СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

ДӘРІС № 6

КЕЗ КЕЛГЕН КЕҢІСТІК КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ

Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

6-*тарау*. КЕЗ КЕЛГЕН КЕҢІСТІКТІК КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ

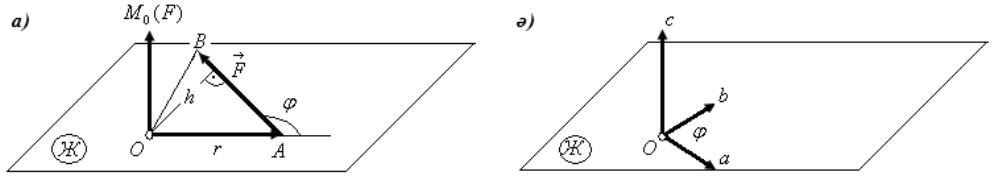
Әсер ету сызықтары кеңістікте кез келген түрде орналасқан күштер жүйесін қарастырайық. Мұндай күштердің жекеленген түрлері өзара параллель болуы мүмкін немесе түйіскен жүйе болуы да мүмкін. Кеңістікте кез келген түрде орналасқан күштерді қосу немесе олардың тепе-теңдігінің есептерін шығарған кезде, күштердің жазық жүйесін қарастырғанда қолданған, яғни нүкте арқылы алынған күш моменті туралы және жұптың моменті туралы ұғымдарды пайдаланамыз. Кеңістіктегі күштер жүйесі үшін бұл ұғымдарды жинақтап қорыта отырып, ось арқылы алынған күштер моменті туралы жаңа ұғымды пайдаланамыз.

§1. Нүктеге қатысты векторлық момент. Оське қатысты момент

Егер қатты денеге әсер етуші күштердің барлығы бір жазықтықта жатса, онда жазықтықтың белгілі бір нүктесіне қатысты күштердің моменттері бір-бірінен шамалары мен таңбалары арқылы ажыратылады, сондықтан олар алгебралық шамалар деп қарастырылады. Егер күштер әр жазықтықтарда жатса, онда әр күштің нүкте арқылы айналдыру әсерін толық бағалау үшін, күш және моменттің центрі жатқан жазықтықты көрсету керек болады. Ал жазықтықтың кеңістіктегі орны, әдетте, осы жазықтыққа перпендикуляр бағытталған вектормен анықталады.

Сонымен, центр арқылы алынған күш моменті вектор арқылы көрсетіледі. Бұл вектор аталған центрге түсіріледі және оның шамасы күштің модулі мен иіннің көбейтіндісіне тең болады. Ал бұл вектор күшпен момент центрі жатқан жазықтыққа перпендикуляр болып, күш жазықтықты сағат тіліне қарсы айналдыратын жаққа бағытталады (*55 а-сурет*).

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY



55-сурет

$\vec{F}$ күшінің O нүктесі арқылы алынған векторлық моментін $\vec{M}_0(\vec{F})$ символымен белгілейміз. *55 а-суретінен* көрініп тұрғандай:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = F \cdot h = 2 \cdot S_{OAB},$$

бұл теңдіктегі S_{OAB} – *55 а-суретінде* көрсетілген OAB үшбұрышының ауданы.

Бұдан былай, кейбір теоремаларды дәлелдеген кезде, күштің векторлық моментін векторлық көбейтінді ретінде пайдаланамыз. Осыған байланысты, математикадан белгілі келесі анықтама есте болу керек: екі векторлардың, яғни $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп, осы векторлардың модульдерін өзара көбейтіп, одан кейін, алынған көбейтінді аталған векторлардың арасындағы бұрыштың синусына көбейтілген шамаға тең болатын $\vec{c}$ векторын айтады (*55 ә-сурет*). Бұл вектордың бағыты жазықтыққа перпендикуляр болып, күш жазықтықты сағат тіліне қарсы айналдыратын жаққа бағытталады.

Күш әсер етіп тұрған нүктенің O нүктесіне қарағандағы радиус-векторын $\vec{r}$ арқылы белгілейік, сонда $\mathrm{h} = \mathrm{r} \cdot \sin(\pi - \phi) = \mathrm{r} \cdot \sin\phi$, ал $M_0(F) = F \cdot r \cdot \sin\phi$, суретте көрсетілгендей, ϕ - $\vec{F}$ және $\vec{r}$ векторларының арасындағы бұрыш. Сондықтан күштің O центріне қатысты векторлық момент, күш әсер етіп тұрған нүктенің радиус-векторының күш векторына көбейтіндісімен өрнектеледі, яғни

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (27)$$

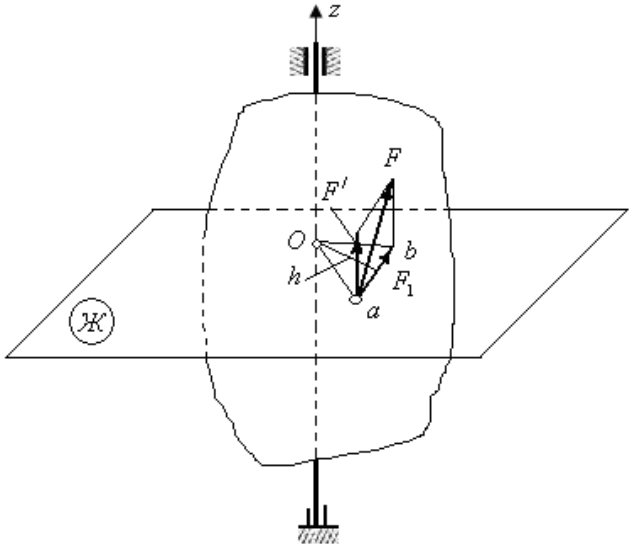
Соңғы формуладағы (27) көбейтінділердің орындарын ауыстыруға болмайтыны есте болу керек (олардың орындарын ауыстырса вектордың бағыты өзгеріп кетеді).

Келесі кезекте, ось арқылы алынған моменттерді қарастырайық. Ол үшін, қатты дене қозғалмайтын Oz осін айнала қозғалатын болсын (*56-сурет*).

Дененің a нүктесіне F күшін түсірейік. Дененің a нүктесі арқылы Oz осіне перпендикуляр $Ж$ жазықтығын тұрғызайық, содан кейін F күшін екі құраушыға жіктейік. Күштің бір құраушысы F', бұл Oz осіне параллель бағытталған, ал екіншісі F_1 – $Ж$ жазықтығында жатады. Күштің құраушысы F', әрине, денені Oz осі арқылы айналдыра алмайды, тек қана

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

денені осьтің бойымен қозғалтуға ұмтылады. Денені осьті айналдыра қозғалтатын күш - F_1 күші. Денені Oz осін айналдыра қозғалтатын F күші әрекетінің өлшемі болып, оның F_1 құраушысының O нүктесіне қатысты алгебралық моменті табылады.



56-сурет

Сонымен, *күштің жазықтықтағы оське перпендикуляр құраушысының осьтің жазықтықпен қиылысу нүктесі арқылы алынған моменті болып табылатын скалярлық шама – ось арқылы алынған күш моменті деп аталады*.

Егер күштің F_1 құраушысы жатқан жазықтыққа осьтің оң бағыты жағынан қарағанда, бұл жазықтық сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бағытқа айналса, онда ось арқылы алынған момент оң деп есептеледі.

Жоғарыдағы *56-суреттен* көрініп тұрғандай: $M_z(F) = F_1 \cdot h = 2 \cdot S_{OAB}$, Бұл теңдіктегі S_{OAB} *– 56-суретте* көрсетілген Oab үшбұрышының ауданы.

Айтылғандай, оське қатысты күш моменті вектор емес – скаляр шама, оның өлшемі СИ жүйесінде – $н \cdot м$, ал техникалық жүйеде – $кГ \cdot м$.

Ось арқылы алынған күш моменті екі жағдайда ғана: 1. F күші оське параллель болғанда ($F_1 = 0$);

2. F күшінің әсер ету сызығы осьпен қиылысқанда ($h = 0$) нөлге тең болады.

Енді ось арқылы алынған скаляр шама - күш моменті және осы осьтің бойында жатқан нүкте арқылы алынған векторлық шама – күш моменттерінің арасындағы байланысқа тоқталайық.

Суретте көрсетілген $Ж$ жазықтығындағы O және O_1 нүктелері осы жазықтыққа перпендикуляр $Oи$ осінің нүктелері болсын (*57-сурет*). Осы

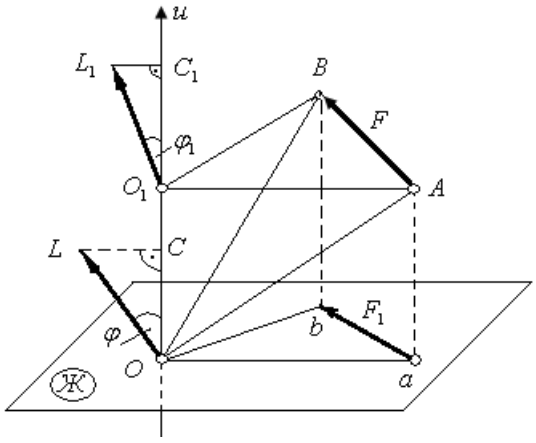
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

нүктелер арқылы алынған F күшінің моменттері. $M_0(F) = OL$ және $M_{01}(F) = O_1L_1$. Бұлардың модульдері:

$$OL = |M_0(F)| = 2 \cdot S,$$

$$O_1L_1 = |M_{01}(F)| = 2 \cdot S_1.$$

Бұл өрнектердегі: $S - OAB$ үшбұрышының ауданы, ал $S_1 - O_1AB$ үшбұрышының ауданы. Енді OAB және O_1AB үшбұрыштарын берілген жазықтыққа проекциялап, олардың ортақ үшбұрышын (ΔOab) аламыз. Геометрияның белгілі теоремасын пайдаланып, ΔOab үшбұрышының ауданын анықтаймыз.



57-сурет

Ол аудан: $S^* = S \cdot \cos\phi = S_1 \cdot \cos\phi_1$ немесе:

$$|M_z(F)| = |M_O(F)| \cos\phi = |M_{O1}(F)| \cos\phi_1. \qquad (28)$$

Сонымен, ось арқылы алынған күш моменті, осы осьтің бойында жатқан кез келген нүкте арқылы алынған вектор шама – күш моменттерінің проекциясына тең болады.

Келесі қарастыратынымыз, координаттар осьтеріне қатысты моменттер туралы. Бұдан бұрын қорытылған *27- және 28-формулаларды* пайдаланып, координата осьтері арқылы алынған моменттердің өрнектерін аламыз.

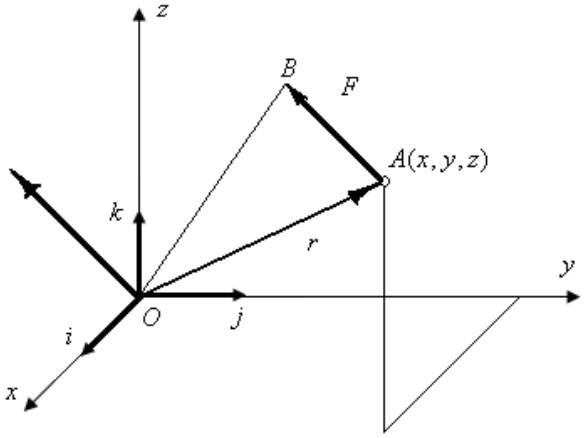
Векторлық көбейтінді $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, көбейткіштер векторларының координата осьтеріне проекциялары және осьтердің бірлік векторлары арқылы өрнектелетіні математикадан белгілі. Сондықтан:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ a_x, a_y, a_z \\ b_x, b_y, b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

A нүктесінің радиус-векторының координаттар осьтеріне проекциясы осы нүктенің координатасы болып табылатындықтан (*58-сурет*),

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

жоғарыдағы формуланы қолданып, *27-формуланы* түрлендіріп жазайық, яғни

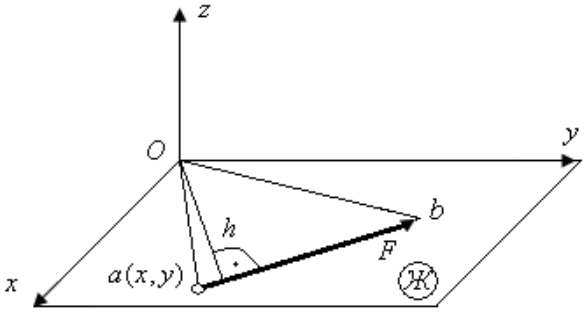


58-сурет

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ x, y, z \\ F_x, F_y, F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x).$$

Сонымен қатар $M_O(F)$ вектор ретінде координата осьтеріне өзінің проекциялары және бірлік векторлар арқылы өрнектеледі, демек:

$$M_O(F) = i\left[M_O(F)\right]_x + j\left[M_O(F)\right]_y + k\left[M_O(F)\right]_z.$$



59-сурет

$M_O(F)$ мәнінің өрнектерін салыстыра отырып,

$$\left[M_O(F)\right]_x = yF_z - zF_y,\ \left[M_O(F)\right]_y = zF_x - xF_z,\ \left[M_O(F)\right]_z = xF_y - yF_x$$

теңдігін аламыз.

Енді *28-теңдікті* ескере отырып, келесі формуаларды аламыз

$$\left[M_O(F)\right]_x = M_x(F),\ \left[M_O(F)\right]_y = M_y(F),\ \left[M_O(F)\right]_z = M_z(F),$$

содан кейін:

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$M_x(F) = yF_z - zF_y,$$
$$M_y(F) = zF_x - xF_z, \qquad (29)$$
$$M_z(F) = xF_y - yF_x.$$

Оське қатысты күш моменті ұғымының анықтамасы бойынша, нүктеге қатысты күш моменті, шындап келгенде, ол да оське қатысты күш моменті. Тек бұл кезде ось, күштің әсер ету сызығы және нүкте жататын жазықтыққа перпендикуляр болып, аталған нүкте арқылы өтеді.

Мысалы, күштің әсер ету жазықтығы xOy жазықтығында (*60-сурет*) жатсын, ал оның әсер ету нүктесінің координаттары x, y болсын, яғни $a(x, y)$. Сонда $|M_z(F)| = |M_O(F)| = 2 \cdot S^{**} = F \cdot h$. Сонымен қатар алынған шамаға O нүктесіне қатысты F күшінің алгебралық моменті де тең. Демек,

$$M_O(F) = M_z(F) = xF_y - yF_x.$$

$S^{**} - Oab$ үшбұрышының ауданы.

§2. Әр жазықтықтарда жатқан жұптар (қос күштер) теориясы

Кеңістікте кез келген түрде орналасқан жұптардың денеге әсер ету мәселелерін шешіп алу үшін, жұп моменті ұғымын қорытып алу керек. Сонымен, *жұп моменті дегеніміз – сан мәні күш пен жұп* (*қос күштің*) *иінінің көбейтіндісіне тең, жұп жатқан жазықтыққа перпендикуляр бағытталған вектор болып табылады. Бұл перпендикуляр жазықтыққа қараған кезде, оның айналысы сағат тіліне қарсы бағытталатын жаққа қарай бағытталады* (*60-сурет*).

Қос күштің, яғни жұптың векторлық моменті, жалпылама алғанда, $M(F_1, F_1^*)$ символымен белгіленеді, ал біз оны қысқаша M символымен белгілейміз. Жұптың векторлық моменті осы жұптың денеге әсерін толығымен анықтап береді, бірақ оның әсер ету нүктесі туралы мәселе ашық күйінде қалып отыр. Сондықтан келесі теореманы дәлелдеп алу керек.

2.1. Жұпты параллель жазықтыққа көшіру туралы теорема. *Денеге әсерін еш өзгертпей, күш жұбын кез келген параллель жазықтыққа көшіруге болады*.

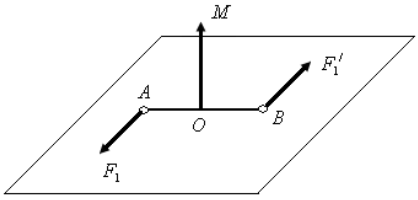
Бірінші $Ж_1$ жазықтығында иіні AB-ға тең (P, P') жұбы жатсын (*62-сурет*). Осы жазықтыққа параллель екінші $Ж_2$ жазықтығын жүргізейік. Екінші жазықтыққа, AB иініне тең және оған параллель A_1B_1 кесіндіні жүргізейік.

Содан кейін, A_1 және B_1 нүктелеріне $P_1 = P_2 = P_1' = P_2' = P = P'$ теңдіктеріне сәйкес $\{P_1, P_2\}$ және $\{P_1', P_2'\}$ теңдестірілген күштер жүйесін түсірейік. Сол кезде:

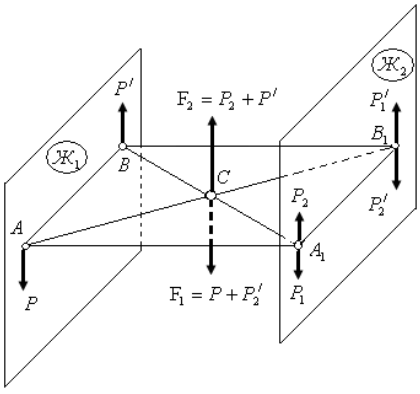
$$\{P, P', P_1, P_1', P_2, P_2'\} \sim \{P, P'\}.$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

A мен A_1 және B мен B_1 нүктелерін қосып, диагоналдары C нүктесінде қиылысатын AA_1B_1B параллелограммасын аламыз. P мен P_2' және P' пен P_2 күштерін қосып, олардың тең әсер етуші күштерін аламыз, олар: F_1 және F_2. Сонан кейін, теңдестірілген $\{F_1, F_2\}$ - күштер жүйесін алып тастап, тек бір жұпты, яғни (P_1, P_1') - жұбын ғана аламыз. Сонымен, (P, P') - жұбының денеге әсерін өзгертпестен, бұл жұпты бірінші $Ж_1$ жазықтығынан оған параллель екінші $Ж_2$ жазықтығына көшірдік, демек, теорема дәлелденді.



60-сурет



61-сурет

Қорыта айтқанда: *егер қатты денеге әсер етуші екі жұптың моменттерінің сан мәндері тең және айналдыру бағыттары бірдей болып, сонымен қатар олар жатқан жазықтықтар* өзара параллель болса, *онда бұл жұптар бір-біріне эквивалент болады*.

Дәлелденген теоремадан туындайтын анықтамалар:

1) *жұптың векторлық моменті еркін вектор болып табылады, яғни оны өзін-өзіне параллель жаңа орынға көшіруге болады; сондықтан векторлық моменттің әсер ету нүктесі ретінде кез келген нүктені қабылдауға болады*.

2) *егер екі жұптың векторлық моменттері геометриялық тұрғыдан тең болса, онда бұл жұптар бір-біріне эквивалент келеді*.

2.2. Жұптың векторлық күш моменттерінің жиыны туралы теорема. *Жұптың кез келген нүкте арқылы алынған векторлық күш моменттерінің жиыны жұптың векторлық моментіне тең.*

Дененің кез келген O нүктесін алайық (*62-сурет*). Жұптың осы O нүктесіне қатысты векторлық күш моменттерінің жиыны:

$$M_O(F) + M_O(F') = r_B \times F + r_A \times F' .$$

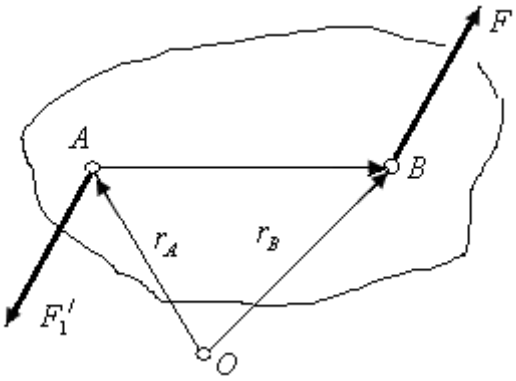
Соңғы теңдіктегі F'-ті F арқылы алмастырсақ:

$$M_O(F) + M_O(F') = r_B \times F - r_A \times F = (r_B - r_A) \times F ,$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

бірақ $(r_B - r_A) = AB$ болғандықтан:

$$M_O(F) + M_O(F') = AB \times F\ .$$



62-сурет

Бұл теңдіктегі векторлық көбейтінді $\vec{AB} \times \vec{F}$ жұптың векторлық моменті, ал бұл моменттің сан мәні күш жұбының модулін иінге көбейткенге тең болады және жұп жатқан жазықтыққа перпендикуляр бағытталады. Бұл перпендикуляр, жазықтыққа қараған кезде, оның айналысы сағат тілінің айналуына қарсы бағытталады.

Сонымен, теорема дәлелденді, яғни:

$$M(F, F') = M = M_O(F) + M_O(F')\ . \qquad (30)$$

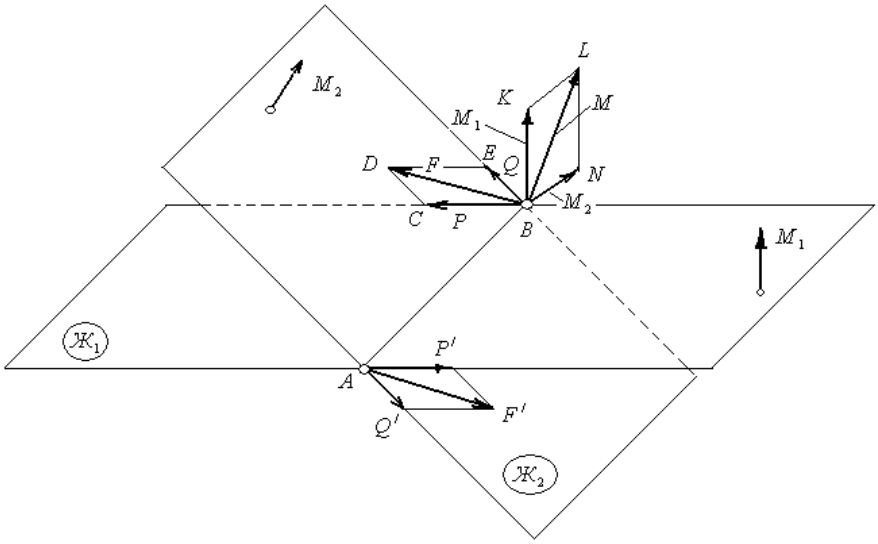
Моменттің центрі A нүктесі деп қабылдасақ, онда:

$$M_A(F') = 0 \text{ және } M(F, F') = M = M_A(F)\ . \qquad (31)$$

Осы формулалардың негізінде келесі анықтаманы қабылдауға болады: *жұптың векторлық моменті, осы жұптың бір күшінің, екінші күшінің әсер ету нүктесі арқылы алынған векторлық моментіне тең болады*.

2.3. Әр жазықтықтарда жатқан жұптарды қосу. Берілген екі жұп бір-бірімен AB сызығымен қиылысып жатқан $Ж_1$ және $Ж_2$ жазықтықтарында жатсын. Олардың векторлық моменттері M_1 мен M_2 болсын (*63-сурет*). Жазықтықтардың қиылысу сызығын (AB) иін ретінде қабылдап, берілген екі жұпты осы иін арқылы түрлендірейік. Суретте көрсетілгендей: түрлендірілген жұп (P, P'), оның моменті – M_1, ал екінші жұп (Q, Q'), мұның моменті – M_2. Параллелограмм ережесін қолданып, P және Q күштерін қосып, олардың тең әсер күшін аламыз, яғни $F = P + Q$. Бұл күш B нүктесіне түсіріледі. $F' = P' + Q'$ болатын, бір тең әсер етуші жұппен (F, F') алмастырылды.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY



63-сурет

Содан кейін, аталған ережені қолданып, P' және Q' күштерін қосып, олардың тең әсер күшін аламыз, яғни $F' = P' + Q'$. Бұл күш A нүктесіне түсіріледі. Өзара тең және бір-біріне параллель, бірақ қарама-қарсы бағытталған F және F' күштері жұп құрайды. Сонымен, берілген жұптар күштері $F = P + Q$ және $F' = P' + Q'$. Енді *тең әсер етуші жұптың векторлық моменті берілген екі жұптың векторлық моменттерінің жиынына тең болатынын* дәлелдейік.

31-формуланың негізінде:

$M(F, F') = M = M_A(F) = AB \times F = AB \times (P + Q)$ немесе $M = AB \times P + AB \times Q$.

Бірақ $AB \times P = M_A(P) = M(P, P') = M_1$, сол секілді $AB \times Q = M_2$ болғандықтан:

$$M = M_1 + M_2 . \qquad (32)$$

Екі векторлық моменттерді қосу арқылы дәлелденген бұл теореманы, векторлық моменттердің саны қанша болса да қолдануға болады.

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i . \qquad (32а)$$

Сонымен, *қатты денеге әсер етуші, кеңістікте кез келген түрде орналасқан жұптар жүйесі векторлық моменті берілген жұптардың векторлық моменттерінің жиыны болып табылатын – тең әсер етуші жұпқа келтіріледі*.

2.4. Кеңістіктегі жұптар жүйесінің тепе-теңдік шарты. Жұптарды қосу теоремасынан кеңістіктегі жұптар жүйесінің тепе-теңдік шарты туындайды.

Қатты денеге әсер етуші, кеңістікте кез келген түрде орналасқан жұптар жүйесінің векторлық моменттерінің жиыны нөлге тең болса, онда мұндай жұптар жүйесі тепе-теңдік күйде болады, яғни

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i . \qquad (33)$$

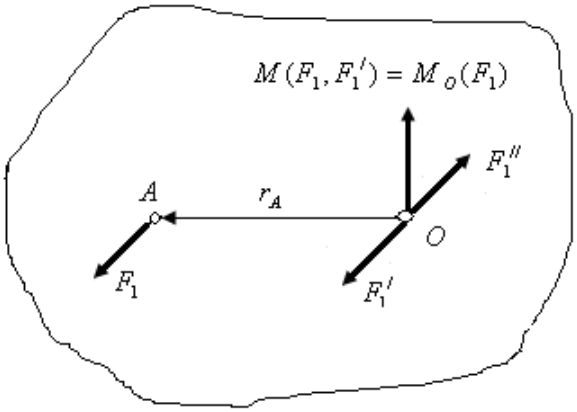
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

§3. Кез келген кеңістіктік күштер жүйесін берілген центрге келтіру

Кез келген кеңістіктік күштер жүйесін берілген бір центрге келтіру мәселесі де күштерді өз-өзіне параллель көшіру леммасының көмегімен шешіледі.

Лемма. *Қатты денеге әсер етуші күшті, оның денеге әсерін өзгертпей, өзінің берілген бағытына параллель түрде, тек бір жұп қоса отырып, осы дененің кез келген нүктесіне көшіруге болады. Қосылатын жұптың векторлық моменті аталған күштің көшірілетін нүкте арқылы алынған векторлық моментке тең болады.*

Қатты дененің A нүктесіне F_1 күші әсер етіп тұрсын (*64-сурет*). Осы дененің кез келген нүктесіне, мысалы, O нүктесіне модулі F_1 күшіне тең және оған параллель, өзара теңдестірілген F_1' және F_1'' күштерін түсірейік. Үш күштен тұратын жүйе (F_1, F_1' және F_1'') берілген F_1 күшіне эквивалент болады. Осы күштердің ішіндегі F_1 және F_1'' күштері векторлық моменті $r_A \times F_1$ теңдігімен анықталатын жұпты құрайды, яғни F_1 күшінің O нүктесі арқылы алынған векторлық моментіне тең.



64-сурет

Сонымен, F_1 күші O нүктесіне түсірілген $F_1' = F_1$ күшіне және моменті $M_O(F_1)$ шамасына тең жұпқа эквивалент болады, яғни

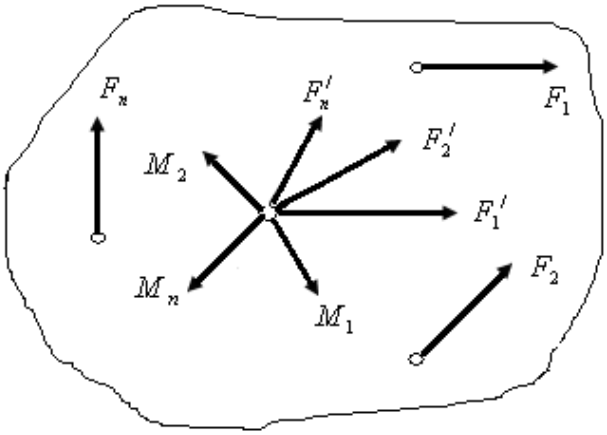
$$M = M(F_1, F_1'') = M_O(F_1) = r_A \times F_1. \qquad (34)$$

Осы дәлелденген лемманы қолданып, статиканың теоремасын дәлелдейік.

Статиканың негізгі теоремасы. *Қатты денеге әсер етуші кез келген күштер жүйесі, дененің кез келген центріне, мысалы, O центріне түсірілген осы күштердің геометриялық жиынына тең бір күшке және бір жұпқа келтіріледі. Ал бұл жұптың векторлық моменті күштер жүйесінің әр күшінің, аталған O центрі арқылы алынған векторлық моменттердің жиынына тең болады.*

Қатты денеге $\{F_1, F_2, \cdots F_n\}$ күштер жүйесі әсер етсін (*65-сурет*). Оларда O центріне келтірейік.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY



65-сурет

Оларды центрге келтірудің нәтижесінде O центріне түсірілген $F_1, F_2, \cdots F_n$ күштер жүйесін және оларға қоса кеңістіктік жұптар жүйесін аламыз; бұл жұптардың векторлық моменттері, берілген күштердің O нүктесі арқылы алынған векторлық моменттеріне тең болады, яғни

$$M_1 = M_O(F_1),\ M_2 = M_O(F_2),...,M_n = M_O(F_n).$$

Күштер көпбұрышы ережесін пайдаланып $F_1, F_2, \cdots F_n$ күштерін бір-біріне қосып, O центріне түсірілген және олардың геометриялық жиынына тең бір күшті аламыз, яғни

$$F_б = \sum F_i . \qquad (35)$$

Бұл күшті бұрынғыша *күштер жүйесінің бас векторы* деп атаймыз.

Аталған жұптарды бір-біріне қосып, векторлық моментті аламыз, бұл момент берілген күштердің келтіру нүктесі арқылы алынған векторлық моменттерінің жиынына тең болады, яғни

$$M_{бO} = \sum M_O(F_i) . \qquad (36)$$

Бұл моментті *кеңістіктік күштер жүйесінің O центріне қатысты бас моменті* деп атаймыз. Сонымен, теорема дәлелденді.

Есте болатын жағдай. Кез келген күштер жүйесін әртүрлі центрге келтіруге болады, бұл кезде: қай центр болса да, бас вектор бәрінде бірдей болады; ал әр центрдің бас моменті әртүрлі болады.

§4. Кеңістіктік күштер жүйесінің бас векторын және бас моментін есептеу

Бас вектор, күштердің геометриялық жиыны ретінде, координата осьтеріне проекцияланады, олар:

$$F_{бx} = \sum F_{ix}\ ,\ F_{бy} = \sum F_{iy}\ ,\ F_{бz} = \sum F_{iz} . \qquad (37)$$

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Екінші тарауда алынған *3- және 4-формулаларды* қолданып, бас вектордың ($F_б$) модулі мен бағыттаушы косинустарын табамыз, яғни

$$F_б = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2}\ . \qquad (37а)$$

$$\cos(\hat{F_б}, i) = \frac{F_{бx}}{F_б},$$

$$\cos(\hat{F_б}, j) = \frac{F_{бy}}{F_б}, \qquad (37ә)$$

$$\cos(\hat{F_б}, k) = \frac{F_{бz}}{F_б}.$$

Координатаның бастапқы нүктесі арқылы алынған бас момент, осы нүктеге қатысты векторлық моменттердің геометриялық жиыны ретінде, координата осіне прекцияланады, олар:

$$(M_{бO})_x = \sum[M_O(F_i)]_x\ ,\ (M_{бO})_y = \sum[M_O(F_i)]_y\ ,\ (M_{бO})_z = \sum[M_O(F_i)]_z\ .$$

Сонымен қатар:

$$[M_O(F_i)]_x = M_x(F_i)\ ,\qquad [M_O(F_i)]_y = M_y(F_i)\ ,\qquad [M_O(F_i)]_z = M_z(F_i)$$

болғандықтан:

$$(M_{бO})_x = \sum M_x(F_i)\ ,\ (M_{бO})_y = \sum M_y(F_i)\ ,\ (M_{бO})_z = \sum M_z(F_i)\ .$$

Бас моменттің модулі мен оның бағыты келесі формулалармен анықталады:

$$M_{бO} = \sqrt{M_{бx}^2 + M_{бy}^2 + M_{бz}^2}\ , \qquad (38а)$$

$$\cos(\hat{M_{бO}}, i) = \frac{M_{бx}}{M_{бO}},$$

$$\cos(\hat{M_{бO}}, j) = \frac{M_{бy}}{M_{бO}}, \qquad (38ә)$$

$$\cos(\hat{M_{бO}}, k) = \frac{M_{бz}}{M_{бO}}.$$

Соңғы формуладағы: $M_{бx}$, $M_{бy}$ және $M_{бz}$ – жүйе күштерінің координата осьтері арқылы алынған бас моменттері (Бұл моменттерді есептегенде *29-формула* жиі қолданылады).

§5. Кез келген кеңістіктік күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары

Қатты денеге әсер етуші бас вектор мен бас момент нөлге тең болатын жағдайды қарастырайық.

$$F_б = \sum F_i = 0,$$
$$M_{бO} = \sum M_O(F_i) = 0. \qquad (39)$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Қатты денеге әсер етуші кез келген кеңістіктік күштер жүйесі тепе-теңдік шартта болу үшін *39-формулада* келтірілген теңдіктердің орындалуы қажет және жекілікті. Қорыта айтқанда, *еркін қатты денеге әсер етуші кез келген кеңістік күштер жүйесі тепе-теңдік шартта болу үшін, осы күштер жүйесінің бас векторы және бас моменті нөлге тең болуы қажет және жеткілікті болып табылады*.

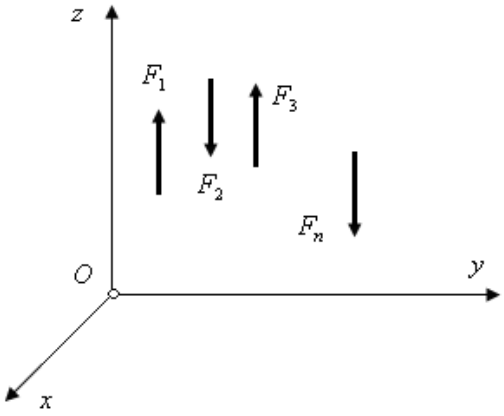
Тәжірибедегі есептерді шығару үшін тепе-теңдік шарттарын скаляр түрінде жазу керек. Ол үшін бас вектордың координата осьтеріне проекцияларын және бас моменттің осы осьтердегі проекцияларын алып, алты теңдеуден тұратын теңдеулер жүйесін аламыз. Олар:

$$\begin{aligned} &\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0, \\ &\sum M_x(F_i) = 0, \quad \sum M_y(F_i) = 0, \quad \sum M_z(F_i) = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Сонымен, *еркін қатты денеге әсер етуші кез келген кеңістіктік күштер жүйесі тепе-теңдік шартта болу үшін әсер етуші барлық күштердің үш координаттар осьтеріндегі проекцияларының қосындысына және осы остерге қатысты моменттердің проекцияларының алгебралық қосындысының нөлге тең болуы қажет және жекілікті болып табылады*.

§6. Бір жазықтықта жатпайтын параллель күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары

Бір жазықтықта жатпайтын, бір-бірімен параллель күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттарын анықтау үшін Oz осін берілген күштерге параллель етіп бағыттаймыз, ал Ox және Oy осьтерін осы күштерге перпендикуляр жазықтыққа орналастырамыз (*66-сурет*).



66-сурет

Бұл кезде, әр күштің Ox және Oy осьтеріндегі проекциялары нөлге тең болады, ал $\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0$ теңдіктері $0 \equiv 0$ теңбе-теңдігіне айналады; сол секілді, $\sum M_я(F_i) = 0$ теңдігі де $0 \equiv 0$ теңбе-теңдігіне айналады.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Сондықтан бір жазықтықта жатпайтын, бір-бірімен параллель күштер жүйесі үшін тек үш тепе-теңдік шарттары болады. Олар:

$$\sum F_{iz} = 0\,,\ \sum M_x(F_i) = 0 \text{ және } \sum M_y(F_i) = 0\,. \qquad (41)$$

Егер бұл шарттар теңдеулерінің ішінде белгісіз шамалар болса, онда бұлар бір жазықтықта жатпайтын өара параллель күштердің тепе-теңдік теңдеулері деп аталады. Демек, өзара параллель күштер әсер етіп тұрған еркін қатты дене *41-шарттарды* қанағаттандыратын болса, онда мұндай дене тепе-теңдік күйде болады.

§7. Еркін емес қатты дененің тепе-теңдік шарттары

Еркін емес дененің байланыстарын алып тастап, оларды реакциялармен алмастырғаннан кейін, бұл денені еркін дене ретінде қарастыруға болады. Бұл кезде, белсенді күштерден және реакциялардан тұратын күштер жүйесі тепе-теңдік шарттарын қанағаттандырады.

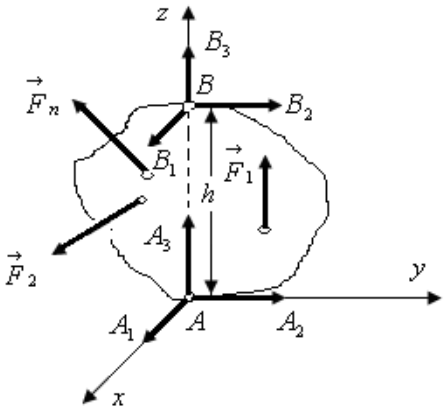
Дененің тепе-теңдігінің жекеленген екі түрін қарастырамыз. Олар:

а) дененің қозғалмайтын екі нүктесі бар, ал дене осы екі нүкте арқылы өтетін осьті айнала қозғала алады.

Қатты дененің қозғалмайтын екі сфералық B және A топсалары болсын. Олар бір-бірінен h қашықтықта орналассын (*67-сурет*).

Аталған топсаларды алып тастап, оларды, әр топса үшін, үш-үштен реакциялармен алмастырамыз. Реакциялар: B топсасындағы – B_1, B_2, B_3 және A топсасындағы – A_1, A_2, A_3. Осы реакциялар және берілген белсенді күштер $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$ дененің тепе-теңдігін қамтамасыз етеді. Сондықтан:

$$\sum F_{ix} + A_1 + B_1 = 0, \qquad \sum M_x(F_i) - B_2 \cdot h = 0,$$
$$\sum F_{iy} + A_2 + B_2 = 0, \qquad \sum M_y(F_i) - B_1 \cdot h = 0,$$
$$\sum F_{iz} + A_3 + B_3 = 0, \qquad \sum M_z(F_i) = 0.$$



67-сурет

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

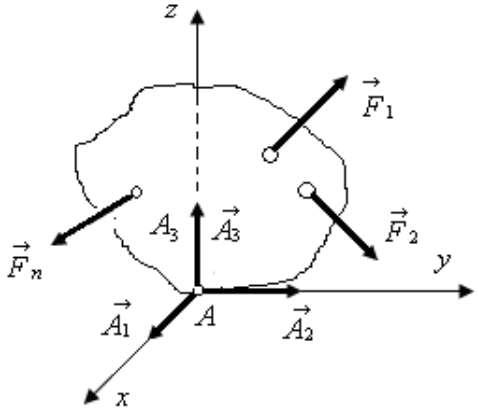
Соңғы теңдікте белгісіз реакциялар болмағандықтан, ол қатты дененің тепе-теңдік шарты болып табылады. Демек, *қозғалмайтын екі нүктесі бар қатты дененің, осы екі нүкте арқылы өтетін оське қатысты алынған белсенді (берілген) күштер моменттері жиынының нөлге тең болуы аталған дененің тепе-теңдік шарты болып табылады*. Қалған бес теңдеулер белгісіз реакцияларды табу үшін қолданылады. Ал белгісіздер саны алтау болғандықтан, мұндай есеп статикалық анықталмайтын есеп болып табылады. Есеп статикалық анықталатын болу үшін B нүктесіндегі сфералық шарнирнің орнына подшипник қою керек, ал бұл кезде $B_3 = 0$ болады.

ә) дененің қозғалмайтын бір ғана нүктесі бар, ал дене осы нүкте арқылы өтетін кез келген осьті айнала қозғала алады.

Қатты дененің қозғалмайтын бір ғана сфералық A топсасы болсын (*68-сурет*). Топсаны алып тастап, оны, реакциялармен алмастырамыз. Реакциялар: $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$. Осы реакциялар және берілген белсенді күштер $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$ дененің тепе-теңдігін қамтамасыз етеді. Сондықтан:

$$\sum F_{ix} + A_1 = 0, \qquad \sum M_x(F_i) = 0,$$
$$\sum F_{iy} + A_2 = 0, \qquad \sum M_y(F_i) = 0,$$
$$\sum F_{iz} + A_3 = 0, \qquad \sum M_z(F_i) = 0.$$

Соңғы үш теңдіктерде белгісіз реакциялар болмағандықтан, олар қатты дененің тепе-теңдік шарты болып табылады.



68-сурет

Демек, *қозғалмайтын бір нүктесі бар қатты дененің, қозғалмайтын нүкте арқылы өтетін координаттар осьтері арқылы алынған белсенді (берілген) күштер моменттері жиынының нөлге тең болуы, аталған дененің тепе-теңдік шарты болып табылады*. Қалған үш теңдеулер, белгісіз реакцияларды табу үшін қолданылады.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Мысал. Жәшіктің $ABCD$ қақпағы біртекті материалдан жасалған. Салмағы $P = 80н$ қақпақ ашық тұру үшін DE тірегімен тіреліп қойылған (*69 а-сурет*). Берілімдер: $AB = b$, $AD = AE = a$, $\angle DAE = \alpha = 30^0$.

Тіректің салмағын ескермей, осы тіректің ішкі күшін және A мен B топсаларындағы реакцияларды анықтау керек.

Қақпақтың тепе-теңдігін қарастырамыз. Ол үшін, A және B топсаларын A_2, A_3, B_2, B_3 реакцияларымен, ал DE тірегін S реакциясымен алмастырамыз Қақпақтың салмағын ($P = 80н$) ескере отырып, *69 ә-суретінде* көрсетілген есептеу нұсқасын қабылдаймыз. Координата басын A нүктесіне бекітіп, осы күштер жүйесі үшін тепе-теңдіктің алты теңдеулерін құрамыз.

$1.\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow 0 = 0$, $2.\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow A_2 + B_2 - S \cdot \cos\beta = 0$,

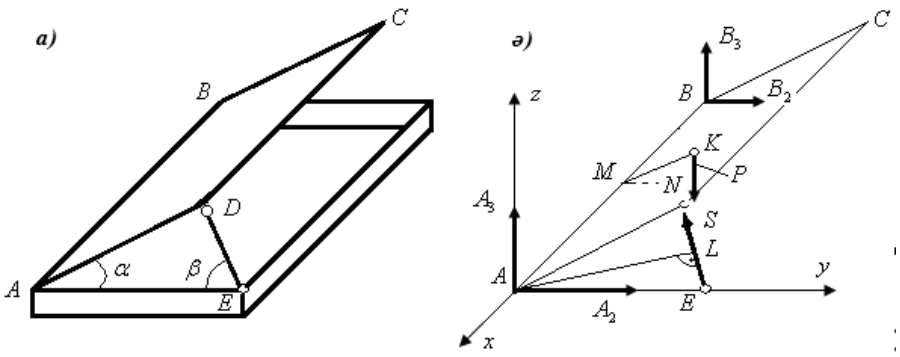
$3.\sum F_{iz} = 0 \Rightarrow A_3 + B_3 - P + S \cdot \sin\beta = 0$, $4.\sum M_x(F_i) = 0 \Rightarrow S \cdot AL - P \cdot MN = 0$,

$5.\sum M_y(F_i) = 0 \Rightarrow -P \cdot AM + B_3 \cdot AB = 0$, $6.\sum M_z(F_i) = 0 \Rightarrow -B_2 \cdot AB = 0$.

Берілім бойынша $AE = AD$ болғандықтан $\beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ екенін ескеріп,

$$AL = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2},\ MN = \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha,\ AM = \frac{b}{2}$$

өрнектерді аламыз:



69-сурет

Алынған өрнектерді пайдаланып, тепе-теңдік теңдіктерін қайтадан жазамыз.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$A_2 + B_2 - S \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 0$, $A_3 + B_3 - P + S \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 0$,

$S \cdot a \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - P \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha = 0$, $-P\frac{b}{2} + B_3 \cdot b = 0$, $B_2 \cdot b = 0$ (бірінші тепе-теңдік $0 = 0$-теңбе-теңдігіне айналады).

Осы теңдеулерді шешкеннен кейін:

$$B_2 = 0,\ B_3 = \frac{P}{2} = 40н,\ A_2 = \frac{P \cdot \cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{2} = 9,3н,\ A_3 = \frac{P}{2}(1 - \cos\alpha) = 5,4н,$$

$$S = \frac{P \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = 35,9н.$$

§8. Кеңістіктік күштер жүйесі үшін Вариньон теоремасы

Егер кеңістіктік күштер жүйесін тең әсер етуші күшке келтіруге болатын болса, онда Вариньон теоремасын тұжырымдауға болады. Демек, *кеңістіктік күштер жүйесінің тең әсер етуші күшінің кез келген центрге қатысты векторлық моменті барлық күштердің, сол центрге қатысты векторлық моменттерінің жиынына тең болады*, яғни

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i). \qquad (42)$$

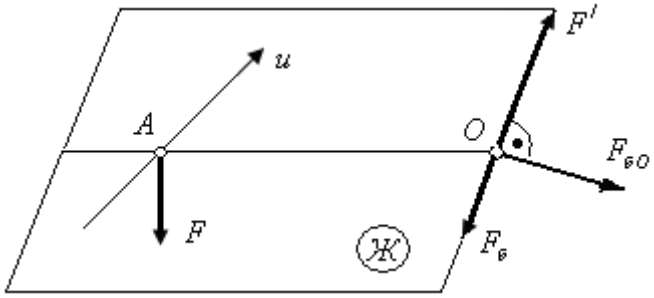
Егер $\vec{F}_б \neq 0$, ал $\vec{M}_{бO}$ нөлге тең немесе бас векторға перпендикуляр болған жағдайда кеңістіктік күштер жүйесін тең әсер етуші күшке келтіруге болады. Екі жағдайды қарастырамыз.

1) егер бас вектор нөлге тең емес ($F_б \neq 0$), ал O центрі арқылы алынған бас момент нөлге тең ($M_{бO} = 0$) болса, онда күштер жүйесі O нүктесіне түсірілген және шамасы бас векторға тең болатын, тең әсер ету күшіне келтіріледі.

2) күштерді O центріне келтіргеннен кейін $F_б \neq 0$, $M_{бO} \neq 0$ және бас момент бас векторға перпендикуляр болсын (*70-сурет*). Осы кезде, бас момент ($M_{бO}$) $Ж$ жазықтығында орналасқан жұп болып табылады, сондықтан оның орнына күштері $F_б$ шамасына тең (F', F) жұбын (қос күшін) кіргіземіз. Содан кейін, теңдестірілген екі күштің $(F', F_б)$ жүйесін алып тастап, осы жүйенің тең әсер етуші болатын бір күшті – F күшін аламыз.

Сонымен, егер $F_б \neq 0$ және $M_{бO} \neq 0$, ал олар бір-біріне перпендикуляр болса, онда күштер жүйесі шамасы бас вектордай болатын, тең әсер етуші күшке келтіріледі.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY



70-сурет

Келтірілген екі жағдайға сүйене отырып, Вариньон теоремасын дәлелдейік.

70-суреттегі F – тең әсер етуші күш. Бұл күш F' күшімен векторлық моменті $M_б^O$ болатын жұп құрайды. Бұрын алынған *31-теңдіктің* негізінде: $M_{бO} = M_O(F)$.

Бірақ $M_{бO} = \sum M_O(F_i)$ болғандықтан: $M_O(F) = \sum M_O(F_i)$. Келтіру нүктесі кез келген нүкте болғандықтан теорема дәлелденді. Енді, *42-теңдіктің* екі жағында кез келген бір оське, мысалы, A нүктесі арқылы өтетін Ou осіне проекциялап, $\left[M_O(F)\right]_u = \sum \left[M_O(F_i)\right]_u$ теңдігін аламыз (*70-сурет*). Күштің центр арқылы алынған векторлық моментінің аталған центрді басып өтетін оське проекциясы осы ось арқылы алынған күш моментіне тең болады (осы тараудың *1-параграфында* дәлелденген), яғни

$\left[M_O(F)\right]_u = M_u(F)$ және $\left[M_O(F)\right]_u = M_u(F_i)$ болғандықтан:

$$M_u(F) = \sum M_u(F_i). \qquad (43)$$

Қарастырылған Ou осі кез келген ось, сондықтан тең әсер етуші күштің ось арқылы алынған моменті үшін Вариньон теоремасын келесі түрде тұжырымдауға болады: *кеңістіктік күштер жүйесінің тең әсер етуші күшінің кез келген оське қатысты моменті осы оське қатысты барлық күштердің моменттерінің алгебралық қосындысына тең.*

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY