (Ремез)`
`ellipord, ellip`
`fvtool(b, a)`

Тапсырма

Төрт сүзгінің АЖС мен топтық кідірісін бір графикке салып, талапты тексеріңіз.

ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Синтезделген сүзгілер қайда жұмыс істейді?

Байланыс қабылдағыштары

Арналық сүзгілер, түбірлі көтерілген косинус (RRC) импульстік пішіндеу — сызықтық фазалы СИС.

Аудио өңдеу

Эквалайзерлер, кроссоверлер — ресурсты үнемдейтін биквадрат ШИС каскадтары.

SDR және DDC

Цифрлық төмен түрлендіргіштерде CIC + компенсациялаушы СИС + жартылай жолақты сүзгілер.

Өлшеу және медицина

50 Гц желі кедергісін басатын ойық сүзгілер, ЭКГ-ның изолиниясын түзету.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Талап бойынша сүзгі синтездеу және салыстыру

1. Жеке нұсқа бойынша талаптарды алыңыз: ω_p, ω_s, A_p, A_s.
2. СИС сүзгісін терезе әдісімен (Хемминг, Кайзер) және Ремезбен синтездеңіз.
3. ШИС сүзгісін Баттерворт, Чебышев, эллиптикалық прототиптерден алыңыз.
4. Әр сүзгінің АЖС, ФЖС, топтық кідірісі мен импульстік сипаттамасын салыңыз.
5. Рет, көбейту саны, кідіріс бойынша кесте құрып, қорытынды жасаңыз.

Бағалау критерийі

- Талаптың орындалуы
- Графиктердің толықтығы
- Салыстыру кестесі
- Әдіс таңдауының негіздемесі

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. Әрқашан тұрақты сүзгі?

А) СИС Б) ШИС В) эллиптикалық

2. Тікбұрышты терезедегі Гиббс толқыны?

А) ≈ 1 % Б) ≈ 9 % В) ≈ 25 %

3. ЖЖС үшін жарамсыз СИС типі?

А) I Б) II В) IV

4. Бисызықтық түрлендіруде aliasing…

А) болады Б) болмайды В) N-ге тәуелді

5. Бірдей талапқа ең аз ретті сүзгі?

А) Баттерворт Б) Чебышев I В) эллиптикалық Г) Ремез СИС

Жауаптары: 1 — А, 2 — Б, 3 — Б, 4 — Б, 5 — В

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 Симметриялы СИС сүзгісі дәл сызықтық фаза береді; типі (I–IV) жарамды сүзгі түрін шектейді.

02 Терезе басу деңгейін, N өтпелі жолақ енін анықтайды; Ремез берілген N үшін оңтайлы.

03 ШИС аналогтық прототиптен бисызықтық түрлендірумен алынады; шекті жиіліктер алдын ала бұрмалануы тиіс.

04 Бір талапқа эллиптикалық ШИС 11 көбейту, Ремез СИС 35 көбейту талап етеді — таңдау фазаның маңызына байланысты.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Шектелген импульстік сипаттамалы (СИС)	КИХ-фильтр	FIR filter
Шексіз импульстік сипаттамалы (ШИС)	БИХ-фильтр	IIR filter
Терезе әдісі	метод окон	window method
Жиіліктік таңдау	частотная выборка	frequency sampling
Бисызықтық түрлендіру	билинейное преобразование	bilinear transform
Бірқалыпты толқынды жуықтау	равноволновая аппроксимация	equiripple approximation

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

СИС синтез әдістерін салыстыру

Әдіс	Артықшылығы	Кемшілігі	Құралы
Терезе	Қарапайым, аналитикалық	Жолақтарды бөлек басқаруға болмайды	firwin, fir1
Жиіліктік таңдау	Кез келген АЖС пішіні	Үлгі аралықтарында толқын	firwin2, fir2
Ремез	Берілген N үшін оңтайлы	Итерация, жинақталмауы мүмкін	remez, firpm
Ең кіші квадраттар	Қате энергиясы минимум	Шекараларда толқын үлкен	firls

БЕКІТУ · 11-ДӘРІС

Бақылау сұрақтары

1. Сызықтық фазалы СИС сүзгілердің төрт типін атаңыз.
2. Терезе әдісінің артықшылықтары мен кемшіліктері қандай?
3. Гиббс эффектісін қалай азайтуға болады?
4. Жиіліктік таңдау әдісінің принципін түсіндіріңіз.
5. Ремез алгоритмінің рөлі неде?
6. Бисызықтық түрлендірудің мағынасы неде?
7. Баттерворт пен Чебышев сүзгілерін салыстырыңыз.