Гравиметрия

Л10. Гравиметрическая изученность Земли. Измерения ускорения силы тяжести на море и в воздухе. Эффект Этвеша



Лектор Кенесбаева А.

Содержание

- Гравиметрическая изученность Земли
- Измерения ускорения силы тяжести на море и в воздухе.
- Эффект Этвеша.
- Амплитудно-частотный спектр возмущающих ускорений при измерениях на море.
- Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация.

Гравиметрическая изученность Земли

Для характеристики изученности гравитационного поля Земли используют среднее значение силы тяжести на стандартных трапециях (1×1)° или (5×5)°.

При этом трапеция считается изученной, если на нее имеется хотя бы один гравиметрический пункт.

В гравиметрическом плане Земля изучена очень неравномерно.

Северное полушарие изучено лучше, чем южное, и на него приходится 80 % всех гравиметрических работ.

Материки изучены больше, чем водные акватории.

Хорошо изучены территории Европы, Северной Америки, Австралии, но слабо – Африки и Антарктиды.

Из морских акваторий наиболее изученным является Средиземное море.

Существующей в настоящее время мировой гравиметрической съемки недостаточно для надежного определения гравитационного поля Земли только по гравиметрическим данным.

Поэтому, в последнее время, привлекают результаты спутниковых измерений и наземных геодезических измерений.

Гравиметрическая изученность Земли

Результаты мировой и региональных гравиметрических съемок хранятся в базах гравиметрических данных. База данных по земному шару существует под эгидой МАГ в международном гравиметрическом бюро (МГБ, Тулуза, Франция).

Информация, хранимая в базе МГБ, содержит:

– номер источника информации по нумерации МГБ;

– номер банка, широту и долготу;

– точность координат с указанием системы координат;

– класс точности (например, пункт национальной сети 1-го класса);

– тип местности (суша, поверхность моря и т.д.), высоту пункта и ее точность;

– измеренное значение силы тяжести и ее точность;

– систему отсчета (например, МГСС-71), исходные пункты, калибровочные параметры;

– аномалию в свободном воздухе и аномалию Буге; точность их определения;

– информацию о поправке за рельеф и принятом значении плотности, величину поправки за рельеф;

– название используемого гравиметра, условия измерений;

– изостатические аномалии, скорость судна,

–поправку Этвеша, время наблюдений, код страны, порядковый номер

Измерения ускорения силы тяжести на море и в воздухе

При гравиметрической съемке морей и океанов, занимающих 70% поверхности Земли, применение традиционной методики сухопутных измерений возможно только в прибрежной мелководной полосе.

Съемку всей остальной акватории приходится проводить в совершенно иных условиях, по следующим причинам.

1. **Прибор находится на подвижном носителе** (судно, подводная лодка), движение которого неравномерно вследствие волнения моря, течений, ветра.

Поэтому измерения на море сопровождаются помехами, обусловленными знакопеременными инерционными возмущающими ускорениями и наклонами основания.

Амплитуда возмущающих ускорений достигает 10—20% от величины g и в 104—105 раз превышает изменения силы тяжести по маршруту судна.

Дополнительные возмущающие ускорения возникают из-за вибраций двигателей и механизмов судна и от ударов волн о его корпус.

В связи с этим для измерений на море необходимы приборы особой конструкции, позволяющие регистрировать изменения силы тяжести на фоне больших помех, а также специальная методика измерений.

Сложность обработки результатов и учета целого ряда поправок приводят к необходимости автоматизации измерений и обработки.

Измерения ускорения силы тяжести на море и в воздухе

2. В длительном плавании судна начальные и заключительные опорные наблюдения на береговом пункте разделены большим промежутком времени (несколько недель или месяцев), измерения проводятся в большом диапазоне изменения силы тяжести. Все это предъявляет высокие требования к стабильности смещения нуль-пункта и к точности эталонирования гравиметров.

3. В открытом море часто затруднено определение координат судна и глубины моря (особенно в глубоководных районах) с точностью, необходимой для учета поправок и для вычисления аномалий силы тяжести.

По этой причине могут обесцениваться гравиметрические наблюдения.

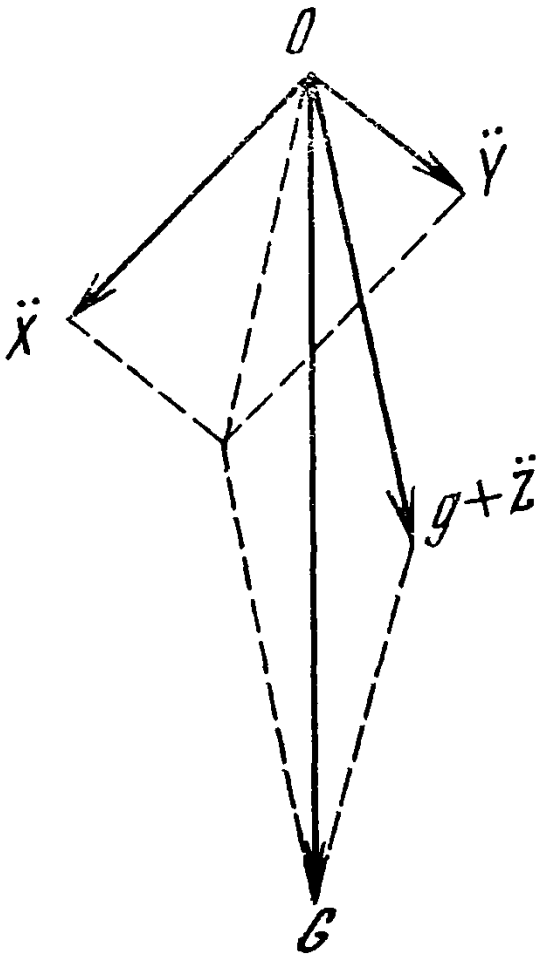
Возникает необходимость оптимального сочетания различных методов и технических средств для определения положения судна.

При измерениях на подвижном основании ускорение инерции, складываясь с силой тяжести g, в каждый момент времени образуют так называемую мгновенную («кажущуюся») силу тяжести

$$G = \sqrt{(g + \ddot{Z})^2 + \ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2},$$

где $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$ – горизонтальные и вертикальная составляющие ускорения инерции. Направление мгновенной силы тяжести не совпадает с отвесной линией и называется мгновенной вертикалью.

Измерения ускорения силы тяжести на море и в воздухе



Разделение измеряемого ускорения силы тяжести и знакопеременных инерционных ускорений (помех) в настоящее время основано на различии их частотного состава при движении носителя — инерционные ускорения изменяются с относительно высокой частотой, а **полезный сигнал представляет собой низкочастотные колебания.**

Для уменьшения влияния наклонов и горизонтальных составляющих ускорений прибор устанавливают на гироскопический стабилизатор, в котором используется свойство гироскопа сохранять направление своей оси в пространстве неизменным. Гиростабилизатор в условиях знакопеременных ускорений осуществляет принудительное нивелирование прибора.

Если прибор безынерционный и его ось чувствительности жестко связана с корпусом прибора, то на идеальном гиростабилизаторе он будет регистрировать сумму $g + \ddot{Z}$ силы тяжести и вертикального ускорения.

Измерения ускорения силы тяжести на море и в воздухе

Разделение полезного сигнала и вертикальных ускорений достигается с помощью частотной фильтрации полезного сигнала.

Частотная фильтрация достигается сглаживанием показаний прибора в интервале времени, достаточном для исключения влияния возмущающих ускорений.

Отсчет по прибору на морском гравиметрическом пункте находят как среднее весовое его показаний на отрезке маршрута, пройденного за это время.

Частотная фильтрация будет неэффективной для длиннопериодических возмущений, частоты которых перекрываются с частотами полезного сигнала.

В ряде случаев, например при измерениях на подводной лодке, длиннопериодические ускорения удается учесть, регистрируя траекторию движения неинерционными приборами, показания которых не зависят ни от силы тяжести, ни от ускорений движения.

Измерения на море выполняют преимущественно морскими статическими гравиметрами, а также струнными гравиметрами, иногда маятниковыми приборами.

В качестве носителя измерительной аппаратуры чаще всего используют надводное судно, реже подводную лодку.

При измерениях на надводном судне фон помех значительно выше, чем на подводной лодке. Но, доминирующие гармоники помех сосредоточены в узкой полосе более высоких частот и имеют более регулярный характер, что создает благоприятные условия для частотной фильтрации.

Измерения ускорения силы тяжести на море и в воздухе

Кроме того, определение координат судна в открытом море осуществляется проще, чем определение координат погруженной подводной лодки.

Иногда прибор устанавливают в погруженный контейнер (гондолу), который буксируется за судном или опускается на некоторую глубину во время дрейфа судна.

Рассмотрим влияние возмущающих ускорений и наклонов при измерениях силы тяжести на море.

Направление оси чувствительности прибора всегда остается близким к направлению отвесной линии, поэтому влияние вертикальной и влияние горизонтальных составляющих ускорений будут существенно различны и потому будем рассматривать их раздельно, ограничиваясь при этом членами второго порядка

$$\left(\left(\frac{\ddot{X}}{g}\right)^2,\ \left(\frac{\ddot{Y}}{g}\right)^2,\ \left(\frac{\ddot{Z}}{g}\right)^2\right)$$

что вполне достаточно для практических целей.

Сначала обратимся к эффекту равномерного движения судна, называемому эффектом Этвеша.

Эффект Этвеша

Пусть судно (точка Р) на широте ***φ*** движется равномерно со скоростью ***v*** по заданному курсу в азимуте А.

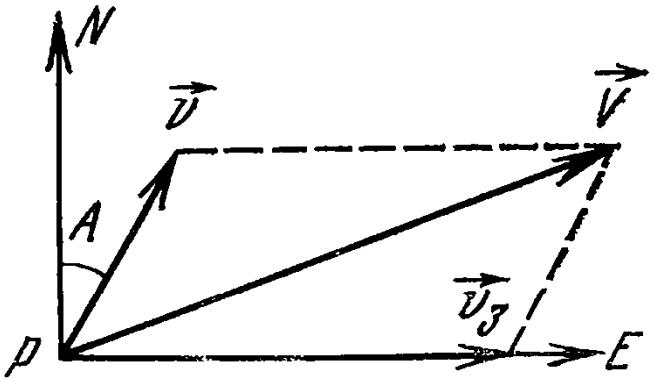
Показание установленного на судне гравиметрического прибора будет определяться не только величиной силы тяжести, но и инерционными ускорениями, зависящими от скорости и от направления движения относительно вектора, угловой скорости вращения Земли ω.

Кажущееся изменение силы тяжести, регистрируемое прибором и обусловленное движением судна относительно Земли, называется эффектом Этвеша.

Для учета эффекта Этвеша результаты измерений следует приводить к условиям наблюдений на неподвижном основании.

Сложим скорость судна v со скоростью v3 движения точки Р вследствие суточного вращения Земли. Согласно чертежу

$$V^2 = v^2 - 2v_3 v \cos(90^\circ + A) + v_3^2.$$



Таким образом, при равномерном движении судна на прибор действует центробежная сила

$$\frac{V^2}{R} = \frac{v^2}{R} + 2\frac{v_3 v}{R}\sin A + \frac{v_3^2}{R},$$

где R —средний радиус Земли.

Эффект Этвеша

Последний член формулы представляет собой центробежную силу, возникающую от вращения Земли и являющуюся составляющей силы тяжести. Остальные члены образуют поправку Этвеша $\Delta g_э$.

Поскольку для сферической Земли $v_з = \omega R \cos \varphi$, то

$$\Delta g_э = 2\omega v \cos \varphi \sin A + \frac{v^2}{R}. \qquad (1)$$

Имея в виду, что $\omega = 7{,}2921 \cdot 10^{-5}$ рад/с, $R = 6371$ км и выразив скорость в километрах в час, получим в миллигалах

$$\Delta g_э = 4{,}05 v \cos \varphi \sin A + 0{,}0012 v^2. \qquad (2)$$

Если скорость задать в узлах, то

$$\Delta g_э = 7{,}50 v \cos \varphi \sin A + 0{,}0041 v^2. \qquad (3)$$

Второй член в правой части (1)—(3), зависящий только от скорости судна, учитывает центробежную часть эффекта Этвеша. Он достигает величины 1 мГал лишь при скорости 30 км/час.

Следовательно, при характерных для судов величинах скорости главным будет первый член поправки. Он учитывает вертикальную составляющую кориолисовои силы, которая возникает при движении во вращающейся системе отсчета.

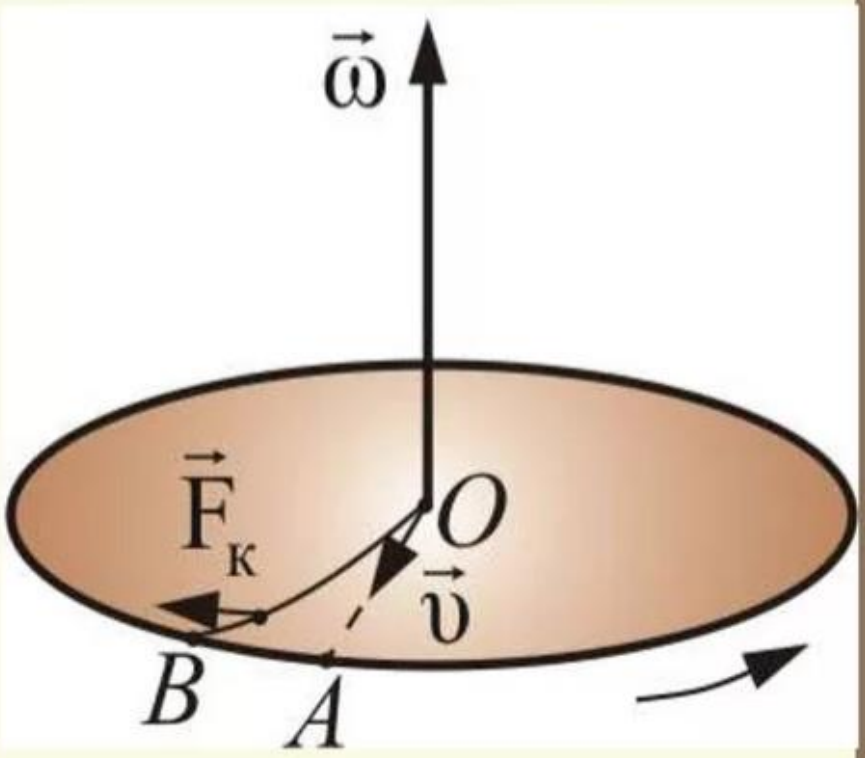
Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центростремительной и центробежной сил, появляется еще одна сила, называемая ***силой Кориолиса*** *или* ***кориолисовой силой инерции*** (Г. Кориолис (1792 – 1843) – французский физик).

$$\vec{F}_к = 2m[\vec{\upsilon}, \vec{\omega}]$$

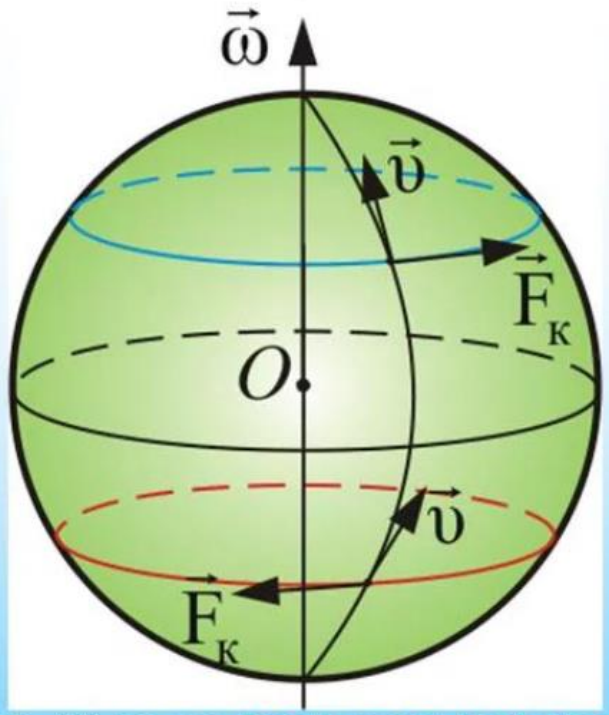
$$\vec{F}_к \perp \vec{\upsilon}$$

$$\vec{F}_к \perp \vec{\omega}$$



Сила Кориолиса

Сила Кориолиса, действует на тело, *движущееся вдоль меридиана* в северном полушарии вправо и в южном – влево.



Это приводит к тому, что у рек подмывается всегда правый берег в севером полушарии и левый – в южном.

Эти же причины объясняют неодинаковый износ рельсов железнодорожных путей.

Эффект Этвеша

Более подробный анализ показывает, что даже при малых (несколько дуговых минут) отклонениях оси чувствительности прибора от вертикали возникает влияние горизонтальной составляющей кориолисовои силы, достигающее при измерениях на море 0,4 мГал.

Поправка Этвеша при одной и той же скорости будет максимальной при движении по экватору $(\varphi = 0°,\ \sin A = \pm 1)$; например, при υ=30 км/час поправка составит

$$\Delta g_э = \pm 122{,}6 \text{ мГал}.$$

Формулы, связывающие погрешность поправки Этвеша с погрешностями измерения скорости и курса

$$m_{(\Delta g_э)_\upsilon} = 4{,}05 \cos\varphi \sin A \cdot m_\upsilon, \quad m_{(g_э)_A} = 4{,}05\upsilon \cos\varphi \cos A \cdot m_A.$$

Как видно, влияние погрешности измерения скорости будет наибольшим при движении по параллели (sin A = ±1); погрешность m_v = 1 км/час на широте 30° (cos φ = 0,71) исказит поправку на 2,9 мГал.

Погрешность определения курса, наоборот, вызовет наибольшую погрешность поправки при движении в меридиональном направлении (cos A = ±1). При m_A =0,02, $(m_A^\circ = 1°)$ v = 20 км/час, φ = 30° погрешность поправки $m_{\Delta g_э} = 0{,}7$ мГал.

Поправку Этвеша при работах в прибрежной полосе (на шельфе) и в открытом океане находят по-разному. В первом случае курс и скорость судна для моментов вывода показаний гравиметров, обычно с шагом 1—15 мин, получают с помощью радиогеодезических систем (РГС) типа «Поиск».

Эффект Этвеша

Точность определения положения судна составляет 20—50 м (если удаление от берега не превышает 100 км), что при v = 25 км/час соответствует величинам mv =0,1 —0,5 км/час, $m_A = 0{,}2° — 1°$.

Таким образом, вполне реально определение поправки Этвеша с погрешностью (0,4—2) мГал. В открытом океане поправку Этвеша часто определяют с помощью автономных навигационных приборов: курс измеряют гирокомпасом (погрешность 0,5°—1°), а скорость —гидродинамическим или гидроакустическим лагом (погрешность —0,3 км/час), что является достаточным для вывода поправки с точностью 1 мГал.

Однако реальная точность снижается из-за непостоянства внешних условий, и потому показания автономных навигационных приборов приходится корректировать, например, с помощью спутниковых навигационных систем СНС (дискретность определения 1,5—2 часа, погрешность 50—100 м).

Формулу (1) поправки Этвеша часто приводят к другому виду. Произведение *vsin A* в (1) равно восточной составляющей v_E скорости судна. Эту составляющую выразим через приращение $\Delta\lambda$ долготы судна за время Δt и через радиус параллели $R\cos\varphi$:

$$v \sin A = v_E = R \cos\varphi \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = R \cos\varphi \frac{\Delta\lambda'}{\rho' \Delta t}.$$

Заменив в (1) v sin A полученным выражением, найдем

$$\Delta g_э = 2\omega R \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \cos^2\varphi + \frac{v^2}{R} = 7{,}50 \frac{\Delta\lambda'}{\Delta t \text{ час}} \cos^2\varphi + 0{,}0012 v^2 \text{ мГал}.$$

Как видно, поправка Этвеша в первом приближении зависит только от составляющей скорости движения судна по параллели.

Амплитудно-частотный спектр возмущающих ускорений при измерениях на море

Спектральный состав возмущающих ускорений и наклонов зависит как от вида носителя и его мореходных качеств, так и от внешних условий, от режима движения, и потому может значительно изменяться в различных условиях плавания.

При измерениях на корабле наибольшие возмущения обусловлены волнением моря. Их спектральный состав определяют следующие факторы.

1. Период и амплитуда волн.
2. Район плавания. Периоды преобладающих ускорений и наклонов во внутренних морях составляют 3—6 с, а в открытом океане — 6—9 с. При зыби периоды возрастают соответственно до 12 с и 18 с.
3. Водоизмещение судна и его осадка. На кораблях малого тоннажа ускорения в 2—3 раза больше, чем на крупнотоннажных.
4. Место установки прибора на судне. Амплитуда возмущений увеличивается по мере удаления от центра тяжести судна.
5. Курс судна относительно фронта волн. При движении против волны период колебаний будет уменьшаться по мере роста скорости, а при движении вслед за волной будет увеличиваться. Поэтому возмущающие ускорения в первом случае будут больше, чем во втором.

Обычно вертикальные ускорения больше горизонтальных, а горизонтальные ускорения и наклоны в бортовой плоскости больше, чем в килевой плоскости.

Амплитудно-частотный спектр возмущающих ускорений при измерениях на море

Возмущающие ускорения можно представить как сумму колебаний различной частоты и амплитуды. Выделим колебания $Z = Z_0 \sin \omega t = Z_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$ главной, доминирующей частотой ω (T —период колебаний).

Для ускорения движения будем иметь $\ddot{Z} = -Z_0\omega^2 \sin \frac{2\pi}{T} t.$

Амплитудное значение ускорения равно

$$\ddot{Z}_0 = Z_0\omega^2 = Z_0 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Если амплитуда перемещения судна Z_0 = 50см и T = 4 с (внутреннее море), то амплитуда ускорения $\ddot{Z}_0 \approx 120$ Гал; при Z_0 = 50 см и T = 8 с (океан) получим $\ddot{Z}_0 \approx 30$ Гал.

На рис. 1 представлен образец записи возмущающих ускорений — вертикальных Z и горизонтальных: в бортовой плоскости судна (X) и в килевой плоскости (Y).

Запись сделана в Баренцевом море на судне водоизмещением 1200 т. Как видно, главный период возмущений ≈4 с, причем вертикальные ускорения достигают 100 Гал.

Волнение моря создает наибольшие возмущающие ускорения в узкой полосе частот f = 1/T = 0,3—0,5 Гц.

В то же время местные изменения силы тяжести по маршруту судна проявляются как низкочастотные колебания, амплитуда которых тем меньше, чем выше частота.

Как показывает опыт, изменения величины g порядка 1 мГал при скорости судна 20—25 км/час имеют частоту ~10-3 Гц (T = 1000 с). Эту частоту можно считать верхней границей спектра полезного сигнала.

Моря

Внутренние

Окраинные





Черное море

Аравийское море

Амплитудно-частотный спектр возмущающих ускорений при измерениях на море

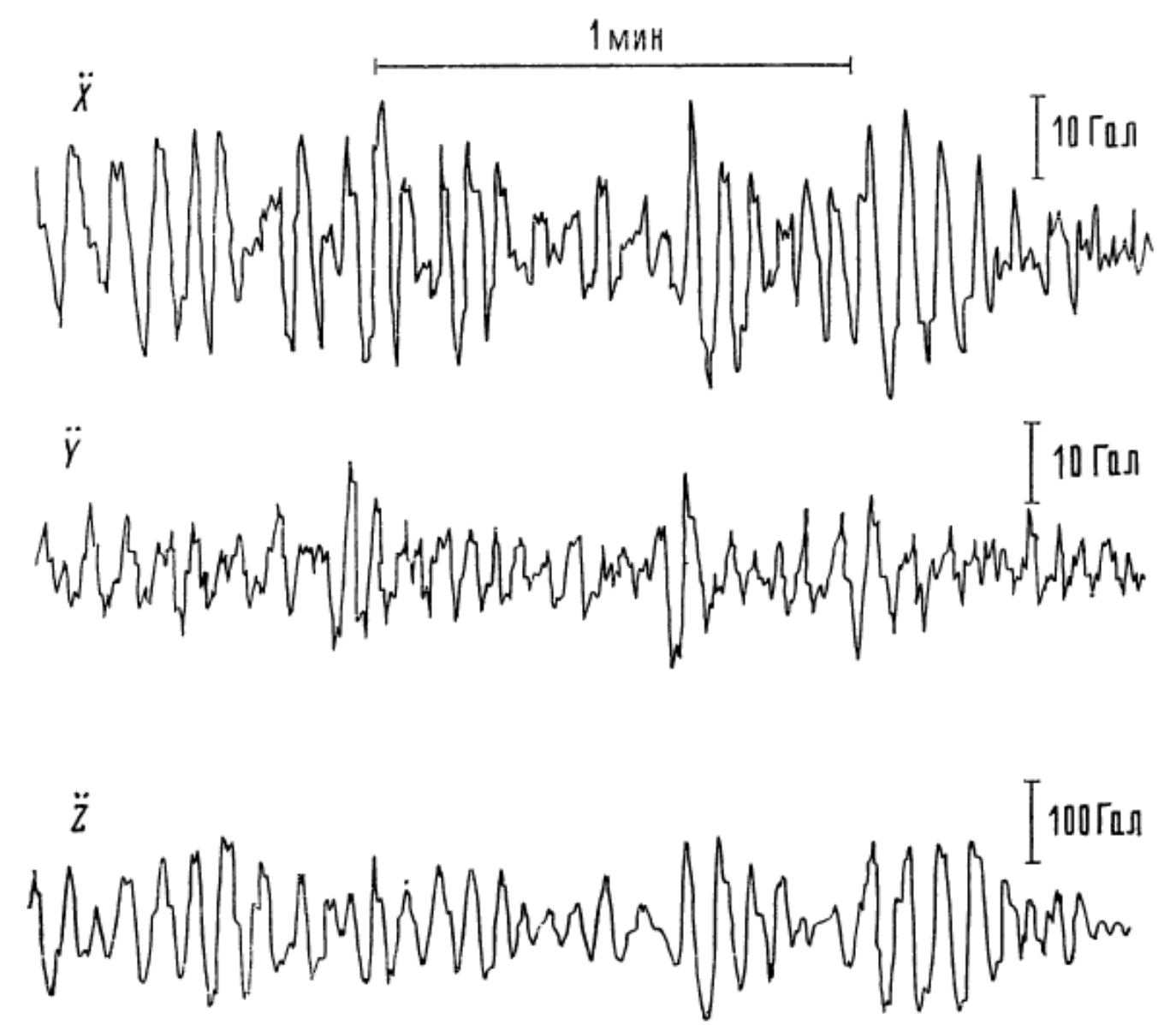


Рис.1 Записи возмущающих ускорений

Амплитудно-частотный спектр возмущающих ускорений при измерениях на море

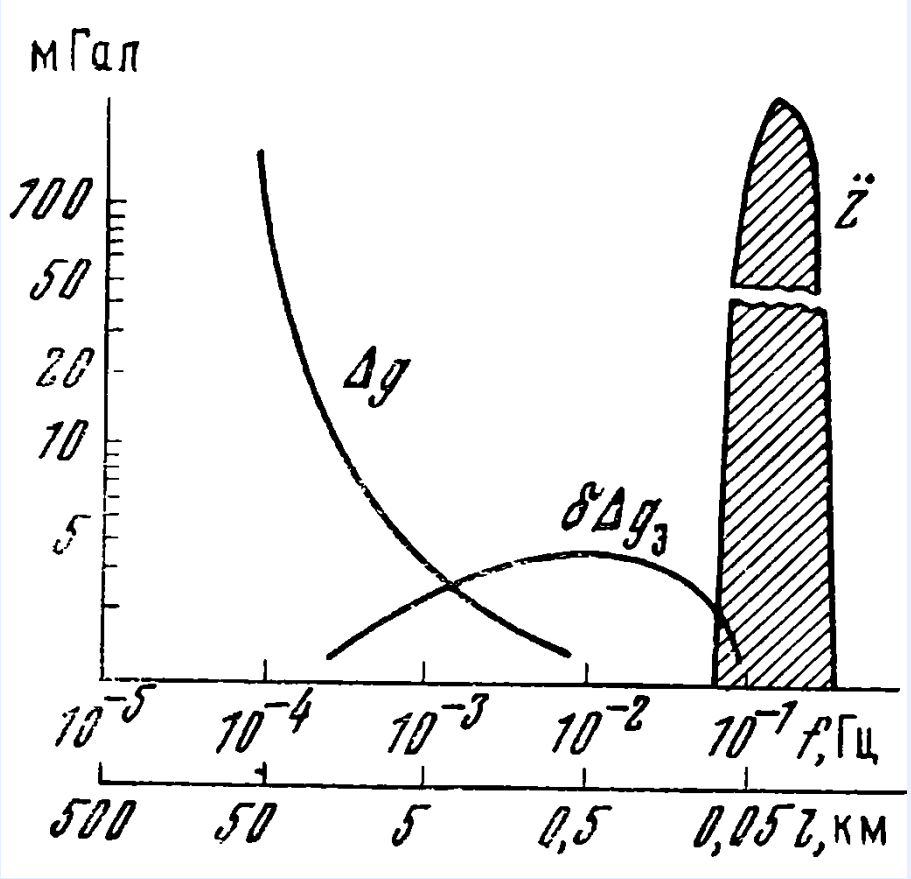


Рис.2

Обобщенная характеристика частотного состава локальных изменений силы тяжести Δg и возмущающих ускорений $\ddot{Z}$, вызванных волнением моря, показана на рис. 2.

Как видно, частотные диапазоны полезного сигнала и помехи не перекрываются, что и позволяет эффективно применять частотную фильтрацию.

Другим источником погрешностей при измерениях на море являются долгопериодические (период 0,5—100 мин) отклонения курса и скорости от заданных значений, обусловленные рысканием судна, ветровым сносом и течениями. При этом непостоянство курса, достигающее 5°, приводит к отклонениям от прямолинейного маршрута до нескольких сотен метров.

Амплитудно-частотный спектр возмущающих ускорений при измерениях на море

В результате изменений курса и скорости возникают вариации эффекта Этвеша с указанными периодами, достигающие нескольких миллигал. Частотный диапазон этих вариаций ($2 \cdot 10^{-4}$—10^{-1} Гц) частично перекрывается с частотным диапазоном полезного сигнала Δg (см. 1). Следовательно, вариации эффекта Этвеша полностью не отделяются частотной фильтрацией.

Сказанное иллюстрирует рис.3, на котором показаны графики вариаций скорости и азимута судна водоизмещением 1600 т.

Наблюдения выполнены на Балтийском море при движении в меридиональном направлении, положение судна определялось с помощью РГС.

На рисунке также показаны вычисленные по этим данным вариации поправки Этвеша и сглаженная кривая $\Delta g_э$.

Как видно, период вариаций достигает 40 мин, а амплитуда —4 мГал; кривая $\Delta g_э$ коррелирует с кривой изменения азимута A_0, что вполне закономерно при $A_0 \approx 0^o$.

Частотный диапазон вибраций на судне очень широк: от нескольких герц до нескольких сотен герц.

Амплитуда вибраций зависит от типа судна, места установки прибора, режима работы двигателей, загрузки судна и может усиливаться резонансными явлениями в отдельных конструкциях судна.

При частотах до 30 Гц амплитуда ускорений вибраций достигает 500 Гал.

Амплитудно-частотный спектр возмущающих ускорений при измерениях на море

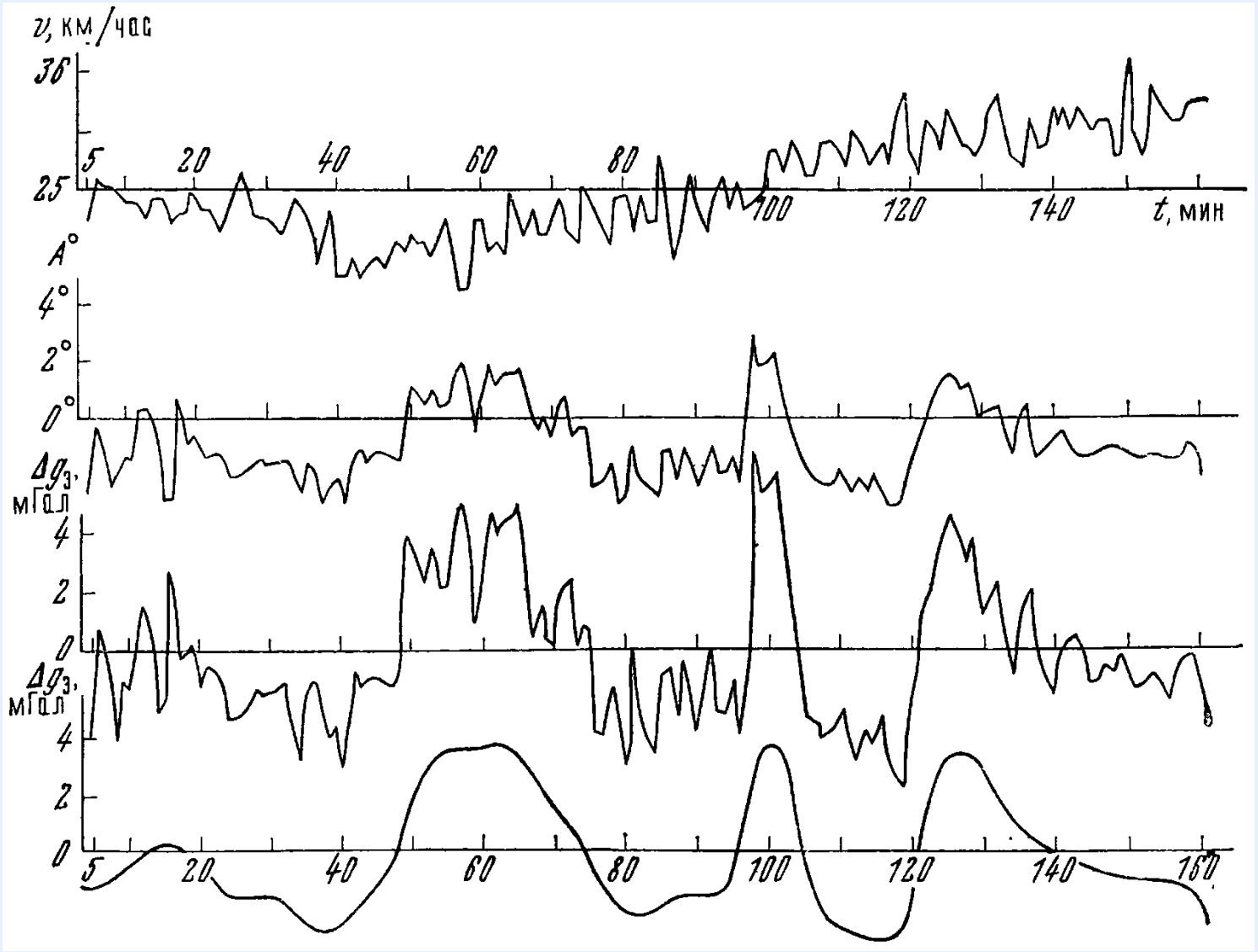


Рис.3 Графики вариаций скорости и азимута судна

Амплитудно-частотный спектр возмущающих ускорений при измерениях на море

Благодаря фильтрующему действию толщи воды при погружении на глубину h дисперсия σ_0^2 возмущающих ускорений убывает по экспоненциальному закону

$$\sigma_h^2 = \sigma_0^2 e^{-kh}.$$

Теоретически и экспериментально доказано, что коэффициент $k = 0{,}04—0{,}09$ м$^{-1}$ зависит как от центральной частоты β спектра ускорений σ_n на поверхности моря, так и от «полуширины» а спектра, т.е. от $\frac{1}{2}(f_в - f_н)$ полуразности верхней и нижней частот возмущающих ускорений.

Эта эмпирическая зависимость имеет вид

$$k = (8{,}3\beta^2 - 7{,}6\alpha\beta)\ \text{м}^{-1},$$

Причем α и β выражены в герцах. Если, например, β=0,125 Гц (Т =8 с), $f_н$ =0,084 Гц, $f_в$ =0,166 Гц (6,0 < Т < 11,9 с), то $\alpha = 0{,}041$ Гц и $k = 0{,}09$ м$^{-1}$.

Таким образом, средняя квадратическая величина ускорения уменьшится в 10 раз на глубине ≈50 м и в 50 раз на глубине ≈ 90 м.

При погружении затухание гармоник возмущений происходит тем быстрее, чем выше их частота, и потому период главной гармоники несколько увеличивается и одновременно уменьшается ширина спектра.

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация

Если предположить, что горизонтальные ускорения и наклоны отсутствуют, то мгновенное показание G безынерционного прибора будет суммой величин g и мгновенного вертикального ускорения $\ddot{Z}$:

$$G = g + \ddot{Z},$$

причем в мгновенном показании прибора эти величины неразделимы.

Чтобы отделить полезный сигнал g от помехи, выполняют сглаживание показаний прибора G на достаточно протяженном интервале времени, во много раз превышающем периоды гармоник возмущающих ускорений.

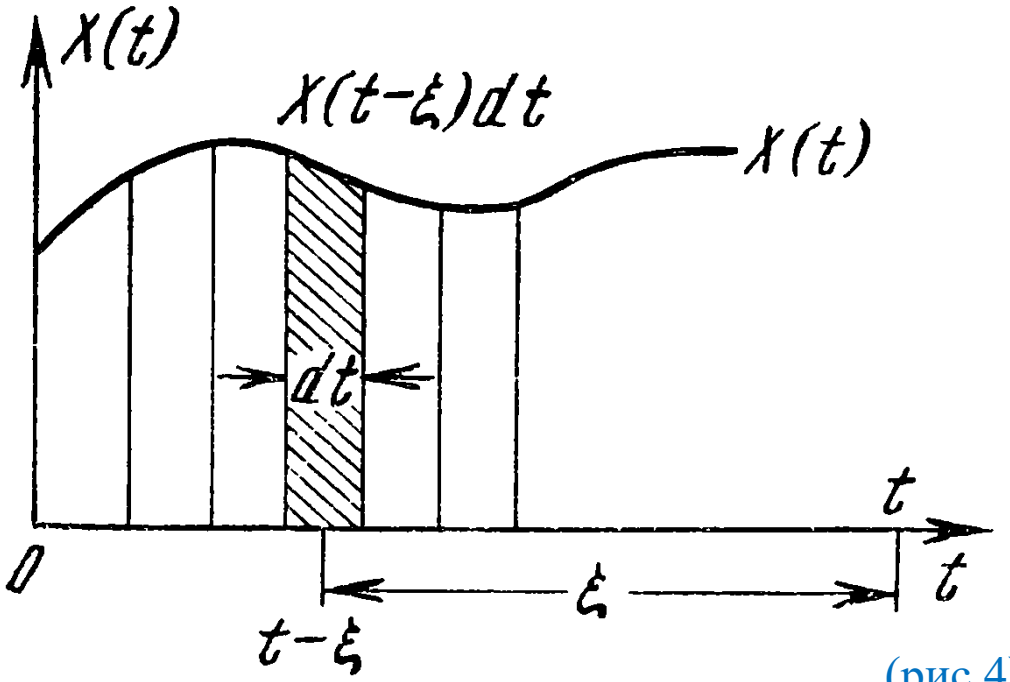
Сглаживание осуществляется с помощью линейных фильтров.

Линейный фильтр это преобразователь непрерывной функции X (f) в другую функцию Y(t). Это преобразование выполняется таким образом, что все гармонические слагаемые функции X(t), которые лежат за пределами диапазона частот полезного сигнала, оказываются исключенными (подавленными).

В морской гравиметрии для отделения низкочастотного полезного сигнала от высокочастотных помех применяют линейные фильтры нижних частот (ФНЧ), которые сглаживают показания прибора, возмущенные вертикальными ускорениями.

Очевидно, результат сглаживания Y(t) (выходной сигнал) будет зависеть от всей совокупности значений сигнала внешнего воздействия X(f) (входного сигнала) на интервале сглаживания.

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация



(рис.4)

Будем рассматривать входной сигнал как непрерывную серию прямоугольных импульсов с бесконечно малой шириной $d\xi$, площадь которых есть $X\ (t - \xi)\ d\xi$ (рис.4)
В силу линейности фильтра его реакцию в момент t на величину импульса $X\ (t - \xi)\ d\xi$ представим в виде

$$dY = h\ (\xi)\ X\ (t - \xi)\ d\xi,$$

Где $h\ (\xi)$ — весовая функция фильтра.

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация

Вследствие справедливости для линейных фильтров принципа суперпозии общий выходной сигнал Y (t) в рассматриваемый момент равен сумме выходных сигналов в тот же момент t, возбуждаемых отдельными импульсами $X\,(t-\xi)\,d\xi$, заполняющими весь интервал сглаживания. При бесконечно большом интервале сглаживания, переходя к интегралу, имеем

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,X(t-\xi)\,d\xi. \qquad (5)$$

Мы получили основную формулу теории линейной фильтрации. Весовая функция $h\,(\xi)$, определяющая алгоритм фильтрации, является основной характеристикой фильтра, от ее вида зависит подавление тех или иных составляющих спектра входного сигнала.

Чтобы фильтр не искажал постоянную составляющую полезного сигнала, должно соблюдаться условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\,(\xi)\,d\xi=1.$$

Наряду с весовой функцией свойства фильтра описывают частотные характеристики, характеризующие реакцию фильтра на синусоидальный входной сигнал (в установившемся режиме).

Пусть на вход фильтра подан сигнал $X\,(t)=A_1\sin\omega t.$

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация

Выходная величина Y (t) по истечении достаточно большого промежутка времени будет изменяться тоже синусоидально, но по сравнению с входной X (t) может иметь иные амплитуду и фазу, т. е. будет равна

$$Y(t) = A_2 \sin(\omega t + \psi).$$

Для удобства вычислений будем рассматривать входной и выходной сигналы не в тригонометрической, а в показательной форме

$$X(t) = A_1 e^{i\omega t}, \quad Y(t) = A_2 e^{i(\omega t + \psi)}.$$

Качества фильтра определяют функции частоты: $\lambda(\omega)$, описывающая зависимость от частоты амплитуды выходного сигнала $A_2 = \lambda(\omega) A_1$ и называемая амплитудной частотной характеристикой (АЧХ) фильтра, и функция $\psi(\omega)$, описывающая зависимость от частоты фазы выходного сигнала и называемая фазовой частотной характеристикой (ФЧХ) фильтра.

Функцию

$$W(i\omega) = \lambda(\omega) e^{i\psi(\omega)}$$

называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ) фильтра.

Мнимые числа

- *В 16 в. в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать корни из отрицательных чисел.*
- *Название «мнимые числа ввел в1637 году французский математик и философ Р. Декарт.*
- *Постепенно развивалась техника операций над комплексными числами.*
- *В конце 18 - начале 19 веков было получено геометрическое истолкование комплексных чисел.*

Определение: Число, квадрат которого равняется -1 , называется мнимой единицей. Мнимая единица обозначается символом i . Как следует из определения мнимая единица удовлетворяет условию $i^2 = -1$.

$z=a+bj$

$a=0$

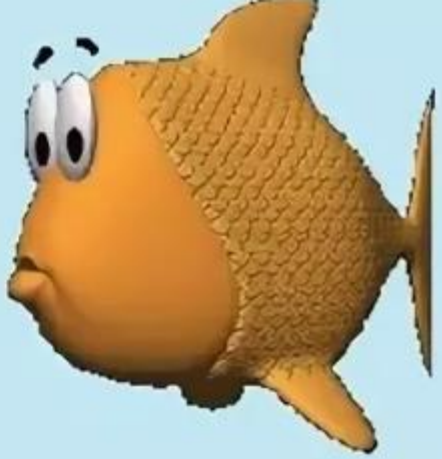
$b=0$

Мнимое число

$z=bj$

Действительное число

$z=a$



Мнимые числа

$i = -1$, i – мнимая единица

i, 2i, -0,3i — чисто мнимые числа

Арифметические операции над чисто мнимыми числами выполняются в соответствии с условием С3.

$$3i + 13i = (3 + 13)i = 16i$$

$$3i \cdot 13i = (3 \cdot 13)(i \cdot i) = 39i^2 = -39$$

$$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$$

В общем виде правила арифметических операций с чисто мнимыми числами таковы:

$$ai + bi = (a + b)i; \qquad ai - bi = (a - b)i;$$

$$a(bi) = (ab)i; \qquad (ai)(bi) = abi^2 = -a$$

где a и b — действительные числа.

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация

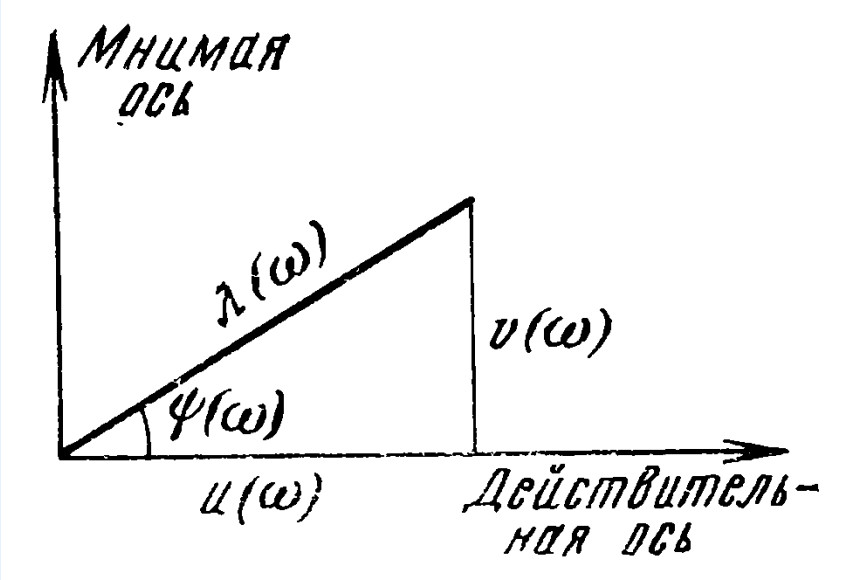


рис.5.

Отделим в выражении для $W(i\omega)$ вещественную $U(\omega)$ и мнимую $iV(\omega)$ части:

$$W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega) = \lambda(\omega)\, e^{i\psi(\omega)}. \quad (4)$$

Здесь $\lambda(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ —модуль, а $\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{U(\omega)}{U(\omega)}$ — аргумент.
Геометрическое изображение вектора λ(ω) на комплексной плоскости приведено на рис.5.
Итак, в выражении (4) модуль есть АЧХ: $|W(i\omega)| = \lambda(\omega)$,
а аргумент — ФЧХ:

$$\arg W(i\omega) = \psi(\omega).$$

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация

В нашей задаче входным сигналом X (t) будет сумма g + Z, результатом фильтрации — сглаженное на некотором интервале T показание прибора.

Бывают различные фильтры:

1. Интегральное среднее
2. Двойное сглаживание
3. Апериодический фильтр первого порядка

Мы с вами рассмотрим: аналоговые и цифровые фильтры.

Сглаживание может выполняться с помощью аналоговых (например, электрических, механических) фильтров или цифровых фильтров.

При выборе тех или иных схем возникает задача динамического синтеза фильтров. Она заключается в том, что из всех возможных вариантов фильтров необходимо выбрать фильтр оптимальный по критерию максимального подавления помехи и минимального искажения полезного сигнала.

Стремясь приблизить характеристики фильтров к оптимальным, на практике применяют более сложные весовые функции (например, косинусоидальные), вид которых зависит от амплитудно-частотных спектров возмущений и полезного сигнала.

При цифровом (дискретном) сглаживании интеграл

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, X(t-\xi)\, d\xi.$$

заменяют суммой

$$Y_i = \sum_{j=-m}^{m} h_j X_{i-j},$$

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация

$$Y_i = \sum_{j=-m}^{m} h_j X_{i-j},$$

где индексы означают порядковый номер ординаты соответствуют щей функции, причем

$$\sum_{j=-m}^{m} h_j = 1.$$

Пример цифровой фильтрации. Допустим, что даны пять значений функции X (t), которые надо подвергнуть сглаживанию.

Поскольку в данном случае $m = 2\ (j = 0, \pm 1 \pm 2)$,

примем

$$h_{-2} = 1/9, \quad h_{-1} = 2/9, \quad h_0 = 3/9, \quad h_1 = 2/9, \quad h_2 = 1/9,$$

так, чтобы сумма этих функций равнялась единице.

Формула выходного сигнала приобретает вид:

$$Y_i = \frac{1}{9}(X_{i-2} + 2X_{i-1} + 3X_i + 2X_{i+1} + X_{i+2}).$$

Зададим вид функции X (t) с шагом дискретизации Δ. Пусть $X(t) = \sin \omega t$.

Тогда

$$X_{i-2} = \sin \omega (t - 2\Delta), \quad X_{i+1} = \sin \omega (t + \Delta),$$
$$X_{i-1} = \sin \omega (t - \Delta), \quad X_{i+2} = \sin \omega (t + 2\Delta).$$
$$X_i = \sin \omega t.$$

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация

Поскольку

$$\sin\omega(t-2\Delta)+\sin\omega(t+2\Delta)=2\sin\omega t\cdot\cos 2\omega\Delta=\sin\omega t(1+$$

$$+\cos\omega\Delta),\ \sin\omega(t-\Delta)+\sin\omega(t+\Delta)=2\sin\omega t\cdot\cos\omega\Delta,$$

то

$$Y(t)=\frac{1}{9}\sin\omega t(4+4\cos\omega\Delta+\cos^2\omega\Delta)=$$

$$=\left(\frac{2+\cos\omega\Delta}{3}\right)^2\sin\omega t.$$

Рассмотренный пример иллюстрируется графиком величины Y (t)/X (t) на рис. 6 для диапазона частот от нуля до π/Δ. Как видно, чем выше частота гармоники, тем больше она подавляется.

В реальных схемах шаг дискретизации должен быть по крайней мере в 10 раз меньше периода помехи, т. е. меньше 1 с. Поэтому при цифровой фильтрации используется большое число ординат 2m, что требует применения ЭВМ.

При достаточно малых величинах Δ цифровой фильтр эквивалентен аналоговому.

Эффективность сглаживания иллюстрируется на рис. 7, на котором показана запись показаний прибора, возмущенная ускорениями до 50 Гал, и результаты ее трехкратного сглаживания, которое дает профиль величины g по маршруту движения.

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация

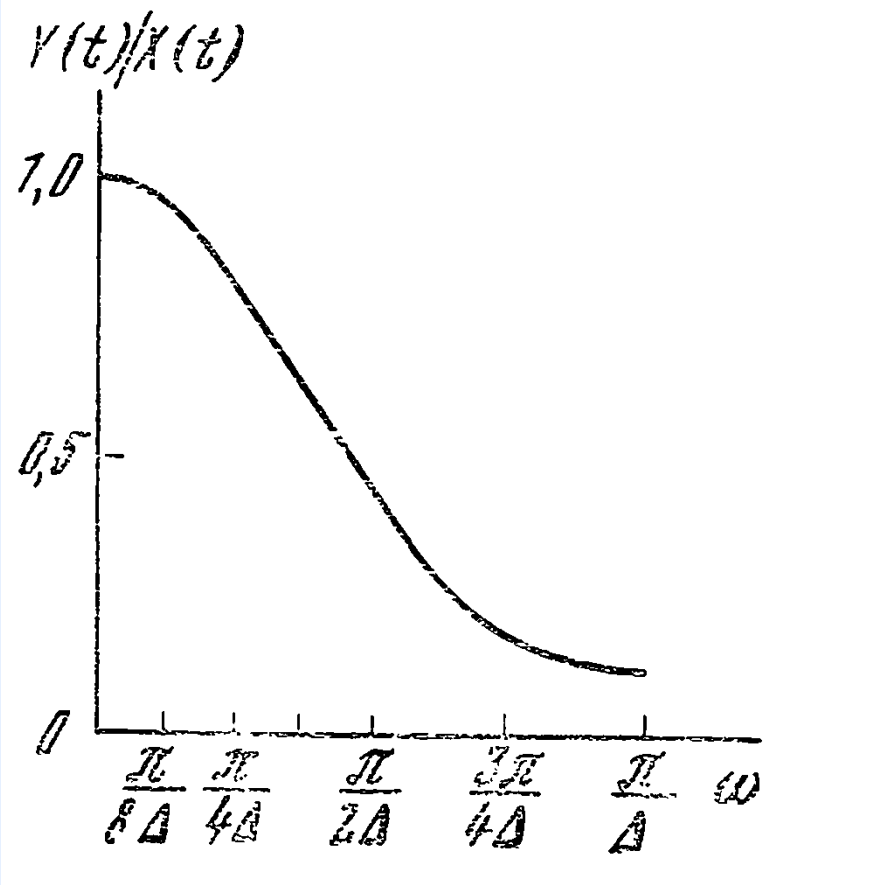
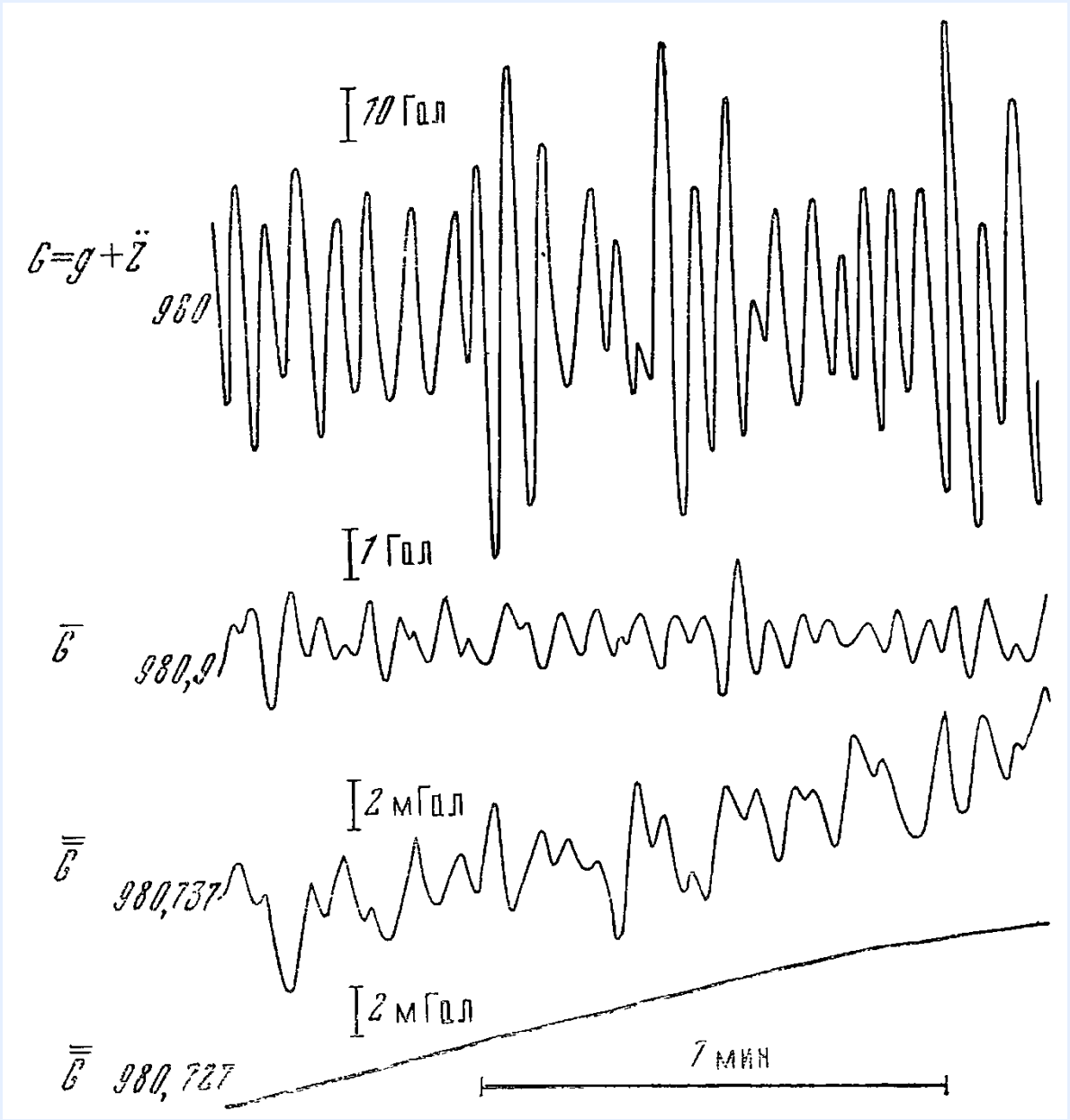


рис. 6

Как видно, чем выше частота гармоники, тем больше она подавляется.

Влияние вертикальных ускорений. Частотная фильтрация



Эффективность сглаживания иллюстрируется на рис. 7, на котором показана запись показаний прибора, возмущенная ускрениями до 50 Гал, и результаты ее трехкратного сглаживания, которое дает профиль величины g по маршруту движения.

рис. 7