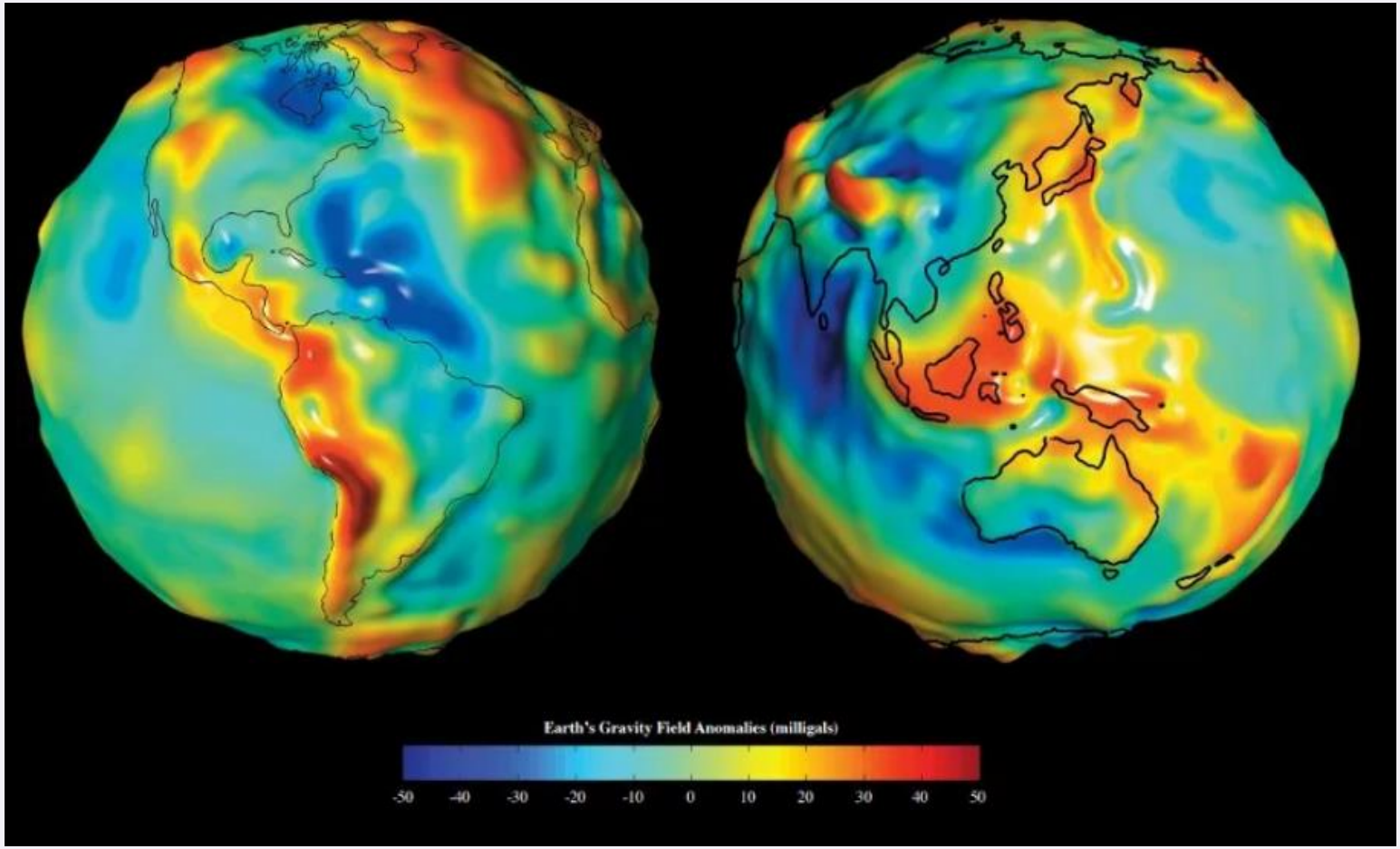
Гравиметрия

Л1. Предмет и задачи гравиметрии



Лектор

Кенесбаева А.

Содержание

- Предмет и задачи гравиметрии
- История развития и основные положения.
- Гравитационное поле Земли.
- Сила тяготения и ее потенциал.
- Основные виды потенциала тяготения и его свойства.

Предмет и задачи гравиметрии

- **Гравиметрия** – раздел геофизики – наука об измерении и изучении распределения силы тяжести и ее составляющих на земной поверхности.
- **В предмет** «Гравиметрия» входят вопросы использования результатов измерения силы тяжести для определения фигуры Земли и ее внутреннего строения, а также для изучения геологического строения ее верхних слоев: земной коры и мантии.
- **Задачей** гравиметрии является определение гравитационного поля Земли и других небесных тел как функции местоположения и времени по измерениям силы тяжести и гравитационных градиентов на поверхности тела или вблизи него.
- Теоретической основой гравиметрии является закон всемирного тяготения Ньютона.
- Основными измеряемыми величинами в гравиметрии являются ускорение силы тяжести (УСТ) и вторые производные потенциала силы тяжести (ПСТ).
- Сила тяжести есть сила, с которой масса в одну единицу (1 г) притягивается к Земле.
- Сила тяжести характеризуется ускорением, которое она придает свободно падающему телу.

История развития

- Первые измерения ускорения силы тяжести были выполнены в 1590 г. веке Галилеем.
- Он использовал открытый им закон свободно падающего тела, согласно которому тело в первую секунду падения проходит путь, равный половине ускорения силы тяжести.
- Найденное значение УСТ оказалось довольно грубым, так как метод очень точное измерения длины и времени в XVI веке было невозможно.
- Кроме того, Галилей не учитывал сопротивление воздуха.
- Толчок к развитию гравиметрии дало опубликование Гюйгенсом в 1673 году уравнения математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

- где T – период колебания математического маятника;
- l – приведенная длина математического маятника;
- g – ускорение силы тяжести.
- Маятниковые приборы и по сей день применяются, в силу своей простоты и удобства.

История развития

- **Приведённая длина́** — величина, измеряемая в единицах длины и условно вводимая для описания физического объекта в тех или иных задачах, но, возможно, не связанная напрямую с его размером. Чаще всего используется применительно к физическому маятнику.

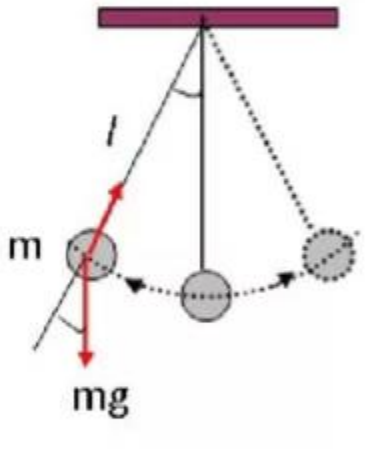
- В этом случае под приведённой длиной понимается лина математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний изучаемого физического маятника.
- Она вычисляется как

$$l = \frac{I}{ma}.$$

где I – момент инерции данного физического маятника относительно точки подвеса, m – масса, a - расстояние от точки подвеса до центра масс.

Математический маятник

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой , подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и совершающая колебания под действием силы тяжести.



Период колебаний математического маятника

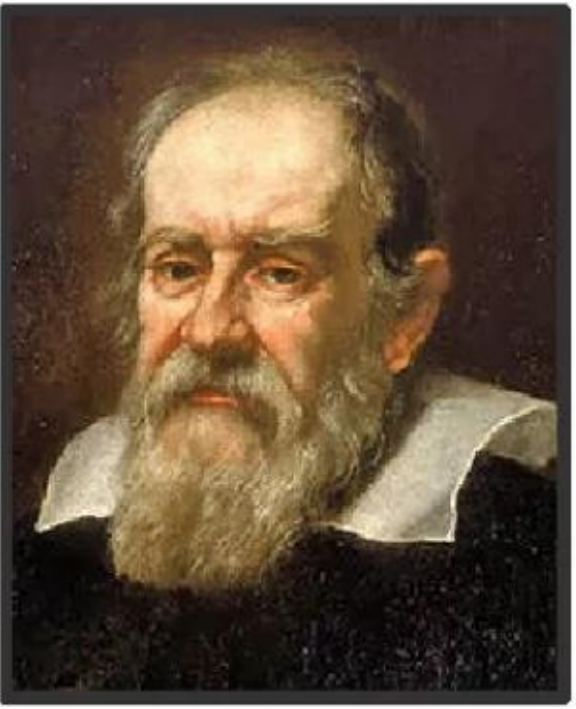
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Круговая (циклическая) частота собственных колебаний

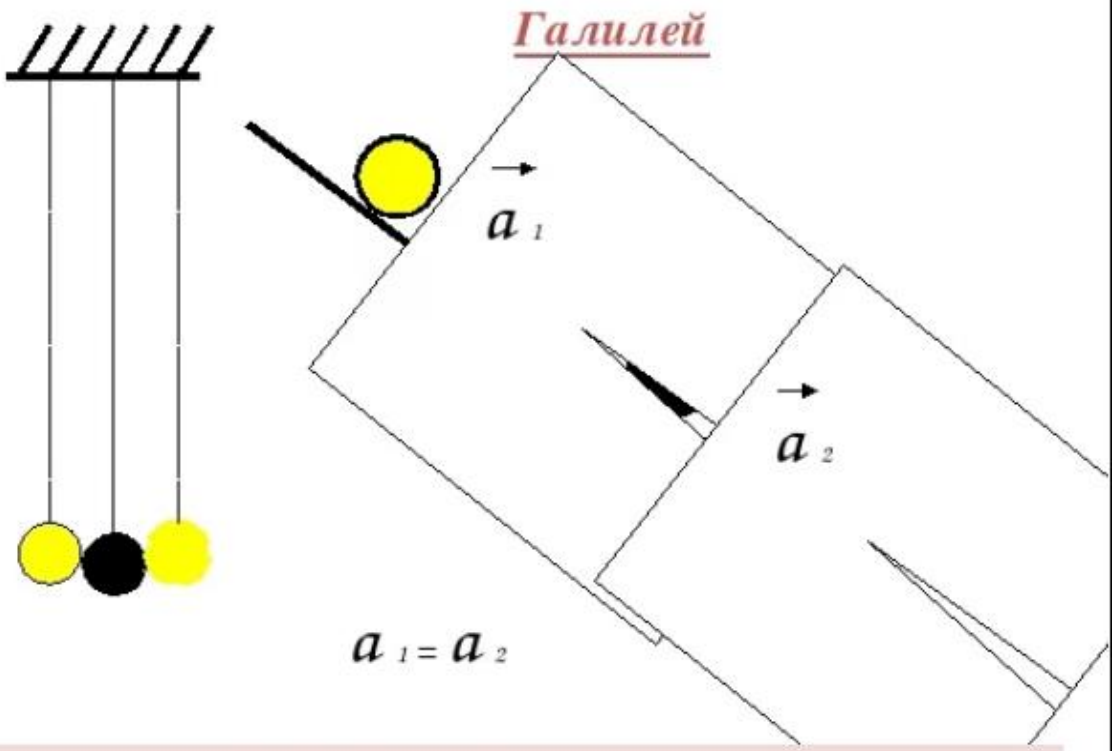
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \omega_0 = 2\pi\nu \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ν – частота колебаний (число колебаний в единицу времени)

Опыты Галилея

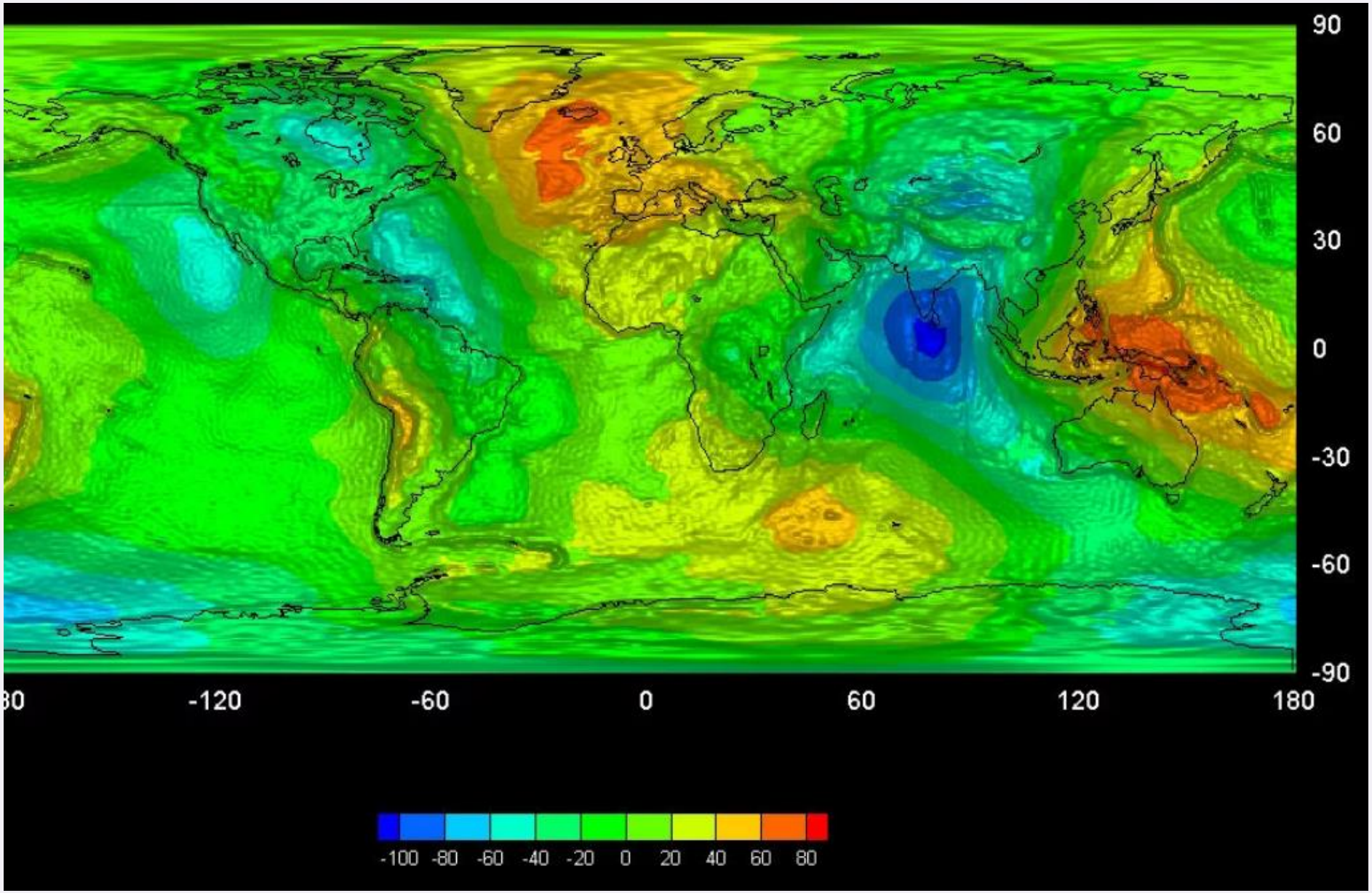


Галилео Галилей (1564-1642) – выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания.



Галилей обнаружил, что шары одинакового диаметра, изготовленные из дерева, золота, слоновой кости, движутся по желобу с одинаковыми ускорениями а = 9,8 м/с2. Итак, ускорения не зависят от массы шаров!

Гравитационная карта Земли по данным Европейского спутника GOCE



История развития

- Первые маятниковые измерения выполнялись не с целью определения УСТ, а для задания эталона длины. УСТ принималось как постоянная.
- Сомнения впервые заложил астроном Рише в 1672 году, заметив, что длина секундного маятника в Кайенне, вблизи экватора, оказалась на 3 мм короче, чем длина этого же маятника вблизи Парижа.
- На самом же деле изменилась не длина маятника, а ускорение силы тяжести, что было доказано Ньютоном (1686 г.) и Гюйгенсом (1691 г.), которые показали *зависимость УСТ от широты наблюдения, формы Земли и скорости вращения Земли.*
- В 1743 году эта зависимость была подтверждена доказательством теоремы Клеро, состоящей из двух формул: первая показывает зависимость изменения УСТ от широты, а вторая – позволяет вычислить сжатие Земли по гравиметрическим данным.
- После опубликования теоремы Клеро гравиметрия стала неотъемлемой частью геодезии.
- В дальнейшем развитие гравиметрии определяется как техническими возможностями, так и научными задачами *геодезии и геофизики*.

История развития

В соответствии с применяемой аппаратурой и решаемыми задачами выделяют *четыре этапа развития гравиметрии*:

- становление теоретических основ (XVII – XVIII вв.);
- совершенствование маятниковых приборов и начало их использования в глобальных задачах геодезии и геофизики (XVIII – XIX вв.);
- развитие вариометров и статических гравиметров и региональные гравиметрические съемки для геофизики (первая половина XX века);
- развитие баллистических гравиметров и создание прецизионных гравиметрических сетей для решения задач геодезии, геофизики и геодинамики (начиная со второй половины XX в.).

- К концу 80-х – началу 90-х годов прошлого столетия был достигнут большой прогресс в постановке работ по мировой гравиметрической съемке.
- Создана надежная опорная гравиметрическая сеть, отвечающая мировым стандартам.
- Достигнут прогресс в гравиметрическом изучении Мирового океана.

Гравиметрический пункт



История развития

- В последние годы в связи с широким развитием в мире спутниковых технологий появилась спутниковая гравиметрия.
- Она занимается созданием карт аномалий силы тяжести в свободном воздухе по данным картирования формы поверхности океана.
- Существенный прогресс в преобразовании высот поверхности океана в гравитационные карты был достигнут после запуска геодезических спутников GEOSAT и ERS-1 (1995 г.).
- В настоящее время спутниковая гравиметрия располагает точностью 3 – 7 мГал и разрешением объектов размером 20 – 30 км.
- Точность возрастает при совместном использовании результатов спутниковых измерений с данными локальных гравиметрических съемок.

Гравиданные используются для решением ряда научных и практических задач как:

- ✓ построение моделей внутреннего строения Земли, в первую очередь, земной коры;
- ✓ изучение вариаций земного гравитационного поля во времени;
- ✓ учет влияния дальних зон при точном вычислении высот квазигеоида, уклонений отвеса;
- ✓ получение данных для изучения неуровенности поверхности Мирового океана.

Гравиметрия

GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment)*

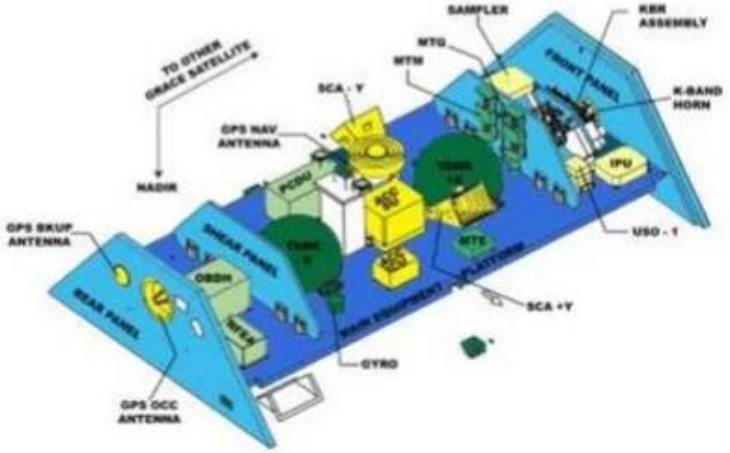
2 спутника на полярной орбите высотой 500 км.

Запущены 17 марта 2002 г.

Движение и ориентация измеряется с помощью GPS, звёздных датчиков, микроволновой и лазерной дальнометрии.

Спутники пролетают над каждым участком Земли приблизительно раз в месяц





Спутник GOCE

- ✓ Спутник **GOCE** (англ. *Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer* — «исследователь гравитационного поля и установившихся океанских течений», научно-исследовательский спутник, проект ЕКА.
- ✓ Запущен 17 марта 2009 года, прекратил существование 11 ноября 2013 года. Предназначен для изучения гравитационного поля Земли и геоида.
- ✓ Стрелообразная форма спутника, а также его «плавники», помогали спутнику сохранять ориентацию и уменьшали торможение в верхней атмосфере, которое довольно значительно на высоте его орбиты — около 260 км.
- ✓ Низкая орбита спутника и высокая точность наблюдений, позволили улучшить точность определения геоида до 1—2 см на масштабах порядка 100 км[1].
- ✓ Данные со спутника GOCE нашли многочисленные применения, в том числе при изучении опасных вулканических регионов и прояснении поведения океана. Динамика океана являлась одной из главных целей спутника.
- ✓ Сопоставляя полученную информацию о форме геоида с информацией о высоте поверхности океана, полученной высотометрическими спутниками, учёные смогли проследить направление и скорость геострофических океанских течений.

Спутник GOCE



1 сентября 2013 года координатор проекта, сотрудник ЕКА Рюне Флоберхаген сообщил, что запас ксенона на спутнике должен закончиться 16−17 октября ± 2 недели, после чего в течение трёх недель спутник войдёт в плотные слои атмосферы и сгорит.
Последний раз контакт со спутником был установлен в 2:42 по московскому времени, когда станция космической связи в Антарктиде получила с него телеметрическую информацию. В этот момент космический аппарат находился на высоте менее 120 километров, при этом температура его главного компьютера была около 80 градусов Цельсия, а батареи — около 84. По данным ЕКА, после этого момента связь с ним больше установить не удалось[9].

Приложения гравиметрии продолжить

- Определение фигуры нашей планеты основано на связи формы поверхности Земли с элементами гравитационного поля.
- Решение редукционной задачи высшей геодезии, определение геодезических координат и высот выполняются по гравиметрическим данным.
- Результаты измерения силы тяжести и фиксация ее изменения во времени позволяют изучать внутреннее строение Земли, определять ее физические параметры.
- Все явления, происходящие на поверхности Земли, связаны с перемещением масс внутри нее.
- Эти явления можно фиксировать при постоянном мониторинге гравитационного поля в тектонически активных областях и тем самым делать прогноз возможных землетрясений или извержений вулканов.
- Для повышения точности расчета орбит ИСЗ используют гравиметрических данные.
- Строительство уникальных объектов: ускорители частиц, антенны радиотелескопов, телебашни, прокладка протяженных подземных коммуникаций, невозможны без учета неоднородностей гравитационного поля, с которыми связано положение отвесных линий.

Приложения гравиметрии

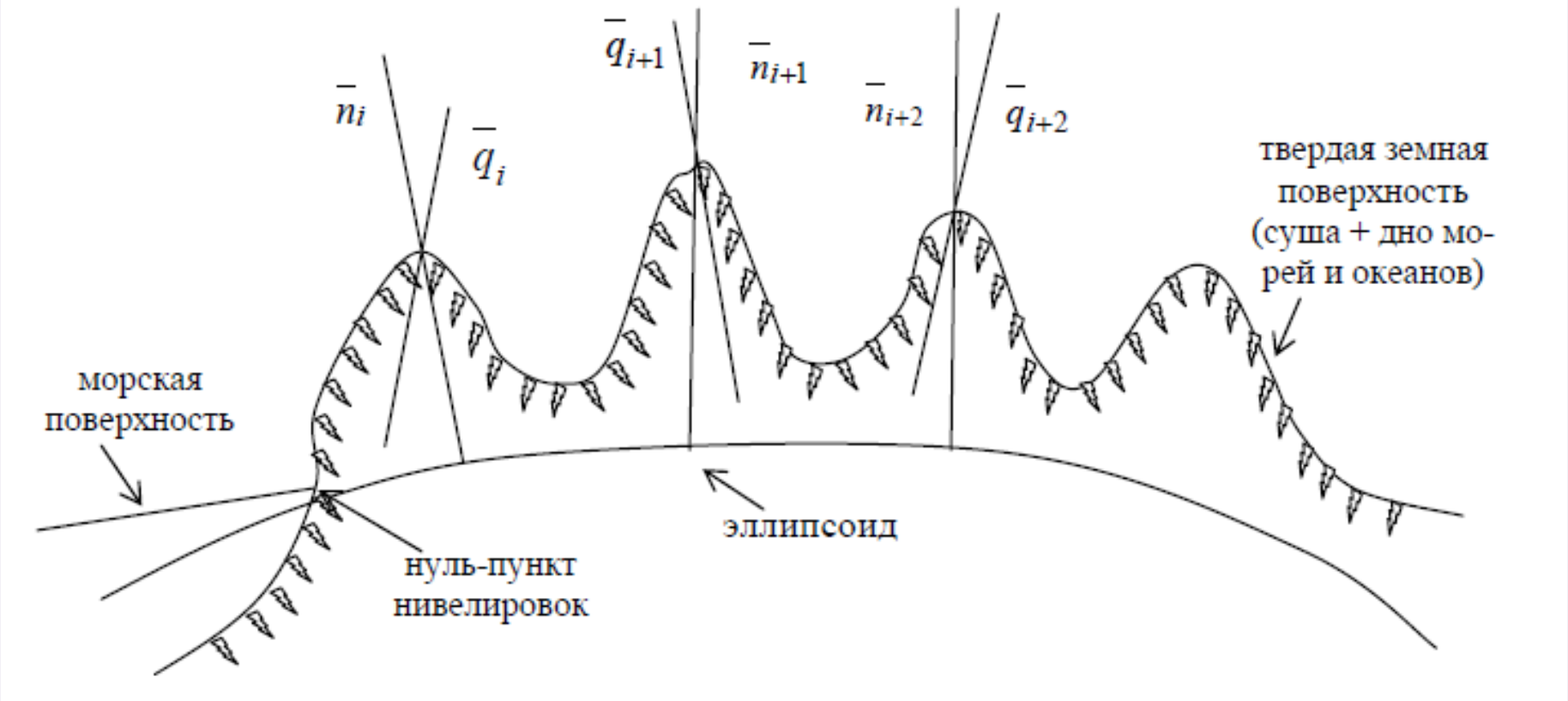


Иллюстрация к проблеме редуцирования результатов геодезических измерений: *qi* ,*qi*+1,*qi*+2... – направления отвесных линий, совпадающие с осями вращения геодезических инструментов в момент измерений; *ni* ... – направления нормалей к эллипсоиду

Основные положения

- Теоретическое обоснование явления притяжения между телами сделал Исаак Ньютон, который вывел закон всемирного тяготения:

$$F = f \cdot \frac{m_1 \times m_2}{r^2}, \text{ Н}$$

- где $m1$ и $m2$ – массы притягиваемых тел, кг;
- r – расстояние между телами, м;
- f – гравитационная постоянная, или коэффициент пропорциональности
- между левой и правой частями формулы, м³/(кг · с²).
- ***Закон всемирного тяготения Ньютона является теоретической основой гравиметрии.***

Численное значение f первым определил в 1789 г. английский физик Г. Кавендиш (1731–1810) на основе крутильных весов.

Значение f получилось равным (6,673 ± 0,003) · 10-11м³/(кг · с²).

В настоящее время значение f равно (6,67259 ± 0,00085) · 10-11м³/(кг · с²).

Основные положения

- Сила тяжести – сила, с которой все тела притягиваются Землей. Для шарообразной Земли с массой *M* и радиусом *R* однородной по плотности сила притяжения определяется по формуле:

$$\overline{F} = \frac{fM}{\overline{R}^2}.$$

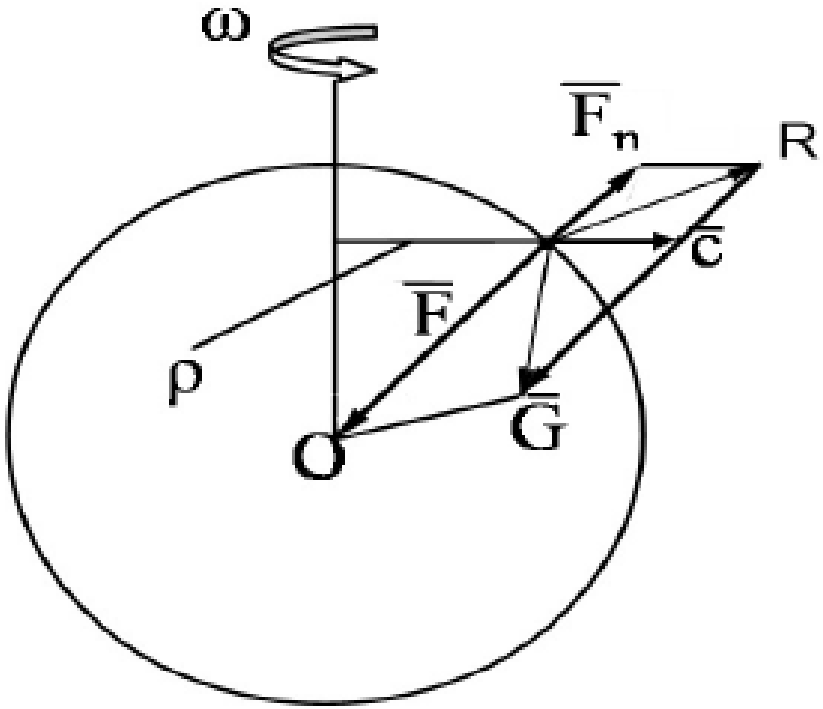
- Вектор силы притяжения *F* направлен к центру Земли.
- На точечную массу находящуюся на поверхности реальной Земли, вращающейся вокруг своей оси со скоростью w, кроме силы ньютоновского тяготения действует центробежная сила *C* и сила притяжения небесных тел *Fn* .
- Центробежная сила вычисляется по формуле:

$$C = \omega^2 \rho,$$

- где ρ – расстояние точки N от оси вращения Земли;
- ω– угловая скорость вращения Земли;
- Равнодействующей этих сил является сила тяжести *G* .
- В каждой точке земной поверхности с единичной массой (*m* = 1) существует единственный вектор силы тяжести.
- Совокупность векторов *G* образует поле силы тяжести – гравитационное поле.

Основные положения

- Направление отвесной линии в пространстве совпадает с вектором силы тяжести.
- Размерность силы тяжести $\dim G = L \times M \times T^{-2}$, где L – длина (м), M – масса (кг), T – время (с).



Силы, действующие на точку физической поверхности Земли

Гравитационное поле Земли

Вселенная это сложным организм, населенный множеством различных тел, планет, частиц, взаимодействующих друг с другом.

Взаимодействие обитателей Вселенной происходит через физические поля: электромагнитные, силовые, ядерные, температурные, плотностные и т.д., каждое из которых решает определенную роль в общем функционировании организма Вселенной.

Каждое силовое поле характеризуется силой и потенциалом силы.

Потенциал силы - вспомогательная функция, частные производные которой по осям координат равны проекциям силы на эти оси.

Обозначив потенциал через *R*, а силу через *G*, запишем математическое выражение для потенциала согласно его определению:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= G_x = G \cdot \cos(\overline{G}\,\hat{}\,\overline{x}) \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= G_y = G \cdot \cos(\overline{G}\,\hat{}\,\overline{y}) \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= G_z = G \cdot \cos(\overline{G}\,\hat{}\,\overline{z}) \end{aligned}\right\}$$

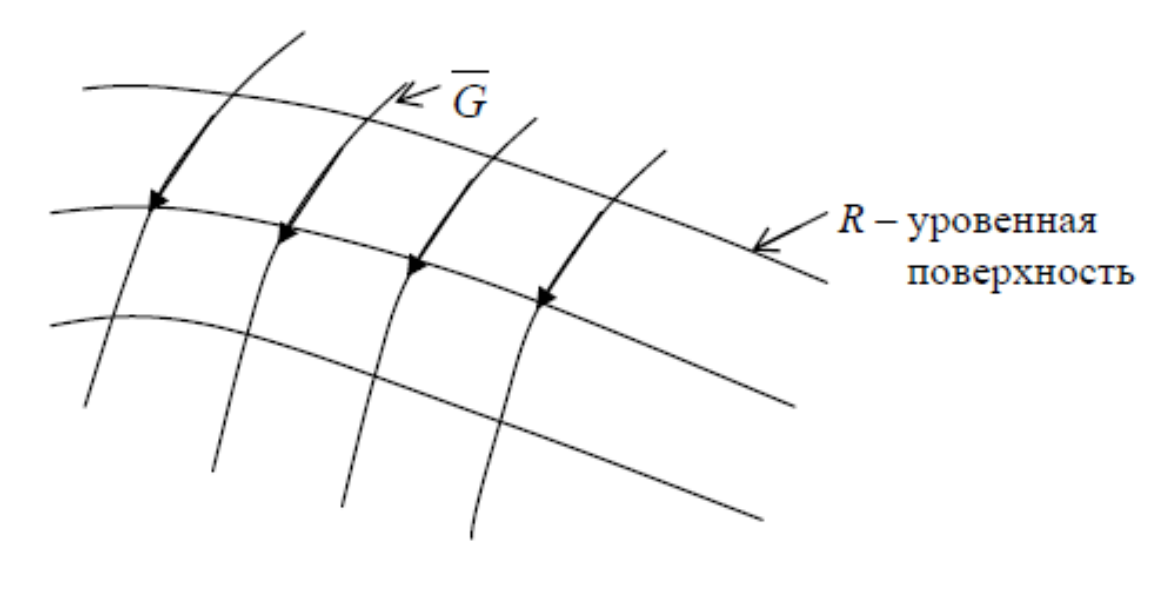
Гравитационное поле Земли

Понятие потенциала силы введено для удобства решения практических задач гравиметрии.

Графически каждое силовое поле представляется в виде силовых линий и уровенных поверхностей.

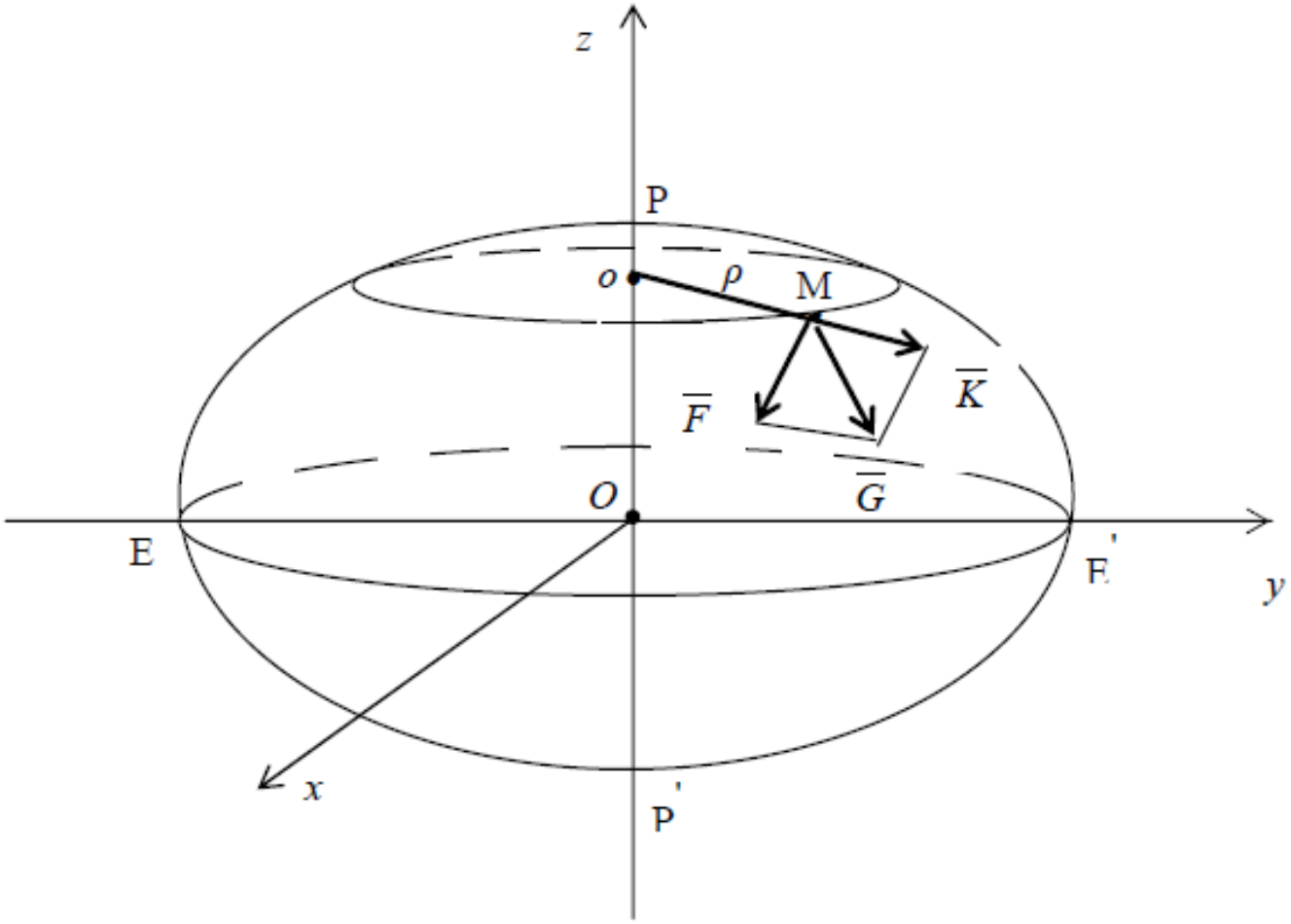
Силовые линии – это линии, в каждой точке которых касательная совпадает с направлением вектора силы.

Поверхности, всюду перпендикулярные силовым линиям, называются **уровенными или изопотенциальными поверхностями**.



Сила тяжести, центробежная сила. Их потенциалы

- На каждую точку М, находящуюся на земной поверхности, действует 2 силы: сила тяготения F и центробежная сила K , вызванная вращением Земли



F – сила тяготения; K – центробежная сила; G – сила тяжести;
ρ – радиус круга, по которому вращается точка М ($\rho = oM$)

Сила тяжести, центробежная сила. Их потенциалы

Равнодействующую этих сил $\overline{G}$ принято называть силой тяжести.

$$\overline{G} = \overline{F} + \overline{K}. \qquad (2.21)$$

Величина центробежной силы $\overline{K}$ определяется из выражения

$$K = \omega^2 \cdot \rho, \qquad (2.22)$$

где ω – угловая скорость вращения Земли;
ρ – радиус малого круга, по которому вращается точка М.
Потенциал центробежной силы *K* обозначается буквой *Q*.
Согласно определению математическое выражение для потенциала центробежной силы имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= K_x \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= K_y \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= K_z \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

Сила тяжести, центробежная сила. Их потенциалы

- В формулах (2.23) *Kx*, *Ky*, *Kz* – проекции центробежной силы соответственно на оси *x*,*y*,*z* .
- Потенциал центробежной силы находится по формуле

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \qquad (2.24)$$

Формула (2.24) доказывается, исходя из математического выражения для потенциала центробежной силы.

Для Земли он равен нулю на полюсе и имеет максимальное значение на экваторе.

Оператор Лапласа для потенциала центробежной силы записывается в виде:

$$\Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 2\omega^2. \qquad (2.25)$$

Потенциал силы тяжести обозначается буквой *W* и равняется сумме потенциалов силы тяготения (*V*) и центробежной силы (*Q*):

$$W = V + Q. \qquad (2.26)$$

Вторые производные потенциала силы тяжести

Потенциал силы тяжести имеет шесть вторых производных:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2};\quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2};\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y};\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z};\quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}.$$

Если ось *z* направлена по направлению силы тяжести, а оси *x* и *y* расположены в плоскости горизонта и имеют направление, соответственно, на север и на восток, то физический смысл вторых производных будет

Производная $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$ есть *вертикальный градиент силы тяжести*, который показывает скорость изменения (уменьшения) силы тяжести с высотой.

Производные $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}$ – это *горизонтальные градиенты силы*

Они характеризуют изменения силы тяжести в горизонтальной плоскости: первая – в направлении меридиана, вторая – в направлении первого вертикала. Знание горизонтальных градиентов силы тяжести дает возможность определить *полный горизонтальный градиент,* под которым понимается геометрическая сумма векторов *dg/dx и dg/dy.*

Вторые производные потенциала силы тяжести

Величина этого вектора равна

$$\frac{\partial g}{\partial S}=\sqrt{(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}=\sqrt{(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial z})^2+(\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial z})^2},$$

а угол α с осью x , то есть азимут плоскости, в котором лежит полный горизонтальный градиент, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\partial z}}{\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\partial z}}.$$

Изменение силы тяжести во времени

Сила тяжести зависит от многих факторов.

Она зависит от взаимного расположения Земли и других небесных тел, в основном, Луны и Солнца, от скорости вращения Земли, состояния атмосферы, уровня грунтовых вод, хозяйственной деятельности человека и т.д.

Поэтому **с течением времени величина и направление силы тяжести изменяются.** Эти изменения принято делить на приливные и неприливные.

Неприливные изменения силы тяжести, в свою очередь, можно разделить на вековые, периодические и непериодические.

Причиной вековых изменений силы тяжести является вековое изменение скорости вращения Земли, а также ряд геофизических факторов, связанных с перемещениями глубинных масс внутри Земли, например, движением литосферных плит.

Величины вековых изменений малы и в обычных гравиметрических измерениях не учитываются.

Изменение силы тяжести во времени

Причиной неприливных периодических изменений силы тяжести являются различные метеорологические факторы:
годовые и суточные колебания атмосферного давления, сезонные выпадения осадков, колебания уровня грунтовых вод и влажности почвы.
Амплитуды этих изменений невелики и составляют менее 10 мкГал.
Непериодические вариации силы тяжести обусловлены неравномерностью скорости вращения Земли, землетрясениями и извержениями вулканов, хозяйственной деятельностью человека и т.д.
Вызываемые этими явлениями изменения силы тяжести могут быть сравнительно велики.
Например, вариации скорости вращения Земли вызывают изменения силы тяжести на 2 – 3 мкГал в месяц.
Строительство котлована глубиной 1 м вызовет изменение силы тяжести на границе этого котлована примерно на 0,05 мГал.
Колебания уровня воды в водохранилище ГЭС на 25 м вызывают вариации силы тяжести в прибрежной зоне порядка 1,5 – 2,0 мГал.
Ясно, что факт изменения силы тяжести во времени необходимо учитывать в геодезических измерениях.

Потенциал силы тяготения. Его основные виды

Произвольная часть

Потенциал силы тяготения F есть некоторая вспомогательная функция V, частные производные которой по осям координат равны проекциям силы тяготения на эти оси.

Математическое выражение для потенциала силы тяготения имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= F_x = F \cdot \cos(\overline{F}\,\hat{}\,\overline{x}) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= F_y = F \cdot \cos(\overline{F}\,\hat{}\,\overline{y}) \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= F_z = F \cdot \cos(\overline{F}\,\hat{}\,\overline{z}) \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Наиболее употребляемые на практике простейшие виды потенциала силы тяготения:

– потенциал тяготения точечной массы;

– потенциал тяготения объемных масс;

– потенциал тяготения простого слоя.

Потенциал силы тяготения. Его основные виды

Потенциал тяготения точечной массы m.

Пусть в точке M с координатами (a, b, c) расположена точечная масса m, а в точке P с координатами (x, y, z) расположена единичная масса $mi = 1$. Потенциал тяготения точечной массы в этом случае будет равен

$$V = f \cdot \frac{m}{r} . \qquad (2.5)$$

Докажем формулу (2.5). Исходя из определения потенциала силы тяготения, для выражения (2.5) должны быть справедливыми равенства (2.4). То-есть, если мы возьмем производные от потенциала V по x, y, z, то, должны выполняться равенства (2.4).

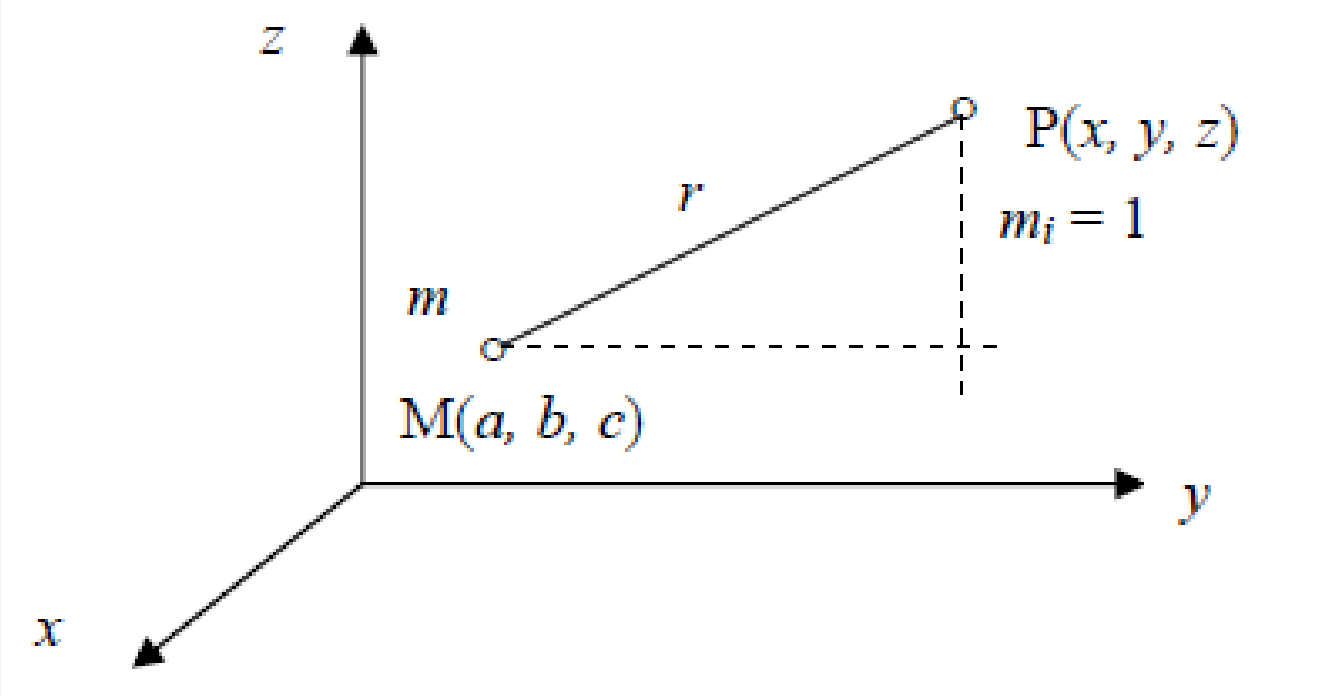
Запишем закон всемирного тяготения для случая, представленного на рисунке в виде выражения

$$F = -\frac{f \cdot m}{r^2} \qquad (2.6)$$

и возьмем частные производные

$$\frac{\partial V}{\partial x}; \frac{\partial V}{\partial y}; \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Потенциал силы тяготения. Его основные виды



Согласно рисунку расстояние r выразим через разность координат:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 . \qquad (2.7)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, запишем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}; \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}; \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z}. \qquad (2.8)$$

Потенциал силы тяготения. Его основные виды

Из формулы (2.5)

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{f \cdot m}{r^2}. \qquad (2.9)$$

Из формулы (2.7)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x-a)}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{(y-b)}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{(z-c)}{r}. \qquad (2.10)$$

Подставляя формулы (2.9) и (2.10) в формулу (2.8) и учитывая (2.6), получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{f \cdot m}{r^2} \cdot \frac{(x-a)}{r} = F_x; \qquad (2.11)$$

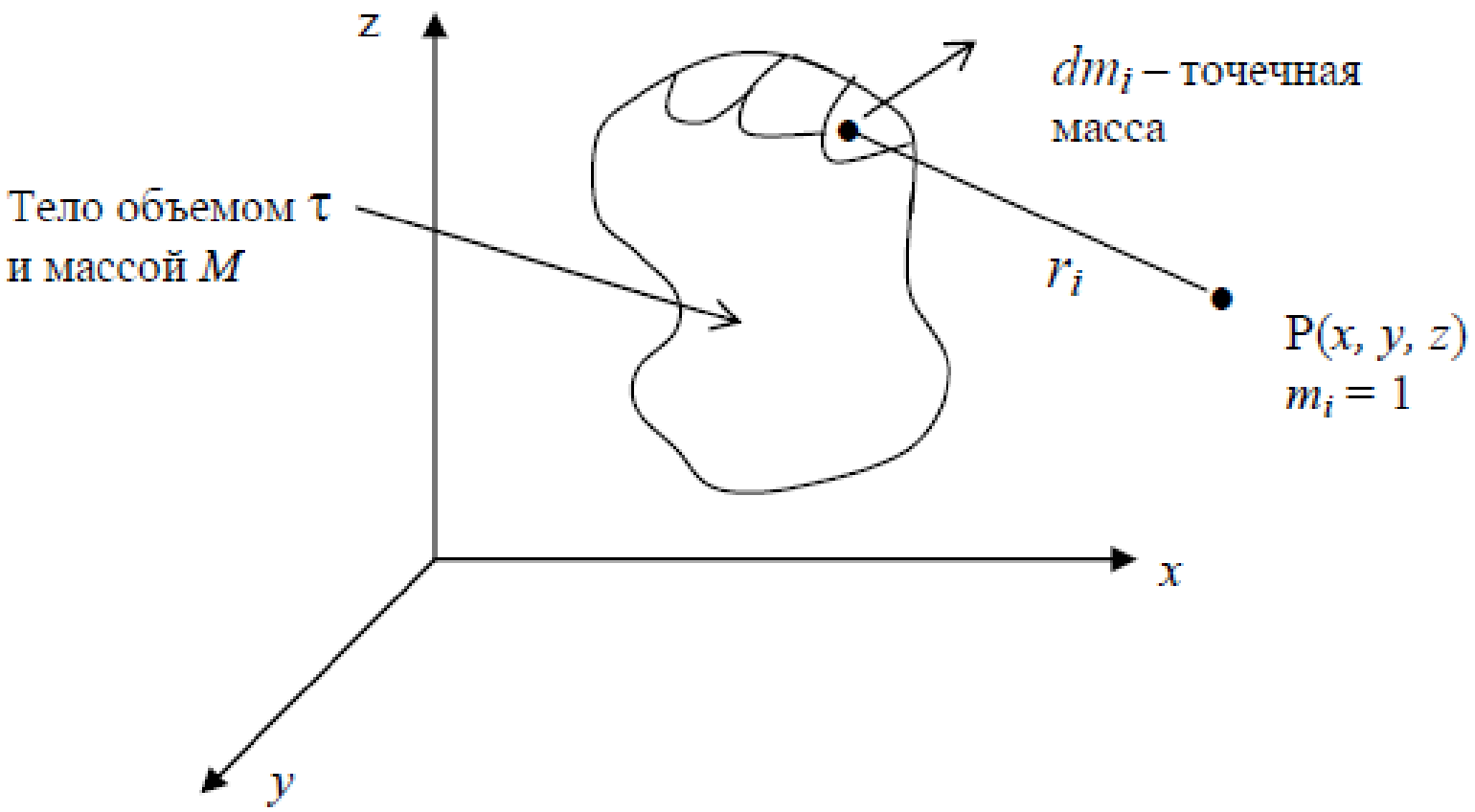
$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{f \cdot m}{r^2} \cdot \frac{(y-b)}{r} = F_y; \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{f \cdot m}{r^2} \cdot \frac{(z-c)}{r} = F_z. \qquad (2.13)$$

Следовательно, выражение (2.5) действительно есть выражение для потенциала силы тяготения точечной массы.

Потенциал силы тяготения. Его основные виды

- *Потенциал тяготения объемных масс или тела.* Для вывода формулы для потенциала тела разобьем притягивающую массу M на бесконечно большое число элементарных масс dm, которые будем рассматривать как точечные массы



Потенциал силы тяготения. Его основные виды

- Потенциал тяготения элементарной массы, находящейся в текущей точке, для точки P будет равен

$$dV_i = f \cdot \frac{dm_i}{r} = f \frac{\delta \cdot d\tau}{r}, \qquad (2.14)$$

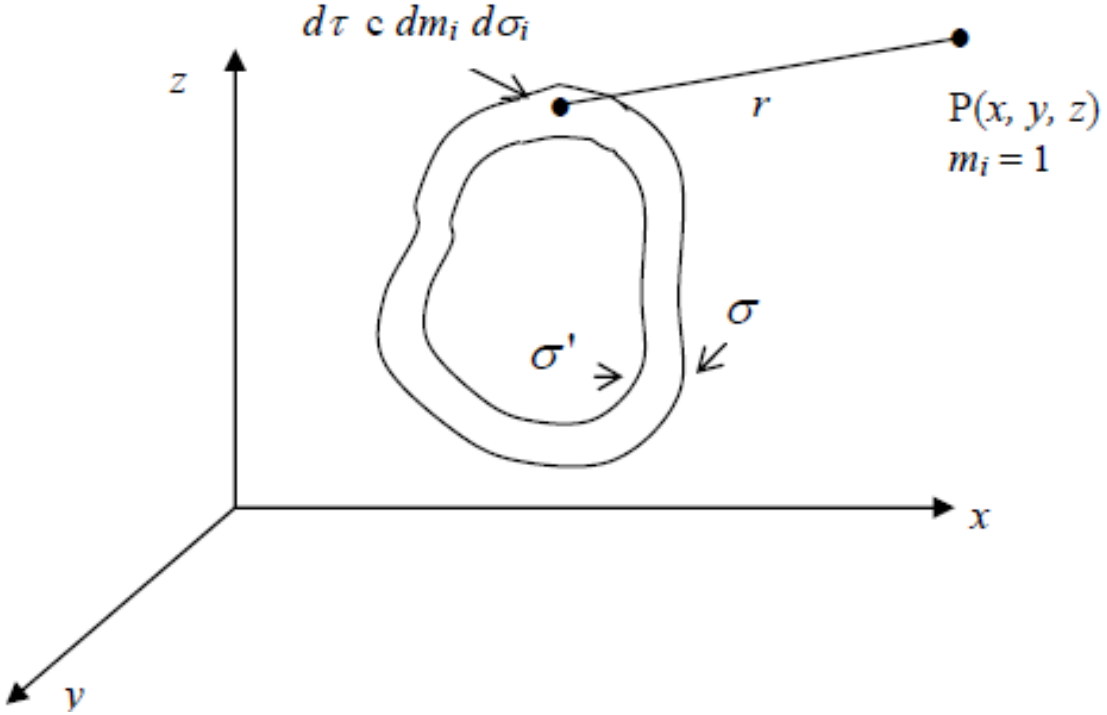
где dVi – потенциал силы тяготения, создаваемый элементарной массой;
$d\tau$ – элементарный объем;
$dm = \delta \cdot d\tau$;
f – гравитационная постоянная.
Предполагая, что непрерывное распределение масс внутри тела известно, можно записать

$$V = f \iiint_{\tau} \frac{\delta \cdot d\tau}{r}, \qquad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что для определения потенциала тяготения тела необходимо знать форму поверхности, ограничивающей данное тело, и плотность в каждой точке как внутри тела, так и на его поверхности.

Потенциал силы тяготения. Его основные виды

- *Потенциал тяготения простого слоя.* Вначале уясним понятие простого слоя. Пусть мы имеем две поверхности (σ и σ') , расположенные бесконечно близко друг к другу.
- Обозначим через τ объем, заключенный между этими двумя поверхностями.
- Разобьем объем τ на элементарные объемы $d\tau$ с элементарными массами dm и будем неограниченно приближать поверхность σ' к σ , но при этом оставлять неизменной массу внутри элементарного объема.



Потенциал силы тяготения. Его основные виды

- В результате масса будет сконденсирована на поверхность σ, и этот слой не будет иметь толщины.
- **Такое распределение масс называют простым слоем.**
- Физически простого слоя в природе не существует, но понятие это вводится, для упрощения математических выводов в теории потенциала.
- Формулу для потенциала тяготения простого слоя напишем по аналогии с формулой для потенциала тяготения объемных масс:

$$V = f \iint_{\sigma} \frac{\mu \cdot d\sigma}{r}, \qquad (2.16)$$

где $d\sigma$ – элементарный участок поверхности слоя;
μ – поверхностная плотность слоя;
σ – поверхность слоя;
r – расстояние от элементарного участка слоя до текущей точки P.

Свойства потенциал силы тяготения

- ***Физический смысл потенциала силы тяготения.*** Потенциал силы тяготения есть работа, которую совершает сила тяготения при перемещении единичной массы из бесконечности в данную точку.
- Уравнение уровенных поверхностей для потенциала силы тяготения имеет вид

$$V_i = \text{const.} \qquad (2.17)$$

Свойства потенциала силы тяготения:

- Потенциалы тяготения объемных масс и простого слоя непрерывны, однозначны и конечны во всем пространстве.
- Вне притягивающих масс потенциалы тяготения имеют непрерывные производные любых порядков.
- Первые производные потенциала тяготения объемных масс непрерывны во всем пространстве.
- Первые производные потенциала тяготения простого слоя терпят разрыв при пересечении слоя.
- Вторые производные потенциала тяготения объемных масс меняются скачком там, где скачком меняется плотность.

Свойства потенциал силы тяготения

- Потенциал силы тяготения во внешнем пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа (2.18), а во внутреннем – уравнению Пуассона (2.19).

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \qquad (2.18)$$

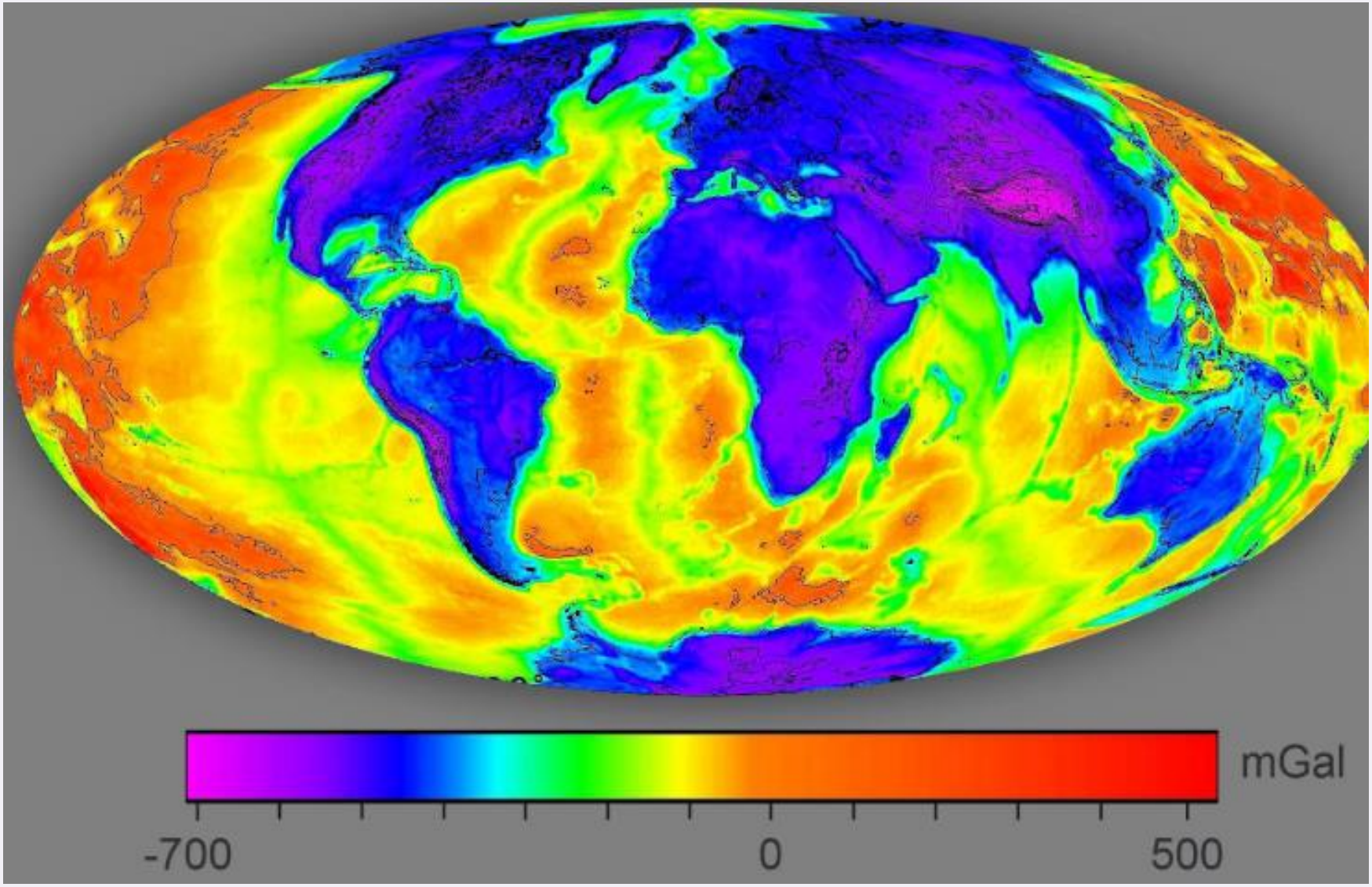
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi f \delta, \qquad (2.19)$$

где δ – объемная плотность в данной точке.

- На бесконечности потенциалы силы тяготения являются регулярными функциями, то есть удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} V = 0 \\ &\lim_{r\to\infty} r \cdot V = f \cdot M \\ &\lim_{r\to\infty} \left| \frac{r^2 \partial V}{\partial r} \right| = f \cdot M \end{aligned}\right\}. \qquad (2.20)$$

Гравитационное поле Земли



Полезные ссылки

- Кузьмин, В.И. Гравиметрия [Текст]: учеб. пособие / В.И. Кузьмин. – Новосибирск: СГГА, 2011. – 193 с.
- Гравиметрия : учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1-56 01 02 «Геодезия»/сост. и общ. ред. Г. А. Шароглазовой. – Новополоцк : ПГУ, 2006 – 196 с.
- https://youtu.be/l8U5m8_jSbk Гравитационное силовое поле
- https://ok.ru/video/40718830194 Гравитационные волны