СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

ДӘРІС № 5

ҮЙКЕЛІС

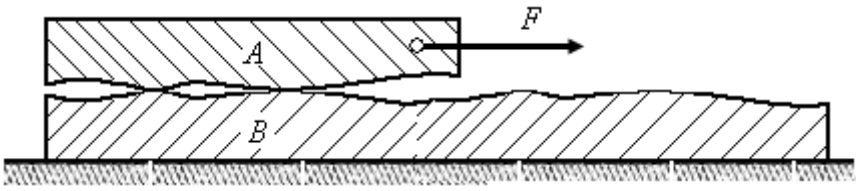
Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

5-*тарау*. ҮЙКЕЛІС

Еркін емес денелердің тепе-теңдігін қарастырған кезде үйкеліс мәселелерін ескермей, барлық байланыстарды *жылтыр* деп қабылдадық. Шындығында, қатты денелердің (абсолют қатты емес) бетін қаншалықты өңдегенмен, дененің беті абсолют жылтыр болмайды.

§1. Сырғанау үйкелісі

Белгілі бір A денесі екінші B денесінің бетімен қозғалыста болсын (*43-сурет*). Бұл денелердің беттері қаншалықты жылтыр қылып өңделгенмен, олардың беттерінді аз да болса кедір-бұдырлар қалып қояды (түсінікті болу үшін кедір-бұдырлар *43-суретте* өте үлкейтіліп көрсетілген).



43-сурет

Осыған байланысты, егер A денесінің тұрақты бір беті, B денесінің бір бетімен жанаса отырып қозғалыста болса, онда қозғалысқа кедергі пайда болады. Осы кедергі *сырғанау үйкелісі* деп аталады. Сырғанау үйкелісін тудыратын тек беттің кедір-бұдыры емес; мысалы, беттері тегістеу құралымен ұқыпты түрде өңделген (шлифовталған) металдан немесе шыныдан жасалған элементтерді бірінің үстіне бірін қойып, өзара жылжыту біраз күш жұмсау керектігін көрсетеді. Бұл жағдайда, сырғанау үйкелісін тудыратын «кедір-бұдыр» емес, элементтердің бір-бірімен жабысуы болып табылады.

Оның себебі үйкелістегі беттердің бөлшектерінің арасындағы молекула аралық тартылыс деп есептеледі. Қорыта айтқанда, сырғанау үйкелісі негізінен:

1) үйкелістегі денелер беттерінің өңделу дәрежесі (кедір-бұдырлық);

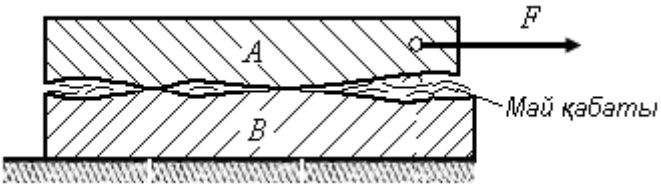
2) үйкелістегі денелер беттерінің бөліктерінің молекула аралық тартылысы сияқты екі себептерден туындайды.

Сонымен қатар сырғанау үйкелісі – жете зерттелмеген күрделі физика-химиялық құбылыс екені есте болу керек.

Сырғанау үйкелісінің табиғаттағы және техникадағы орны ерекше екені белгілі. Бұл құбылыстың жақсылық жағы да, келеңсіз жағы да бар. Келеңсіз жағына келетін болсақ: машиналардың үйкелістегі бөліктерінің тез тозуына, олардың қызмет мерзімін азайтуға, беріктігін төмендетуге және тағы басқа

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

да жағдайларға әкеліп соғады; ал енді жақсылық жағын айтатын болсақ: винттік қозғалыстардың үйкеліссіз болуы мүмкін емес, автомобильдердің, трамвайлардың, тіпті, адамның өзі үйкеліссіз қозғалыста бола алмайтыны белгілі.



44-сурет

Сондықтан инженер үйкелісті тиімді пайдалана білу керек, яғни пайдалы болса, үйкелісті көбейтіп, ал зиянды болса, оны азайтудың жолдарын қарастырып отыру қажет. Үйкелісті азайтудың белгілі жолы – үйкелістегі беттерді майлау болып табылады. Майлаудың пайдасы *44-суретте* көрсетілгендей, үйкелістегі беттерді бір-бірінен ажыратып, қозғалысты жеңілдетеді, бұл кезде, *A* денесінің үйкелістегі бетіне жабысқан майдың қабаты, *B* денесінің үйкелістегі бетіне жабысқан майдың қабаты арқылы сырғанап, *A* денесінің қозғалысын жеңілдетеді. Осылайша сырғанау үйкелісі – *сұйық үйкеліс* деп аталады. Сұйық үйкелістің заңдарын алғаш ашқан орыс ғалымы Н.П.Петров (1883 ж.) болатын.

Бұл оқулықта майланбаған денелердің үйкелісі, яғни *құрғақ үйкеліс* қарастырылады.

Құрғақ үйкеліс ертеден зерттеліп келе жатқаны белгілі, мысалы, Леонардо да Винчи осы үйкелістің заңдарын ашу үшін көптеген тәжірибелер жүргізгенмен, құрғақ үйкелістерінің заңдарының нақты тұжырымдамаларын берген жоқ.

Көптеген тәжірибелердің нәтижесінде 1699 жылы Амонтон құрғақ үйкелістің заңдарын анықтады, ал 1781 жылы француз физигі Кулон құрғақ үйкелістің заңдарын тұжырымдап берді. Бұдан кейін, 1851 жылы Морен бұл заңдарды одан әрі нақтылады. Аталған заңдар бірнеше рет тәжірибе жүзінде тексерілді және олардың іс жүзіндегі дұрыстығы негізінен дәлелденді.

Сырғанау үйкелісінің екі түрін айыруға болады, олар:

- дененің тыныштық кезіндегі үйкелісі;
- дененің қозғалыс кезіндегі үйкелісі.

§2. Тыныштықтағы құрғақ үйкелістің заңдары. Кулон заңдары

Алдымен, заңдардың анықтамаларын келтірейік.

1. Егер белгілі бір күш, берілген денені қозғалмайтын басқа бір дененің үсті арқылы жылжытуға тырысса, онда осы денелердің жанасу жазықтықтарында ұстасу күші туындайды. Бұл күш, жылжу бағытына қарама-қарсы бағытталады, ал оның шамасы әсер етуші күштің шамасына

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

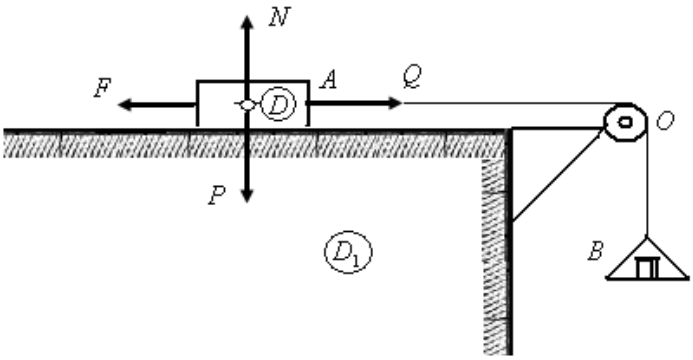
тәуелді болады және ол шама нөлден басталып, белгілі бір максимум шамаға (F_{max}) жеткенде дене тыныштық күйден қозғалыс күйіне көшеді. Сонымен, ұстасу күшін *тыныштықтағы сырғанау үйкелісі күші* деп немесе *статикалық үйкеліс күші* деп атаймыз.

2. Тыныштықтағы сырғанау үйкелісі күшінің ең үлкен шамасы (максимал) қозғалыстағы дененің қозғалмайтын дененің жанасу жазықтығына көрсететін тік қысымына пропорционал болады, басқаша айтқанда, қозғалмайтын дененің жанасу жазықтығының тік реакциясына пропорционал болады. Пропорционалдық коэффициент үйкелістегі денелердің материалдарына, жанасу жазықтықтардың өңделу дәрежесіне, температураға және тағы басқа да физикалық факторларға тәуелді болады. Бұл коэффициент *тыныштықтағы сырғанау үйкелісі коэффициенті* немесе *статикалық үйкеліс коэффициенті* деп аталады.

3. Үйкеліс күшінің ең үлкен шамасы (максимал шамасы) үйкеліс жазықтықтарының жанасу аудандарына тәуелді болмайды.

Тұжырымдалған заңдарды дәлелдеу үшін келесі экспериментке көңіл аударайық.

Кез келген қозғалмайтын D_1 денесінің үстіне D денесі орналассын. Бұл дене параллелепипед түрінде жасалсын, ал салмағы P болсын. Қозғалатын D денесінің A нүктесіне жіңішке жіпті байлап, жіптің екінші ұшына B табақшасын бекітейік. Осы табақшаны O блогі арқылы іліп қояйық (*45-сурет*).

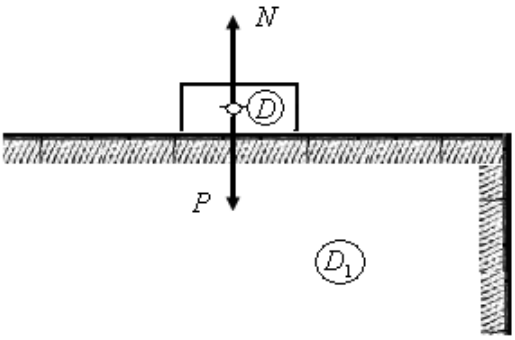


45-сурет

Егер қозғалмайтын дененің беті абсолют жылтыр болса, онда реакция бетке перпендикуляр бағытталып, P күшімен теңестірілген болар еді. Бұл жағдайда Q күшінің түкке тұрмайтын аз шамасының өзі жүктің қозғалысын тудырған болар еді. Бірақ, қозғалмайтын D_1 денесімен D денесінің араларында үйкеліс болатындықтан, D денесін орнынан қозғалтуға біршама күш керек болады.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Экспериментің басында $Q = 0$ деп қарастырамыз (табақшаға жүк салынбаған). Бұл кезде үйкеліс күші болмайды, P және N күштері өзара тепе-теңдікте болады (*46-сурет*).



46-сурет

Енді табақшаға жүк салып, оның салмағын біртіндеп көбейте бастаймыз. Жүктің салмағына байланысты Q күші де, үйкеліс күші де өсе бастайды. Осылайша Q күшін біртіндеп өсіре берсек, бір уақыт болғанда, D денесі тыныштық пен қозғалыстың шекарасына тұрады. Осы сәтте, дене әлі тыныштық күйде болғандықтан, Q күші үйкеліс күшімен теңестіріліп тұрады. Бұл кезде үйкеліс күші өзінің максимал шамасына сәйкес болады, яғни - $F_{\max}$ ($0 \le F_{т} \le F_{\max}$). Күштің (Q) бұдан әрі сәл өсуі дененің қозғалысын тудырады.

Экспериментті одан әрі жалғастырып, D денесінің салмағын екі есе өсірейік. Бұл кезде қозғалмайтын денеге - D_1 түсетін қысымда екі есе өседі, яғни $2P$ шамасына тең болады. Сондықтан денені тыныштық күйінен қозғалысқа келтіру үшін Q күшінде екі есе өсіру керек болады, демек, ол $2Q$ шамасына тең болады. Осылайша, қозғалмайтын денеге қысымды өсіре отырып, дененің қозғалысын тудыратын күштің қысымға пропорционал өсетінін көреміз.

Сонымен, денені тыныштық күйінен қозғалысқа көшіретін күштің (Q) ең үлкен (максимал) шамасы, үйкеліс күшінің максимал шамасына ($F_{\max}$) тең болатындықтан, Кулонның бірінші заңы дұрыс деп тұжырымдаймыз, яғни

$$Q_{\max} = F_{\max}. \qquad (20)$$

Кулонның екінші заңын

$$F_{\max} = f \cdot N. \qquad (21)$$

теңдігі арқылы көрсетуге болады.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

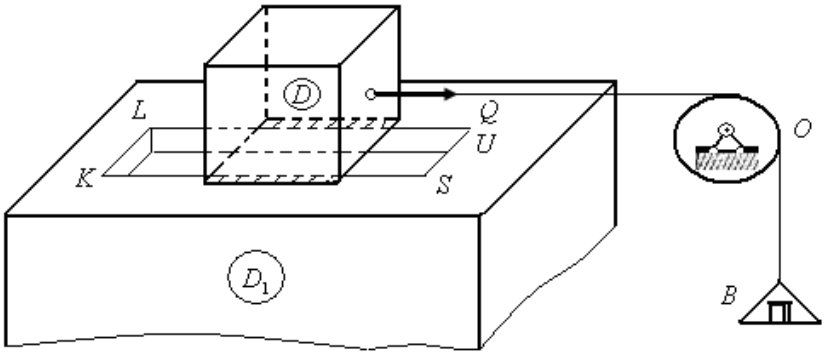
Соңғы теңдіктегі f - статикалық үйкеліс коэффициенті деп аталады, ол өлшемсіз шама болып табылады.

Келтірілген 1- және 2-заңдарды біріктіріп, сырғанау үйкелісі күшінің өрнегін аламыз:

$$0 \le F_{т} \le F_{max} = f \cdot N . \qquad (22)$$

Кулонның үшінші заңын тексеру үшін, қозғалмайтын дененің (D_1) қозғалатын денемен (D) жанасатын жазықтығынан тесік жасаймыз. Тесіктің ауданы $KLSU$ тіктөртбұрышына тең болсын (*47-сурет*).

Бұл кезде, D денесі D_1 денесімен суретте көрсетілген штрихталған жазықтар арқылы ғана жанасады. Осыған қарамай, эксперименттердің көрсетулері бойынша, денені қозғалтатын күштің (Q) шамасы бұрынғыдай болып қалады екен, демек, Кулонның үшінші заңы да дұрыс болып табылады.



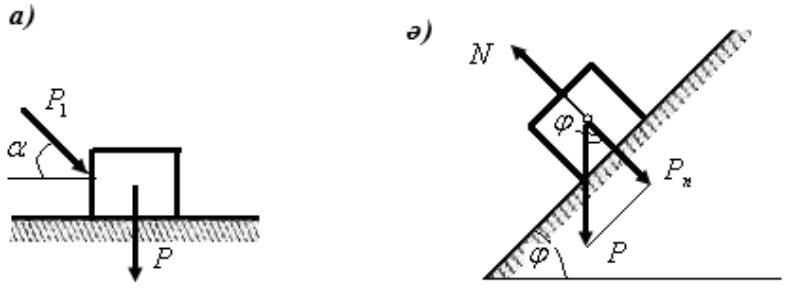
47-сурет

Есте болатын жағдай: Кулон заңдарының нәтижелері жуық шамалар болып табылады, бірақ олардың қарапайымдығы және коэффициентері эксперимент арқылы табылатын болғандықтан техникада жиі қолданылады.

Алынған 21- және 22-формулалар құрғақ үйкеліс теориясындағы негізгі формулалар болып табылады. Бұл формулаларды қолданған кезде тік қысыммен дененің салмағын шатастырып алмау керек. Мысалы, тірек жазықтығы горизонталь болып және оған дененің салмағынан басқа, осы жазықтыққа параллель емес басқа күштер әсер етпесе ғана тік қысым дененің салмағына сәйкес болады. Ал басқа жағдайларда тік қысымның (N) орнына қандай күшті қою керектігінің мысалдарын келтірейік.

Денелердің жанасуларының *48 а-суретінде* көрсетілген нұсқасын қарастырсақ, бұл кезде тік реакциясы $N = P + P_1 \cdot \sin\alpha$ өрнегімен, ал максимал үйкеліс күші $F_{max} = f \cdot (P + P_1 \cdot \sin\alpha)$ өрнегімен анықталады.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

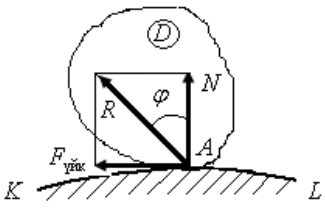


48-сурет

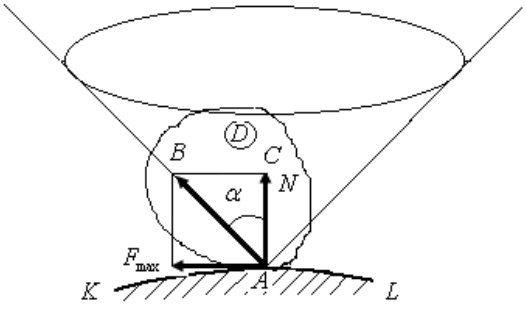
Егер салмағы P дене көлбеу жазықтықта жатса (*48 ә-сурет*), онда тік реакция $N = P_n = P \cdot \cos\phi$ өрнегімен, ал максимал үйкеліс күші $F_{\max} = f \cdot P \cdot \cos\phi$ өрнегімен анықталады.

§3. Кедір-бұдыр беттің реакциясы. Үйкеліс бұрышы. Үйкеліс конусы

Кез келген дене D денесі KL кедір-бұдыр бетінің үстінде A нүктесіне тіреліп жатсын (*49-сурет*). Дененің беті жылтыр болғанда, толық реакция бетке тік бағытталған болар еді. Бірақ бұл бет кедір-бұдыр болғандықтан, толық реакция екі құраушыдан тұрады, олар: тік құраушы – N және үйкеліс күші – $F_т$ (*лат. tritus* – үйкеліс). Аталған құраушыларды параллелограмма ережесін пайдаланып өзара қосып, кедір-бұдыр беттің толық реакциясын (R) аламыз. Бұл реакция тік бағытпен (нормальмен) ϕ бұрышын құрайды (*49-сурет*).



49-сурет



50-сурет

Егер үйкеліс күшінің ең үлкен шамасын ($F_{\max}$) алсақ, онда бұл бұрыштың шамасы α-ға тең болады (*50-сурет*). Аталған α бұрышы - *үйкеліс бұрышы* деп аталады. *50-суреттегі* ABC үшбұрышынан:

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{F_{\max}}{N} = f\ .$$

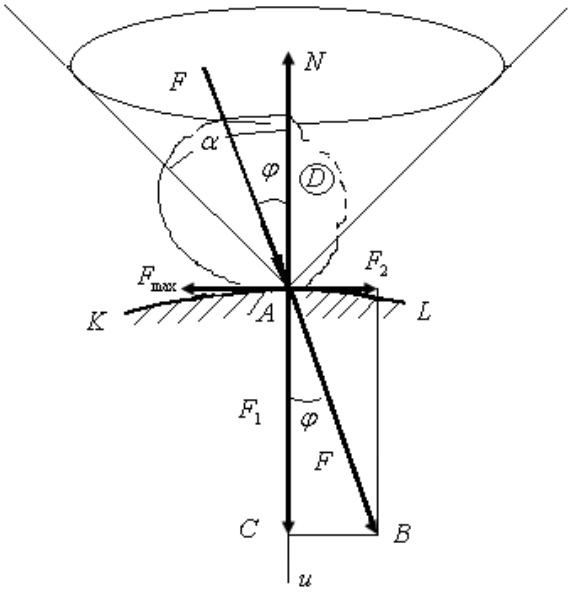
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Сонымен, соңғы өрнектен көрініп тұрғандай, үйкеліс бұрышының тангенсі статикалық үйкеліс коэффициентіне тең, яғни

$$tg\alpha = f \,. \qquad (23)$$

Берілген D денесін жанасу жазықтығында әр бағытта қозғалта отырып, бағыттарға сәйкес толық реакцияны аламыз. Бұл реакциялар нормальға ең үлкен бұрыш құрап отырады. Төбесі жанасу жазықтығының нүктесінде (A) жатқан, ал құраушылары максимал реакциялардың әсер ету сызықтары болып табылатын айналма қозғалыстың конусы *үйкеліс конусы* деп аталады. Бұл конустың ашасының бұрышы үйкеліс бұрышынан екі есе көп болады.

KAL кедір-бұдыр бетінің үстінде жатқан D денесіне күштер жүйесі әсер етсін. Осы күштер жүйесінің тең әсер етуші күші F дененің жанасу нүктесі A арқылы өтсін (*51-сурет*).



51-сурет

Егер тең әсер етуші күштің әсер ету сызығы үйкеліс конусының іші арқылы өтсе, онда тең әсер етуші күш қаншалықты үлкен болғанмен, дене қозғалмайды. Бұл тұжырымның дұрыстығын тексеру үшін, F күшін F_1 және F_2 күштеріне жіктейік.

Олардың біреуі тірек жазықтығына тік бағытталса, ал екішісі жанама бойымен бағытталған. ACB үшбұрышынан: $F_1 = F\cos\phi$ және $F_2 = F\sin\phi$. Теңдіктердегі $\phi - F$ күшінің әсер ету сызығымен Au нормалінің араларындағы бұрыш. Қарастырылып отырған F_1 күші тірек бетіне тік қысым ретінде әсер етіп, беттің тік реакциясымен теңестірілсе, ал F_2 күші

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

денені оңға қарай қозғалтуға тырысады. Бетке тік түсірілген қысымның нәтижесінде, ең үлкен үйкеліс күші *21-формуламен* анықталады, яғни

$F_{\max} = f \cdot N$, ал $f = tg\alpha$ және $N = F_1$ болғандықтан

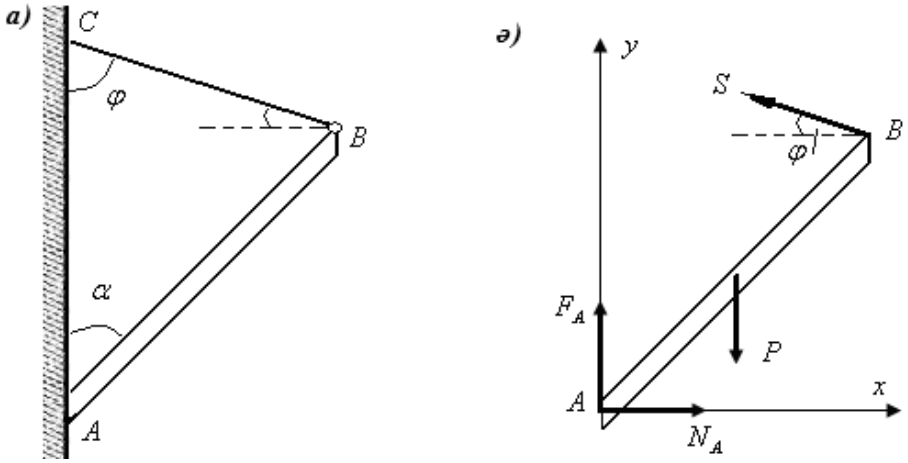
$$F_{\max} = F \cdot \cos\phi \cdot tg\alpha = F_2 \frac{tg\alpha}{tg\phi}.$$

Бірақ $\alpha \succ \phi$ болғандықтан, $F_{\max} \succ F_2$, олай болса, F күшінің кез келген шамасында дене ешқандай қозғалыс ала алмайды.

Үйкеліс конусының тамаша қасиеті: *егер қатты денеге әсер етуші кез келген шамадағы тең әсер етуші күштің әсер ету сызығы үйкеліс конусының ішінде жатса, онда бұл күш дененің ешқандай да қозғалысын тудыра алмайды*.

Мысал. Салмағы P біртекті сырық AB бір шеткі қимасы арқылы қабырғаға BC жібімен байланып, ал оның екінші шеті кедір-бұдыр тік қабырғаға тіреліп қойылған (*52-сурет*).

Тыныштық кезіндегі сырықпен қабырғаның арасындағы ең аз бұрышты ($\phi = \alpha$) және жіптің созылу күшімен қабырғаның реакциясын анықтау керек. Берілімдер: Сырықтың ортасына P күші түсірілген. $AB = BC$, $\phi = \alpha$ және A нүктесіндегі үйкеліс коэффициентін f деп қабылдау керек.



52-сурет

Сырықтың статикалық тепе-теңдігін қарастырамыз. Ол үшін байланыстарды алып тастап, *52 ə-суретінде* көрсетілген есептеу нұсқаны қабылдаймыз. A нүктесіндегі реакцияның құраушылары: N_A және F_A, ал жіптің созылу күші S (аталған күштердің бағыттары суретте көрсетілген).

Статикалық тепе-теңдіктің теңдеулерін құрамыз. Олар:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A - S \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = 0,$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\sum F_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A + S \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - P = 0,$$

$$\sum M_A(F_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad -P \cdot \frac{AB}{2} \cdot \sin\phi + S \cdot AB \cdot \sin(\pi - 2\phi) = 0.$$

Бұл теңдеулерге ең үлкен үйкеліс күшінің формуласын қосамыз, яғни $F_A = f \cdot N_A$.

Алынған теңдеулерді шешіп, ізделіп отырған шамаларды анықтаймыз, олар:

$$\phi = arctg\frac{3}{f}, \qquad N_A = \frac{3P}{4 \cdot f},$$

$$S = \frac{P\sqrt{9 + f^2}}{4 \cdot f}, \qquad F_A = \frac{3P}{4}.$$

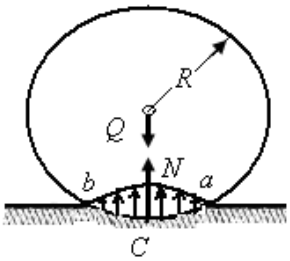
Есептің қойылу шарты бойынша, сырықтың тепе-теңдігі орындалатын ϕ бұрышының ең кіші шамасын анықтадық. Сонымен қатар бұл сырық $tg\phi \succ \frac{3}{f}$ теңсіздігі орындалатын барлық жағдайда да тепе-теңдік күйде бола алады. Мысалы, $tg\phi \geq \frac{3}{f}$ теңсіздігі орындалса болды.

§4. Домалау үйкелісі

Егер бір денені басқа дененің бетімен қозғалтқан кезде, жанасатын денелер беттерінің әр аудандары бір-бірімен біртіндеп жанасып отыратын болса, басқаша айтқанда, бір денені екінші дененің бетімен сырғаныспен немесе сырғаныссыз домалатса, онда қозғалысқа кедергі туындайды. Осылайша туындайтын кедергіні *домалау үйкелісі* деп атайды.

Домалау үйкелісінің табиғаты сырғанау үйкелісі секілді жеткілікті түрде зерттелмеген, сондықтан техникалық тәжірибеде эксперимент арқылы табылған жуық шамалар қолданылады.

Салмағы Q, радиусы R дөңгелек көлденең жазықтықтың үстінде тұрсын (*53-сурет*).



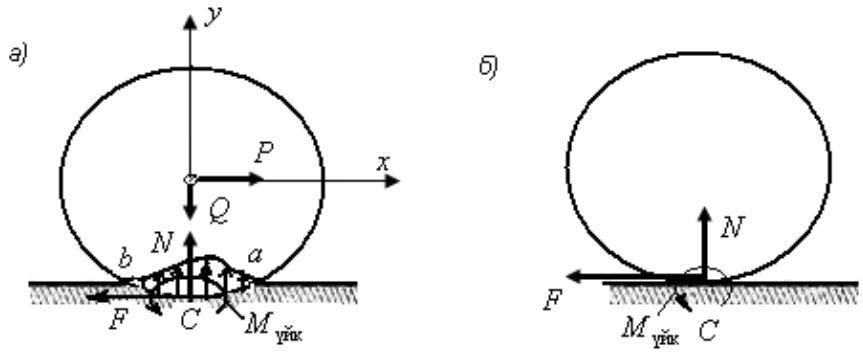
53-сурет

Өзінің салмағының әсерінен, жанасу маңында bCa ойығымен жазықтыққа дөңгелек кіреді және өзі де азды-көпті жапырылады. Өз

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

кезегінде, жазықтық дөңгелекке таралған күшпен әсер етеді. Бұл күш *жазықтықтың* bCa доғасы бойымен симметриялы түрде таралып жатады және оның тең әсер етуші күші N жазықтықтың реакциясы болып табылады. Дөңгелектің салмағы Q мен жазықтықтың реакциясы N өзара теңестіріліп тұрады.

Дөңгелектің центріне көлденең бағытталған P күшімен әсер етейік (*54 а-сурет*).



54-сурет

Енді таралған күш симметриялы болмайды, ол ba доғасымен таралып, P күшінің әсер етіп тұрған жағына қарай жылжиды (*54а-сурет*). Сондықтан таралған күштен туындайтын реакцияны C нүктесіне алып келіп, оны үш құраушыға жіктейміз. Олар: бас вектордың құраушылары – N, F және бас момент – $M_т$.

Көлденең бағыттағы F күші модулі бойынша P күшіне тең болғандықтан, олар жұп құрайды да, дөңгелекті домалата бастайды, сонымен қатар бұл жұптың моменті екінші жұптың $M_т$ моментімен теңестіріледі. Дененің тыныштық күйінен домалу күйге көшкен сәтте $M_т$ моментінің шамасы, яғни оның шектік шамасы тік реакцияның шамасына пропорционал болатынын эксперименттер көрсетеді. Демек,

$$M_т = \delta \cdot N . \qquad (24)$$

Домалап қозғалған дененің материалына, тірек жазықтығына, өңделу деңгейіне тәуелді коэффициент: δ - *домалау үйкелісінің коэффициенті* деп аталады, өлшемі *мм* немесе *см*.

Дененің домалап қозғалысының мәселелерін қарастырған кезде, әдетте, дене домалайтын жазықтық абсолют қатты және дене жазықтықпен бір нүктеде ғана жанасады деп есептеледі (*54 ә-сурет*).

54 а-суретті қарастырып, дөңгелектің тепе-теңдігін құрайық:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad P - F = 0 ,$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad N - Q = 0 ,$$

$$\sum M_C(F_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad -P \cdot R - M_{үйк} = 0 .$$

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Бұл теңдеулерге *21- және 24-формулалардан* туындайтын шарттарды ескерсек, онда: $F \le f \cdot N$ және $M_т \le \delta \cdot N$.

Алғашқы үш теңдіктен F, N және $M_т$ өрнектерін тауып алып, оларды соңғы екі теңсіздікке қойғаннан кейін дөңгелектің тепе-теңдік шарттарын аламыз. Олар:

$$P \le f \cdot Q, \tag{25}$$

$$P \le \frac{\delta}{R} \cdot Q. \tag{26}$$

Егер 25-шарт орындалса, онда дөңгелек сырғанамайды, ал егер 26-шарт орындалса, онда дөңгелек домаламайды. Тәжірибелердің көрсетуі бойыншы, $\frac{\delta}{R}$ шамасы f шамасына қарағанда әлдеқайда аз болады. Демек, сырғанап қозғалудың орнына домалап қозғалу тиімді келеді, ал бұл жағдай техникада жоғарғы дәрежеде қолданылатыны белгілі.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY