СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

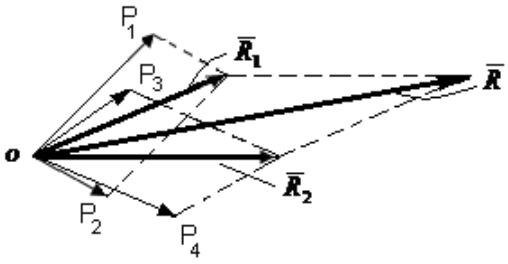
ДӘРІС № 2

ТҮЙІСКЕН КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ

Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

2-тарау. ТҮЙІСКЕН (ЖИНАҚТАЛАТЫН) КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ

Әсер ету сызықтары бір нүктеде қиылысатын күштерді – түйіскен немесе жинақталатын күштер деп атаймыз және бұдан былай бұл күштерді түйіскен күштер деп атайтын боламыз (*17-сурет*).



17-сурет

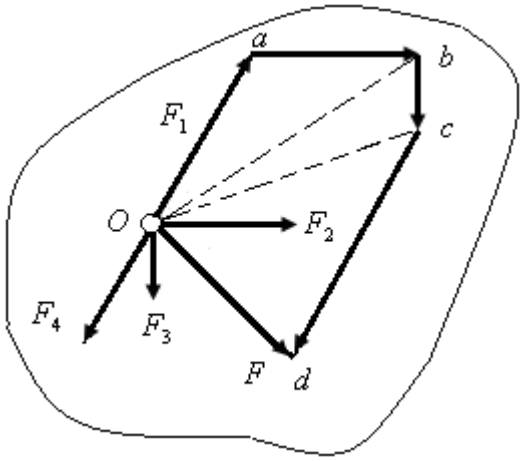
Күштердің әсер етуші сызықтарының қиылысу нүктесі *O* денеден сырт жатса, онда бұл нүктені денемен қатаң байланысқан деп санау керек. Барлық күштерді, олардың әсер етуші сызығының қиылысу нүктесіне алып келейік. Бұл кезде, қарастырылып отырған бір нүктеде қиылысатын күштер жүйесіне эквивалент, бір нүктеге түсірілген түйіскен күштер жүйесін аламыз.

Сонымен, бір нүктеге түсірілген күштер жүйесін қарастыратын боламыз, осылай алынған нәтижелер түйіскен күштер жүйесі үшін түгелдей заңды болып табылады.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

§1. Түйіскен күштерді қосудың геометриялық тәсілі

Бір нүктеге түсірілген күштерді қосу үшін күштер үшбұрышы ережесін қолданамыз. Мысалы, O нүктесіне F_1, F_2, F_3 және F_4 күштері түсірілсін (*18-сурет*). Алдымен F_1 және F_2 күштерін қосып, олардың тең әсер етуші күші R_1 күшін аламыз.



18-сурет

Бұл күш *18-суреттегі* Oab үшбұрышының Ob қабырғасына тең. Бұдан кейін, осы ереже бойынша R_1 және F_3 күштерін қосып, үш күштердің тең әсер етуші күші R_2 күшін аламыз, яғни $R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$. Соңынан, R_2 және F_4 күштерін қосып, олардың тең әсер етуші күші F күшін аламыз. Бұл табылған күш F төрт күштердің тең әсер етуші күші болып табылады, яғни $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$.

Осылайша, бір нүктеге қанша күш түсірілсе, сонша күштердің қосындысын анықтауға болады. Демек,

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = \sum F_i . \qquad (1)$$

Енді *18-суретке* көңіл аударсақ, тең әсер етуші күшті анықтау үшін R_1 және R_2 күштерін тұрғызудың керегі жоқ екен; $Oabcd$ - векторлық көпбұрышын тұрғызсақ жеткілікті екен. Ол үшін, O нүктесін соңғы күшті көрсететін $\vec{cd}$ векторының соңғы нүктесімен қоссақ болды. Бұл кезде $\vec{Od}$ векторына сәйкес тең әсер етуші күш - F күшін аламыз.

Көпбұрыш $Oabcd$ - күштер көпбұрышы немесе түйіскен (жинақталатын) күштер жүйесінің көпбұрышы деп аталады. Бұл көпбұрыштың Od қабырғасы тең әсер етуші күштің модуліне тең, ал оның O нүктесінен соңғы күштің ақырғы нүктесіне бағыты, тең әсер етуші күштің бағытын көрсетеді. Тағы бір-екі анықтамалар келтіре кетейік:

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

- егер соңғы күштің ақырғы нүктесі бірінші күштің бастапқы нүктесіне дәл келсе, онда мұндай көпбұрыш тұйықталған көпбұрыш;

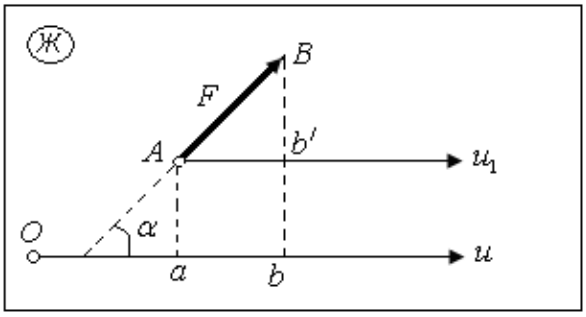
- бір нүктеге түсірілген күштерді күштер көпбұрышын тұрғызу арқылы қосу – күштік көпбұрыш ережесі деп аталады.

Жоғарыда айтып кеткендей, бір нүктеге түсірілген күштер үшін алынған нәтиже, түйіскен күштер үшін де заңды болып табылады. Сондықтан *қатты денеге әсер етуші түйіскен күштер жүйесінің тең әсер етуші күші, осы күштердің түйісу нүктесіне түсірілген күштердің геометриялық жиынына тең болады* деп тұжырымдалатын теореманы дәлелденді деп есептейміз.

§2. Түйіскен күштерді қосудың координаттық (аналитикалық) тәсілі

Вектордың оське проекциясы туралы түсінік – координаталық тәсілдің негізі болып табылады.

2.1.Күштің оське және жазықтыққа проекциясы туралы. Белгілі бір вектор F берілген Ж жазықтығында жатсын. Осы жазықтықта Ou осін көрсетейік (*19-сурет*).



19-сурет

Вектордың проекциясы – оның модулімен, осы вектордың бағыты және проекцияланатын осьтің арасындағы бұрыштың косинусынының көбейтіндісіне тең скаляр шама екені геометриядан белгілі, яғни

$$F_u = F \cdot \cos\alpha \,.$$

Сонымен, F_u шамасы, берілген F векторының Ou осіндегі проекциясы болып табылады. Вектордың проекциясы алгебралық шама болғандықтан, F_u символының үстіне сызықша қойылмайды.

19-суреттен көрініп тұрғандай, вектордың өзара параллель осьтердегі проекциялары да өзара тең болады, яғни

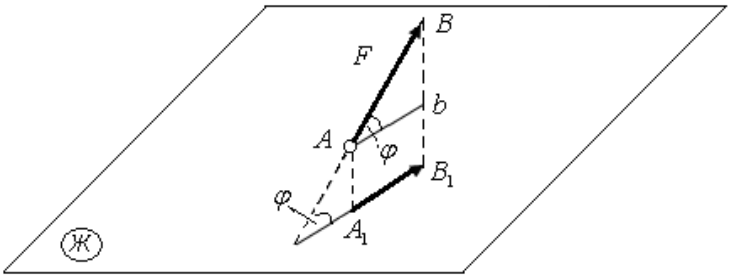
$$ab = Ab' = F_u = F \cdot \cos\alpha \,.$$

Осыған байланысты, векторды берілген Ou осіне проекциялаудың орнына, керек болған жағдайда, оны вектордың бастапқы нүктесі арқылы өтетін және берілген осы оське параллель Ou_1 осіне проекциялайды.

Күштің осьтегі проекциясынан басқа, күштің жазықтықтағы проекциясы деген ұғымда механикада жиі қолданылады. Енді осы ұғымға тоқталайық. Берілген F күшін $Ж$ жазықтығына проекциялайық (20-сурет).

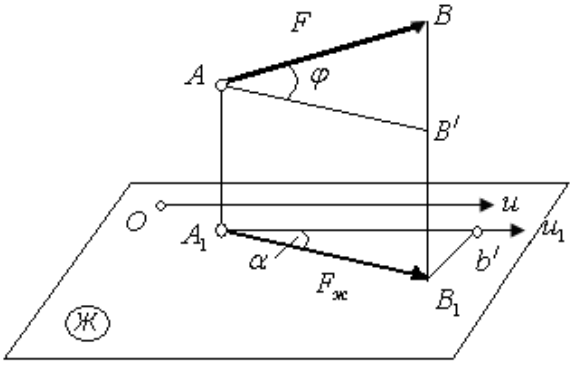
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Ол үшін, күштің бастапқы және соңғы нүктесін аталған жазықтыққа проекциялап, бағытталған A_1B_1 кесіндісін аламыз, бұл кесіндінің шамасы - $F \cdot \cos\phi$, яғни, F күшінің *Ж* жазықтығына проекциясы: *шамасы берілген күштің модулінің және күштің әсер ету сызығы мен жазықтықтың арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең жаңа вектор*. Бұл вектор, әдетте, $\vec{F}_{ж}$ символымен белгіленеді.



20-сурет

Есте болатын жағдай: *күштің оське проекциясы скалярлық шама, ал күштің жазықтыққа проекциясы векторлық шама*.



21-сурет

Статиканың есептерін шешкен кезде, күштің проекциясын екі рет проекциялау арқылы да табуға болады. Ол үшін, алдымен жазықтыққа, содан кейін күшті керек оське проекциялайды. Мысалы 21-ші суретке көңіл аударайық. Алдымен күш Ou осі жатқан жазықтыққа, содан кейін барып, Ou осіне проекцияланады. Түсінікті болу үшін, *21-суретте* бұл проекция, Ou осіне параллель A_1u_1 осіне проекцияланған.

Осы суреттен: $F_{ж} = AB' = A_1B_1 = F \cdot \cos\phi$, ал $F_u = A_1b' = F_{ж} \cdot \cos\alpha$ болғандықтан: $F_u = F \cdot cos\phi \cdot \cos\alpha$. Сонымен, күштің берілген оське проекциясын

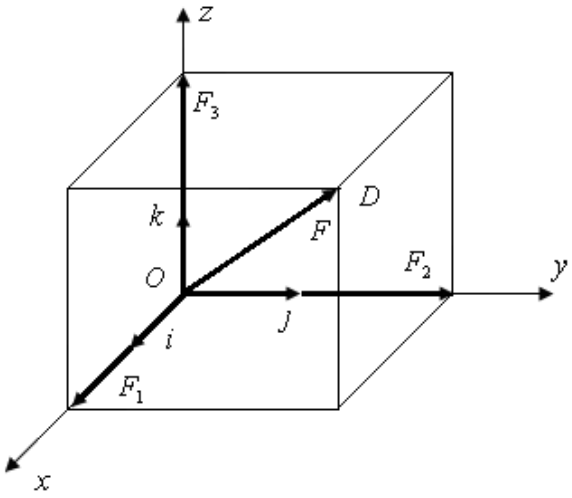
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

алу үшін, *алдымен оны жазықтыққа проекциялап, содан кейін барып, алынған проекцияны берілген оське проекциялау керек*.

2.2. Күштің модулінің және бағыттаушы косинустарының формулалары. Күштің бағытымен координата осьтерінің араларындағы бұрыштар, әдетте, күштің бағыттаушы косинустары деп аталады.

Формулаларды қорыту үшін $Oxyz$ координаттар жүйесін алайық (*22-сурет*).

Осьтердің бірлік векторларын k, i, j символдарымен белгілейміз. Координата басына орналасқан F күшін координата осьтерімен бағытталған үш құраушыға жіктейміз, олар: F_1, F_2, F_3. Бұл күштерді бірлік векторлары арқылы көрсетсек: $F_1 = F_x \cdot i$, $F_2 = F_y \cdot j$ және $F_3 = F_z \cdot k$.



22-сурет

Бұл формулалардағы F_x, F_y, F_z күштің сәйкес осьтердегі проекциялары болғандықтан:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k . \qquad (2)$$

Алынған формуладағы

- F_1, F_2, F_3 күштері F күшінің координата осьтеріндегі құраушылары деп;
- F_x, F_y, F_z күштері күштің координаттары деп аталады.

Тікбұрышты параллепипедтен күштің модулін анықтаймыз. Ол күш параллепипедтің диагоналы OD, демек,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} . \qquad (3)$$

Сонымен қоса, $F_x = F \cdot \cos\alpha$, $F_y = F \cdot \cos\beta$, $F_z = F \cdot \cos\gamma$, ал α, β және γ берілген F күшімен координата осьтерінің араларындағы бұрыштар болғандықтан:

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \qquad (4)$$
$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

2.3. Түйіскен күштердің тең әсер етуші күшін координаталық тәсілмен анықтау. Түйіскен күштерді координаталық тәсілмен анықтау геометрияның белгілі теоремасына негізделген. Ол теорема: *векторлардың кез келген оське түсірілген проекцияларының геометриялық жиыны, қосылатын векторлардың аталған оське проекцияларының алгебралық жиынына тең болады*.

Түйіскен күштер жүйесінің тең әсерлі күші олардың геометриялық қосындысына тең болатындықтан, тең әсерлі күштің кез келген осьтегі проекциясы құраушылардың сол осьтегі проекцияларының алгебралық қосындысына тең болады. Сондықтан тең әсерлі күшті координаталық осьтерге проекциялап, келесі теңдіктерді аламыз:

$$F_x = \sum F_{ix}\ ,\ F_y = \sum F_{iy}\ ,\ F_z = \sum F_{iz}\ . \qquad (5)$$

Егер күштер модулдері арқылы беріліп және олардың бағыттары белгілі болса, онда олардың проекцияларын оңай анықтауға болады. Содан кейін, *5-формулалардың* көмегімен тең әсер етуші күштің әр осьтегі проекцияларын (F_x, F_y, F_z) анықтауға болады. Бұл проекциялар (F_x, F_y, F_z) анықталғаннан кейін тең әсер етуші күштің модулін және бағыттаушы косинустарын анықтауға болады. Яғни

$$F = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2}\ , \qquad (6)$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}\ ,\ \ \cos\beta = \frac{F_y}{F}\ ,\ \cos\gamma = \frac{F_z}{F}\ . \qquad (6\text{-а})$$

Егер түйіскен күштер тек бір жазықтықта жатса, онда оны Oxy жазықтығы деп қабылдап, тең әсер етуші күштің модулін және бағыттаушы косинустарын

$$F = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}\ , \qquad (7)$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}\ ,\ \ \cos\beta = \sin\alpha = \frac{F_y}{F}\ . \qquad (7\text{-а})$$

формулалары арқылы анықтаймыз

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

§3. Түйіскен күштер жүйесінің тепе-теңдік шарты

3.1.Тепе-теңдік шартының векторлық түрі. Егер түйіскен күштер жүйесінің тең әсер етуші күші нөлге тең болса, онда ол жүйе қатты дененің не тыныштық күйін, не қозғалыстағы күйін өзгерте алмайды, яғни

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 . \qquad (8)$$

3.2. Тепе-теңдік шартының геометриялық түрі. Түйіскен күштер жүйесінің тең әсер етуші күші $\vec{F} = 0$, олай болса, бірінші $\vec{F}_1$ күшінің бастапқы нүктесі мен $\vec{F}_n$ күшінің соңғы нүктесі беттесіп кетеді. Демек, қатты денеге әсер ететін түйіскен күштер жүйесі тепе-теңдікте болу үшін, жүйедегі күштерден құралған көпбұрыштың тұйық болуы қажет және жеткілікті.

3.3. Тепе-теңдік шартының аналитикалық түрі. Егер $\vec{F}$ векторы нөлге тең болса, онда оның проекциялары да нөлге тең болады ($F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$), яғни:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad (8\text{-а})$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0.$$

Сонымен, қатты денеге әсер ететін түйіскен күштер жүйесі тепе-теңдікте болу үшін жүйедегі барлық күштердің үш осьтің әрқайсысындағы проекцияларының қосындылары жеке-жеке тең болуы қажет және жеткілікті.

§4.Түйіскен күштер жүйесі үшін Вариньон теоремасы

Бұл теореманы дәлелдеп жатпай-ақ оның анықтамасын келтіреміз: *түйіскен күштер жүйесінің тең әсерлі күшінің қандайда болмасын бір нүктеге қатысты моменті – жүйедегі барлық күштердің сол нүктеге қатысты моментерінің қосындысына тең.*

$$m_x(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} m_x(F_i) \qquad (9)$$

Бұл теореманың осьтерге қатысты анықтамасы:

$$m_x(\vec{F}) = y \cdot F_z - z \cdot F_y,$$

$$m_y(\vec{F}) = z \cdot F_x - x \cdot F_z \qquad (10)$$

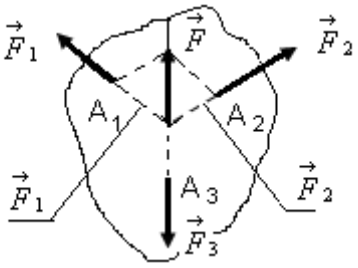
$$m_z(\vec{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x.$$

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

§5. Үш күш туралы теорема

Теорема. Егер бір-біріне параллель емес, бір жазықтықта жататын үш күштен тұратын жүйе тепе-теңдікте болса, онда күштердің әсер ету сызықтары бір нүктеде қиылысады.

Дәлелдеу. Қатты дененің A_1, A_2, A_3 нүктелеріне $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ күштері әсер етсін. Бұл күштер бір жазықтықта жатсын. Олар өзара параллель емес, сондықтан, күштердің, кем дегенде екеуінің әсер ету сызықтары міндетті түрде қиылысулары керек. Мысалы, $\vec{F}_1$ және $\vec{F}_2$ күштерінің әсер ету сызықтары қиылыссын және қиылысу нүктесі O болсын (*23-сурет*).



23-сурет

Суретте көрсетілгендей:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{F} \Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{F}, \vec{F}_3).$$

Теореманың шарты бойынша $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim 0$, сондықтан: $(\vec{F}, \vec{F}_3) \sim 0$. Ал екі күш тепе-теңдікте болу үшін, олар бір түзу бойымен қарама-қарсы жаққа бағытталуы қажет (2-аксиома). Олай болса, $\vec{F}_3$ күшінің әсер ету сызығы O нүктесі арқылы өтеді. Теорема дәлелденді.

§6. Статикалық анықталатын және анықталмайтын жүйелер

Статикада – белгісіздері тепе-теңдік теңдеулерінің санынан көп болмайтын жүйелер қарастырылады. Мұндай жүйелер статикалық анықталатын жүйелер деп аталады. Егер қарастырылып отырған жүйеде белгісіздер саны тепе-теңдік теңдеулері санынан артық болса, онда бұлар статикалық анықталмайтын жүйелер деп аталады. Мысалға *24 а-суретте* көрсетілген AO, BO және CO арқандар арқылы O нүктесінде ілініп қойылған AC абсолют қатты денесін қарастырайық. Бұл денеге P күші әсер етсін.

Берілген жүйенің тепе-теңдігін қарастырайық. Ол үшін арқандарды ойша алып тастап, олардың әсерлерін $\bar{N}_A, \bar{N}_B, \bar{N}_C$ реакцияларымен алмастырамыз (*24 ә-сурет*).

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY



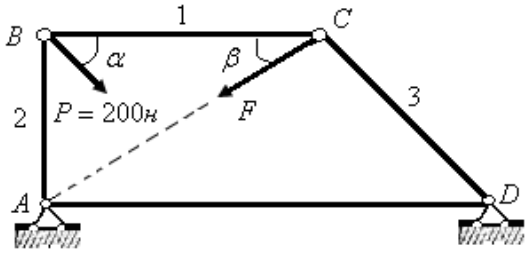
24-сурет

Бұл кезде $\bar{N}_A, \bar{N}_B, \bar{N}_C$ және $\bar{P}$ күштері жинақталатын күштердің жазық жүйесін құрайтындықтан, екі ғана тепе-теңдік теңдеулерін құра аламыз.

Олар: $\sum Y = 0, \quad \sum X = 0$.

Бұл теңдеулерге үш белгісіздер ($\bar{N}_A, \bar{N}_B, \bar{N}_C$) кіреді, өйткені $\bar{P}$ күші белгілі берілген күш. Екі теңдеуден үш белгісізді анықтау мүмкін емес, сондықтан бұл есеп статикалық анықталмайтын есеп болып табылады. Мұндай есептердің шешімі «Материалдар кедергісі» пәнінде қарастырылады.

Мысал. Конструкцияның ($ABCD$) төрт сырықтары AB, BC, CD және DA өзара топса арқылы біріктірілген. Конструкцияның B топсасына $P = 200н$ күші әсер етеді. Бұл күштің бағыты BC сырығымен $\alpha = 45^0$ бұрыш құрайды (*25-сурет*). Ал C топсасына F күші әсер етеді. Бұл күштің бағыты CB сырығымен $\beta = 30^0$ бұрыш құрайды. Конструкция статикалық тепе-теңдікте болу үшін F күшінің шамасы қандай болу керек. Қалған өлшемдері: $\angle ABC = 90^0$ және $\angle DCB = 120^0$.

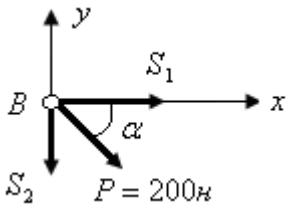


25-сурет

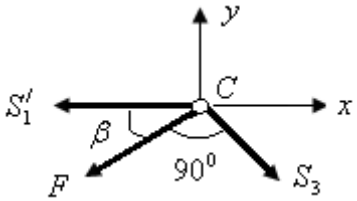
Алдымен B топсасының тепе-теңдігін қарастырамыз. Ол үшін, B топсасын ойша бөліп алып, ол топсада өзара біріктірілген AB және BC сырықтарын ойша алып тастаймыз. Бұл сырықтардың әсер етуші күштерін S_1 және S_2 реакцияларымен алмастырамыз (*26-сурет*). Сонымен, B

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

топсасында үш күш әсер етіп тұр, олар: берілген күш $P = 200н$, сырықтардың бойымен бағытталған S_1 және S_2 реакциялары.



26-сурет



27-сурет

Координата осьтерін *26-суретте* көрсетілгендей қабылдап, тепе-теңдіктің екі теңдеуін құрамыз.

$$\sum F_{ix} = 0 \;\Rightarrow\; S_1 + P \cdot \cos\alpha = 0,$$
$$\sum F_{iy} = 0 \;\Rightarrow\; -S_2 - P \cdot \sin\alpha = 0.$$

Алынған екі теңдеулерді шешіп, S_1 және S_2 реакцияларын табамыз.

$$S_1 + P \cdot \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; S_1 = -P \cdot \cos\alpha = -200 \cdot \cos 45^0 = -141н,$$
$$-S_2 - P \cdot \sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; S_2 = -P \cdot \sin\alpha = -200 \cdot \sin 45^0 = -141н.$$

Табылған реакциялардың таңбалары минус болып шықты, демек, олардың бағыттары *26-суретте* көрсетілген бағыттарға қарама-қарсы бағытталған. Атап айтқанда, S_1 солға, ал S_2 жоғары бағытталған.

Енді C топсасының тепе-теңдігін қарастырамыз. Ол үшін, C топсасын ойша бөліп алып, ол топсада өзара біріктірілген CB және CD сырықтарын ойша алып тастаймыз. Бұл сырықтардың әсер етуші күштерін $S_1^{/}$ және S_3 реакцияларымен алмастырамыз (*27-сурет*). Сонымен, C топсасында үш күш әсер етіп тұр, олар: ізделіп отырған күш F, сырықтардың бойымен бағытталған $S_1^{/}$ және S_3 реакциялары.

Координата осьтерін *27-суретте* көрсетілгендей қабылдап, тепе-теңдіктің екі теңдеуін құрамыз, олар:

$$\sum F_{ix} = 0 \;\Rightarrow\; -F \cdot \cos\beta + S_3 \cdot \cos 60^0 - S_1^{/} = 0,$$
$$\sum F_{iy} = 0 \;\Rightarrow\; -F \cdot \sin\beta - S_3 \cdot \sin 60^0 = 0.$$

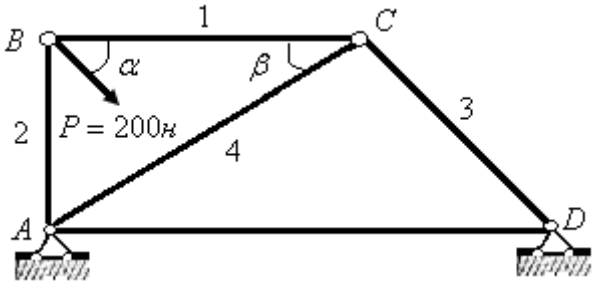
27-суреттен көрініп тұрғандай, BC сырығы және CB сырығы, шындап келгенде, бір сырық болғандықтан: $S_1 = S_1^{/}$. Осыны ескере отырып, алынған екі теңдеулерді шешіп, F күшін және S_3 реакциясын табамыз. Олар:

$$F = 122н,\; S_3 = -70н.$$

Қарастырылған $ABCD$ конструкциясы «орнықсыз» конструкция, өйткені оның орнын немесе F күшінің шамасын сәл өзгертсек, бұл конструкция

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

құлап қалады. Бұл конструкция «орнықты» болу үшін оған тағы бір элемент-сырық қосу керек (*28-сурет*).



28-сурет

Мұндай конструкциялар ферма деп аталады. Ферманың ерекшелігі – элементтері (сырықтары) өзара топсалармен біріктіріледі, ал әсер етуші күштер топсаларға түсіріледі.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY