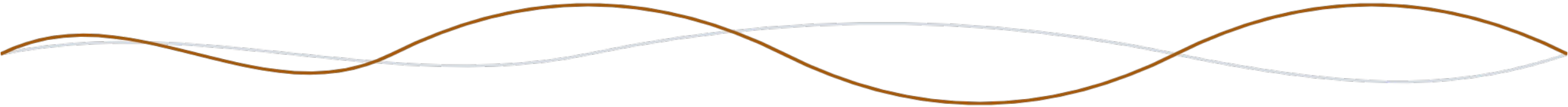
ELC2142 – Сигналдарды цифрлық өңдеу технологиясы

12-дәріс

Екі өлшемді цифрлық сүзгілердің синтезі

Нөлдік фазалы 2D СИС · бөлінгіш және айналмалы терезелер · жиіліктік таңдау · Мак-Клеллан түрлендіруі · кескін өңдеуде қолдану



КІРІСПЕ

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсат

Екі өлшемді СИС сүзгілерін синтездеудің үш негізгі әдісін меңгеру, олардың импульстік және жиіліктік сипаттамаларын талдау және кескін өңдеу міндеттері үшін әдісті негізді таңдай білу.

1. 2D СИС сүзгілердің ерекшеліктері және нөлдік фаза
2. Терезе әдісі: бөлінгіш және айналмалы терезелер
3. Жиіліктік таңдау әдісі және өтпелі үлгілер
4. Жиілікті түрлендіру (Мак-Клеллан) әдісі
5. Әдістерді сандық салыстыру және кескінге қолдану

Неліктен 2D өңдеуде СИС сүзгілері басым?

$$H(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2)\, e^{-j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}$$

$h(n_1, n_2) = h(-n_1, -n_2) \;\Rightarrow\; H(\omega_1, \omega_2)$ — нақты (нөлдік фаза)

$$h(n_1, n_2) = h_d(n_1, n_2)\, w(n_1, n_2)$$

Үш синтез әдісі

Терезе функциясы · жиіліктік таңдау (2D ДФТ) · жиілікті түрлендіру (1D прототиптен 2D сүзгі).

Нөлдік фаза

$h(n_1,n_2) = h(-n_1,-n_2)$ болса, $H(\omega_1,\omega_2)$ нақты: кескін шекаралары мен сызықтары ығыспайды.

2D ШИС қиындығы

Екі айнымалы көпмүшені көбейткіштерге жіктеуге болмайды — тұрақтылықты тексеру мен қамтамасыз ету күрделі.

Идеал сипаттамадан шекті 2D маскаға

$$h_d(n_1, n_2) = \frac{\omega_c}{2\pi} \cdot \frac{J_1\left(\omega_c \sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

$$w_c(n_1, n_2) = w_1(n_1)\, w_2(n_2) \quad \text{— бөлінгіш}$$

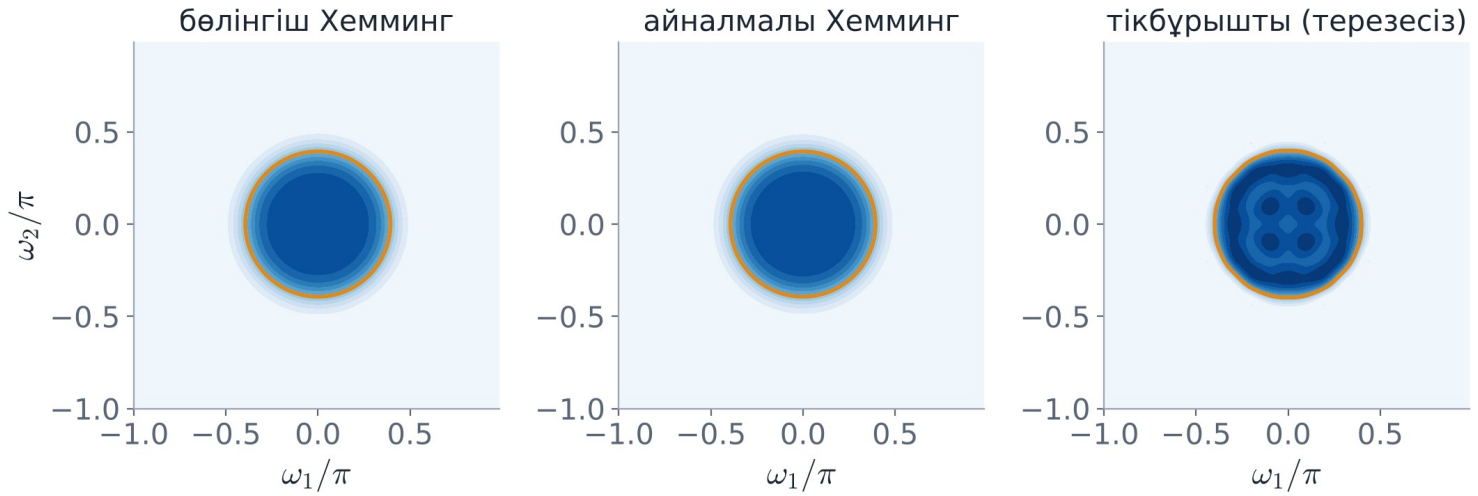
$$w_r(n_1, n_2) = w\left(\sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right) \quad \text{— айналмалы}$$

Алгоритм

1. Hd(ω_1,ω_2) — қажетті сипаттама.
2. Кері 2D Фурье: hd(n_1,n_2) — шексіз.
3. P×P терезеге көбейту: h = hd·w.
4. w(n_1,n_2) = w(−n_1,−n_2) — нөлдік фаза сақталады.

3.5-мысал: шаршы өткізу аймағы ($|\omega_1|, |\omega_2| \le \omega c$) үшін hd бөлінеді: $\sin(\omega c\, n_1)/(\pi n_1) \cdot \sin(\omega c\, n_2)/(\pi n_2)$. Дөңгелек аймақ үшін — J_1 Бессель функциясы.

Бөлінгіш пе, айналмалы ма?



Бөлінгіш

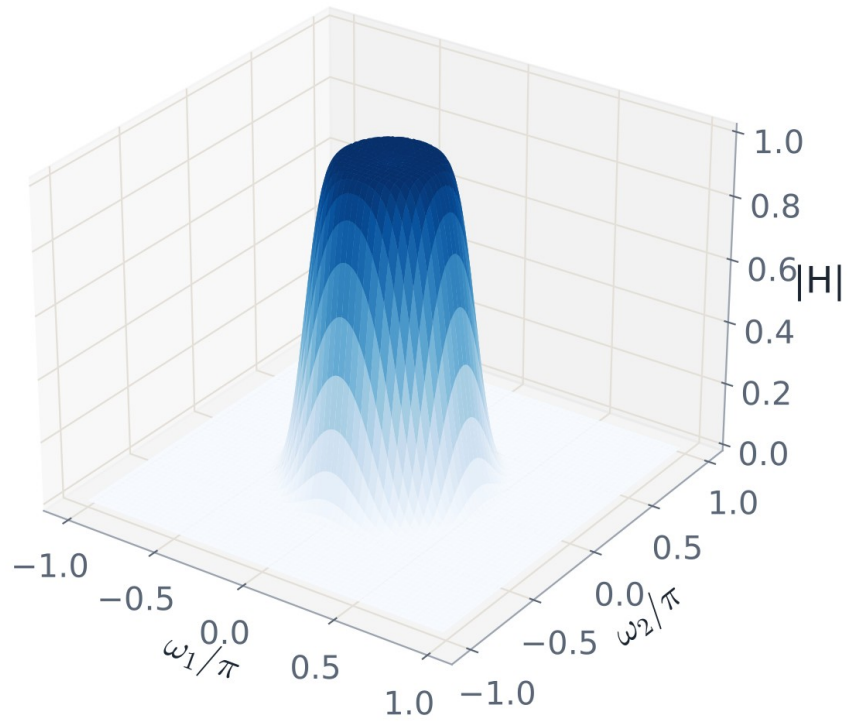
$w_1(n_1)\cdot w_2(n_2)$: есептеу оңай, бірақ диагональ бойынша сәл шаршыға тартады.

Айналмалы

$w(\sqrt{(n_1^2+n_2^2)})$: дөңгелек симметрия жақсы, басу −63 дБ.

Терезесіз (тікбұрышты) қию шекарада Гиббс толқынын туғызады — өткізу аймағында «дақтар» пайда болады.

Дөңгелек ТЖС-тің үш өлшемді АЖС-і



Параметрлер

Маска: P × P = 21 × 21

Кесу жиілігі: ωc = 0.4π

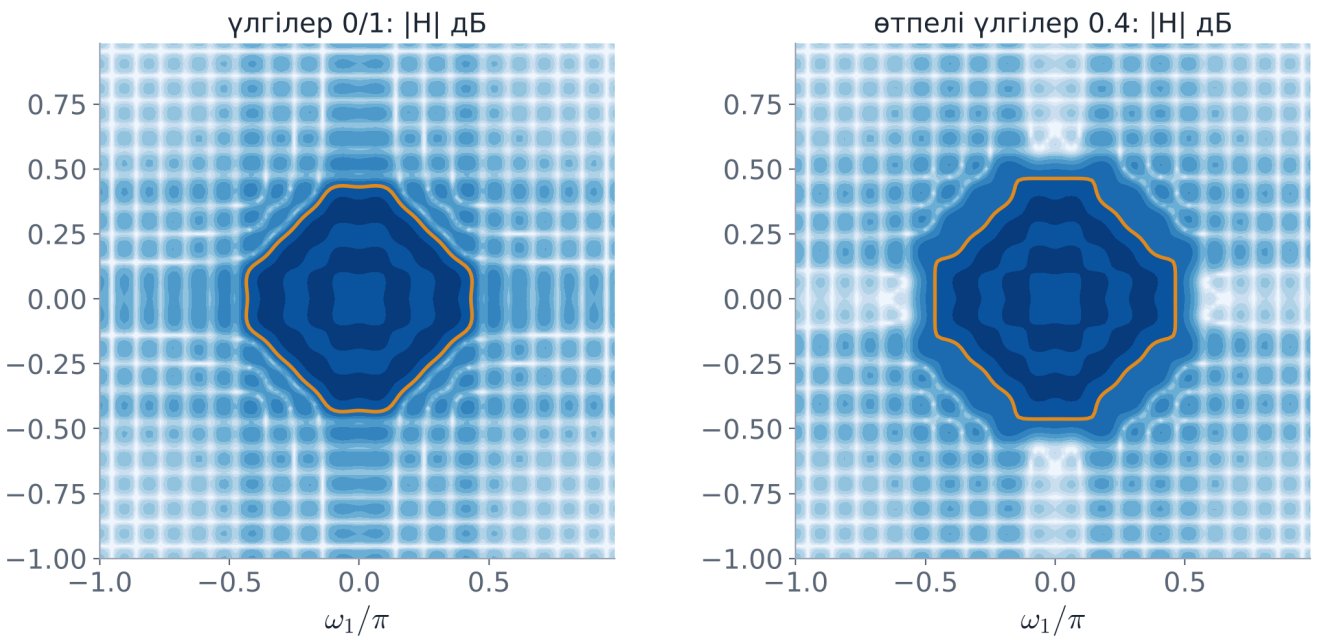
Терезе: айналмалы Хемминг

Көбейту саны: 441 (симметрияда ≈ 66)

Көріп отырмыз

Тегіс «үстел» пішіні, біркелкі өтпелі беткей, басу аймағында толқын байқалмайды.

2D ДФТ торында үлгілерді беру



Принцип

$H[k_1,k_2]$ — $N_1 \times N_2$ нүктеде берілген.

$h[n_1,n_2]$ = кері 2D ДФТ (3.47).

Үлгілер арасында $H(\omega_1,\omega_2)$ интерполяцияланады (3.48).

Өтпелі үлгілер (0.4...0.75) толқын энергиясын өтпелі жолаққа жинап, өткізу аймағындағы толқынды айтарлықтай азайтады.

Мак-Клеллан: оңтайлы 1D → квазиоңтайлы 2D

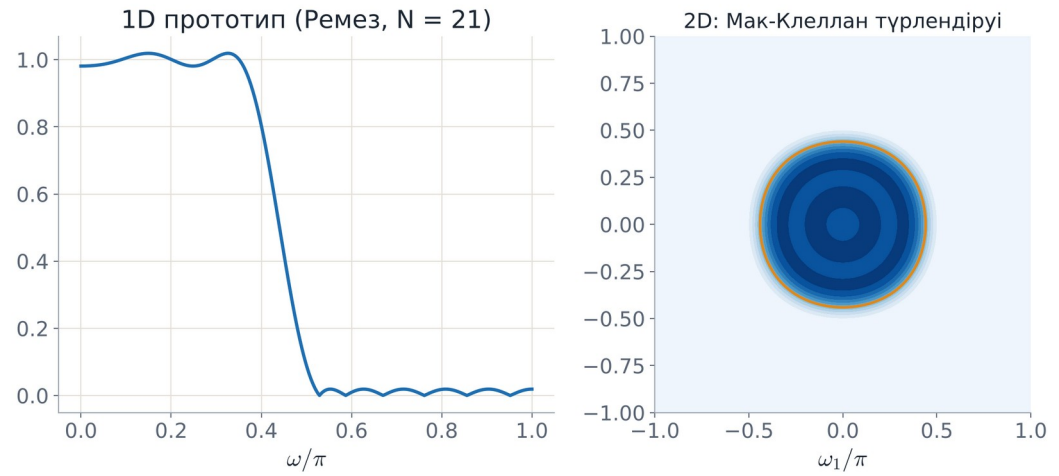
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N} b(n)\cos(n\omega) = \sum_{n=0}^{N} t(n)\, T_n(\cos\omega)$$

$$\cos\omega \;\rightarrow\; F(\omega_1,\omega_2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\omega_1 + \frac{1}{2}\cos\omega_2 + \frac{1}{2}\cos\omega_1\cos\omega_2$$

$$H(\omega_1,\omega_2) = \sum_{n=0}^{N} t(n)\, T_n[F(\omega_1,\omega_2)]$$

Қадамдар

1. 1D оңтайлы сүзгі (Ремез): b = firpm(...).
2. Чебышев коэффициенттеріне t(n) өту.
3. cos ω → F(ω₁,ω₂) алмастыру: h = ftrans2(b).

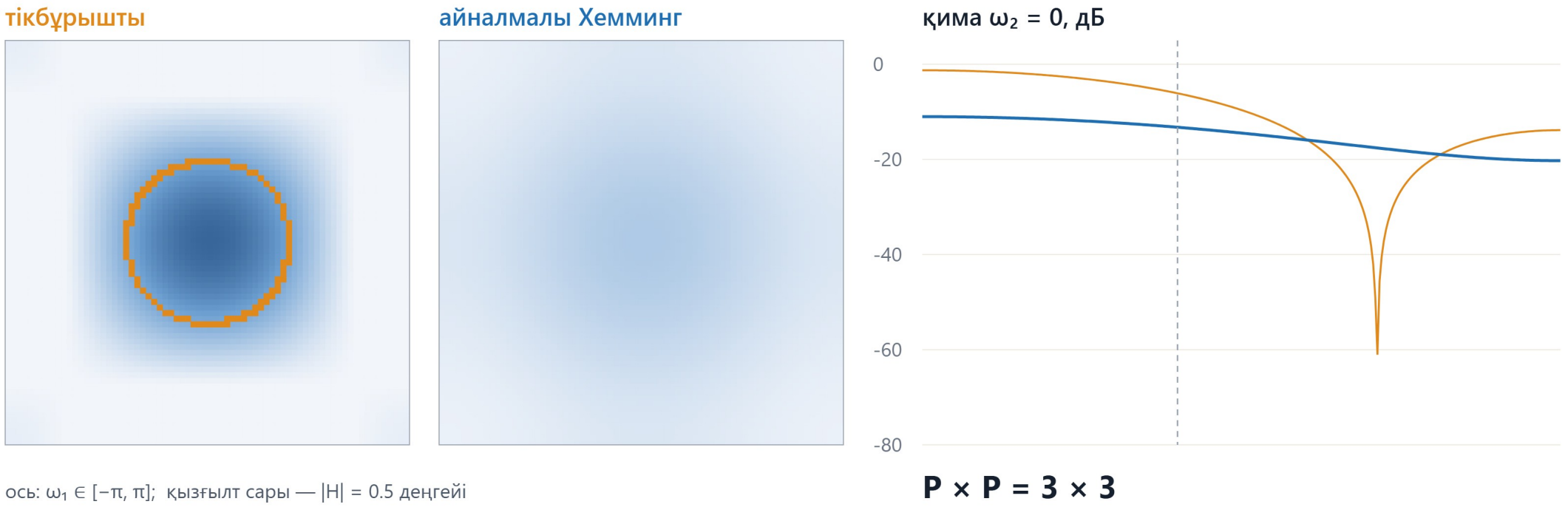


Негізгі қасиет

1D прототиптің толқын деңгейлері ($\delta \le 0.05$) 2D сүзгіде сақталады; F-тің деңгей сызықтары өткізу аймағының пішінін анықтайды.

АНИМАЦИЯ · 2D ТЕРЕЗЕ ӘДІСІ

Маска өлшемі P өскенде АЖС қалай өзгереді?



Ереже: P өскенде өтпелі белдеу тарылады; басу деңгейі мен дөңгелек симметрияны терезе түрі анықтайды.

ЗЕРТТЕУ · САНДЫҚ ЭКСПЕРИМЕНТ

Дөңгелек симметрия және басу деңгейі

Әдіс (21×21, ωc ≈ 0.4π)	|H| = 0.5 радиусы, ×π	Симметриядан ауытқу, %	Басу (r > 0.65π), дБ
Терезе: бөлінгіш Хемминг	0.395	1.12	−55.9
Терезе: айналмалы Хемминг	0.395	1.11	−63.3
Жиіліктік таңдау (өтпелі 0.4)	0.437	7.74	−17.8
Мак-Клеллан (Ремез, N = 21)	0.447	1.19	−34.4

Әдістеме

|H| = 0.5 сызығының радиусы 180 бағытта өлшенді; ауытқу = σ(r)/r̄. Басу — r > 0.65π аймағындағы ең үлкен деңгей.

Қорытынды

Айналмалы терезе — ең жақсы басу; Мак-Клеллан бірқалыпты толқынды береді; жиіліктік таңдау ең әлсіз басады.

ЗЕРТТЕУ · КЕСКІНГЕ ҚОЛДАНУ

2D ТЖС гаусс шуын қалай басады?



Шуланған кескін

PSNR 18.4 дБ

2D ТЖС-тен кейін

PSNR 24.2 дБ

Ұтыс · бірақ шеттер жұмсарады

+5.8 дБ

САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ

2D СИС синтез әдістерін салыстыру

Әдіс	Артықшылығы	Кемшілігі	MATLAB / Python
Терезе	Қарапайым, нөлдік фаза кепілді	hd аналитикалық белгілі болуы керек	fwind1, fwind2 / scipy + outer
Жиіліктік таңдау	Кез келген пішінді аймақ, ДФТ арқылы жылдам	Үлгілер арасында үлкен толқын	fsamp2 / numpy.fft.ifft2
Мак-Клеллан	1D оңтайлылық пен δ сақталады	Пішін $F(\omega_1,\omega_2)$-мен шектелген	ftrans2 / өз іске асыру
Тікелей оңтайлау	Нақты оңтайлы (LS, минимакс)	Өлшемі үлкен, Чебышев теоремасы жоқ	fmincon / cvxpy

Таңдау ережесі: дөңгелек симметрия мен терең басу қажет болса — айналмалы терезе; ерікті пішін — жиіліктік таңдау; берілген толқын деңгейі — Мак-Клеллан.

ЕСЕП 1 · ШЕШІМІМЕН

Шаршы өткізу аймақты 5×5 ТЖС маскасы

Шарты

$|\omega_1|, |\omega_2| \le \omega c = 0.5\pi$ өткізетін идеал ТЖС берілген. Тікбұрышты тереземен P = 5 маска коэффициенттерін тауып, H(0,0) мәнін бағалаңыз.

Неге 1.29?

Қатты қию Гиббс асып кетуін береді; Хемминг терезесі бұл қатені азайтады.

Шешуі

1. (3.42): $h(n_1,n_2) = h_1(n_1)\cdot h_1(n_2)$, $h_1(n) = \sin(0.5\pi n)/(\pi n)$.

2. $h_1(0) = 0.5$; $h_1(\pm1) = 1/\pi = 0.318$; $h_1(\pm2) = 0$.

3. $h(0,0) = 0.25$; $h(\pm1,0) = h(0,\pm1) = 0.159$; $h(\pm1,\pm1) = 0.101$; $n = \pm2$ бар жолдар мен бағандар — нөл.

4. $H(0,0) = \Sigma h = (0.5 + 2\cdot0.318)^2 = \mathbf{1.29}$.

Іс жүзінде маска 3×3; тұрақты құраушы 1-ге тең болуы үшін коэффициенттерді 1.29-ға бөлеміз.

ЕСЕП 2 · ШЕШІМІМЕН

Мак-Клеллан түрлендіруі қолмен

Шарты

1D прототип: $H(\omega) = 0.5 + 0.5\cdot\cos\omega$ ($h = [0.25, 0.5, 0.25]$). Мак-Клеллан түрлендіруімен 2D сүзгі мен оның 3×3 маскасын табыңыз.

Түйін

Түрлендіру 1D ретті сақтайды: N-ретті прототип (2N+1)×(2N+1) маска береді.

Шешуі

1. $t(0) = 0.5$, $t(1) = 0.5$; $T_1(x) = x \Rightarrow H = 0.5 + 0.5\cdot F$.

2. $F = -½ + ½\cos\omega_1 + ½\cos\omega_2 + ½\cos\omega_1\cos\omega_2$ қоямыз.

3. $H(\omega_1,\omega_2) = ¼(1 + \cos\omega_1)(1 + \cos\omega_2)$ — бөлінгіш!

$h = (1/16)\cdot[1\ 2\ 1;\ 2\ 4\ 2;\ 1\ 2\ 1]$

Тексеру: $H(0,0) = 1$; $H(\pi,\omega_2) = H(\omega_1,\pi) = 0$. Бұл — белгілі биномдық тегістеу маскасы.

БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ІСКЕ АСЫРУ

Python және MATLAB-та 2D СИС синтезі

Python (numpy, scipy)

```
P, wc = 21, 0.4*np.pi; c = P//2
n1, n2 = np.mgrid[-c:c+1, -c:c+1]
r = np.hypot(n1, n2) + 1e-12
hd = wc*j1(wc*r)/(2*np.pi*r)
hd[c, c] = wc**2/(4*np.pi)
w = np.where(r <= c+.5,
.54+.46*np.cos(np.pi*r/(c+.5)), 0)
h = hd*w; h /= h.sum()
y = convolve(img, h, mode='reflect')
```

MATLAB (Image Processing Toolbox)

```
[f1,f2] = freqspace(21,'meshgrid');
Hd = sqrt(f1.^2+f2.^2) < 0.4;
h1 = fwind1(Hd, hamming(21));
h2 = fsamp2(Hd);
b = firpm(20,[0 .36 .52 1],[1 1 0 0]);
h3 = ftrans2(b);
freqz2(h1); y = imfilter(I,h1);
```

fwind1 — 1D терезені айналдырады; fwind2 — 2D терезені тікелей қабылдайды.

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ТАПСЫРМА

Үш әдіспен 2D сүзгі синтездеу және кескінге қолдану

1. Нұсқа бойынша ωc, P және сүзгі түрін (ТЖС, ЖЖС, жолақтық) алыңыз.
2. Бөлінгіш және айналмалы терезелермен (Хемминг, Кайзер) синтездеңіз.
3. Жиіліктік таңдау әдісін өтпелі үлгілермен және оларсыз қолданыңыз.
4. Ремез прототипінен Мак-Клеллан түрлендіруімен сүзгі алыңыз.
5. Әр сүзгінің АЖС деңгей сызықтары мен 3D бетін салыңыз.
6. Шуланған кескінге қолданып, PSNR мен шеттердің сақталуын салыстырыңыз.

Есепте болуы тиіс

- Маска коэффициенттері
- Деңгей сызықтары және 3D АЖС
- Симметрия және басу кестесі
- PSNR салыстыруы
- Әдіс таңдаудың негіздемесі

Қолдану салалары

Медициналық кескіндер, қашықтықтан зондтау, теледидар, машиналық көру.

ӨЗІН-ӨЗІ ТЕКСЕРУ

Жылдам тест

1. 2D СИС нөлдік фазалы болу шарты?

А) $h(n_1,n_2) = h(-n_1,-n_2)$ Б) h бөлінгіш В) P жұп

2. Дөңгелек ТЖС-тің hd қай функциямен өрнектеледі?

А) sinc Б) J_1 Бессель В) Чебышев T_n

3. Зерттеуде басуы ең терең әдіс?

А) жиіліктік таңдау Б) Мак-Клеллан В) айналмалы терезе

4. MATLAB-та Мак-Клеллан түрлендіруі?

А) fsamp2 Б) ftrans2 В) fwind2

5. 2D ШИС сүзгілері сирек қолданылатын басты себеп?

А) есептеу көлемі Б) тұрақтылықты қамтамасыз ету қиын В) нақты уақытта жұмыс істемейді

Жауаптары: 1 — А, 2 — Б, 3 — В, 4 — Б, 5 — Б

ҚОРЫТЫНДЫ

Дәрістің негізгі тұжырымдары

01 2D өңдеуде СИС сүзгілері басым: нөлдік фаза кескін шекараларын бұзбайды, тұрақтылық мәселесі жоқ.

02 Айналмалы терезе дөңгелек симметрияны (ауытқу 1.1 %) және ең терең басуды (−63 дБ) берді.

03 Жиіліктік таңдау икемді, бірақ өтпелі үлгілерсіз үлкен толқын береді (басу небәрі −18 дБ).

04 Мак-Клеллан түрлендіруі 1D оңтайлы сүзгінің толқын деңгейін сақтап, 2D сүзгіге көшіреді.

ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ

Қазақша — орысша — ағылшынша

Қазақша	Русский	English
Екі өлшемді сүзгі	двумерный фильтр	two-dimensional (2D) filter
Нөлдік фазалы сүзгі	фильтр с нулевой фазой	zero-phase filter
Бөлінгіш терезе	сепарабельное окно	separable window
Айналмалы (дөңгелек) терезе	круговое окно	rotationally symmetric window
Жиіліктік таңдау	частотная выборка	frequency sampling
Жиілікті түрлендіру	частотное преобразование	frequency transformation (McClellan)
Маска (ядро)	маска (ядро) фильтра	kernel, mask

БЕКІТУ · 12-ДӘРІС

Бақылау сұрақтары

1. Неліктен 2D өңдеуде СИС сүзгілері жиі қолданылады?
2. 2D сүзгінің нөлдік фазалы болу шартын жазыңыз.
3. Бөлінгіш және айналмалы терезелердің айырмашылығы неде?
4. Дөңгелек ТЖС-тің $hd(n_1,n_2)$ өрнегін қорытып шығарыңыз.
5. Жиіліктік таңдауда өтпелі үлгілер не үшін енгізіледі?
6. Мак-Клеллан түрлендіруінің мәні неде?
7. ftrans2 функциясының кіріс-шығыс деректері қандай?