СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

ДӘРІС № 7

ПАРАЛЛЕЛЬ КҮШТЕРДІҢ ЦЕНТРІ. САЛМАҚ ЦЕНТРІ

Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

7-*тарау*. ПАРАЛЛЕЛЬ КҮШТЕРДІҢ ЦЕНТРІ. САЛМАҚ ЦЕНТРІ

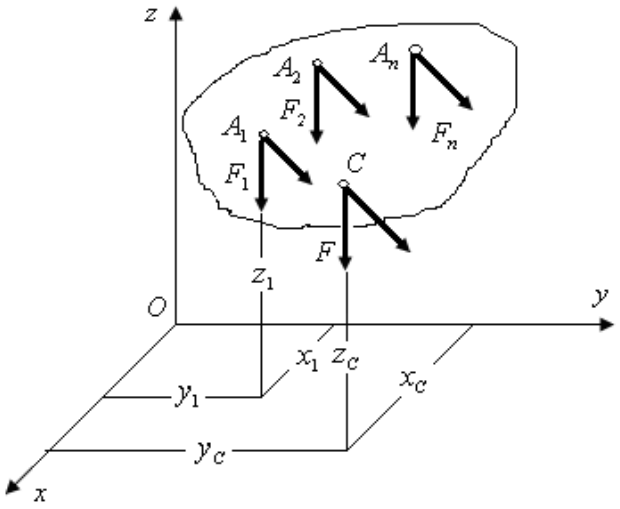
§1. Параллель күштер жүйесін тең әсер етуші (тең әсерлі) күшке келтіру. Параллель күштер центрі

Қатты денеге өзара параллель күштер жүйесі F_1, F_2,..., F_n әсер етіп тұрсын (*71-сурет*). Екі параллель күштерді қосу теоремасын (11) қолданып, бір жаққа бағытталған өзара параллель күштер жүйесі тең әсер ету күшіне келтіріледі. Бұл кезде, тең әсер ету күші барлық күштердің арифметикалық қосындысына тең, берілген күштерге параллель және сол күштермен бағыттас болады, яғни

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$F = \sum F_i \,. \qquad (44)$$

Күштердің әсер ету нүктелері тұрақты түрде белгіленген болса, онда тең әсер ету күші белгілі бір нүкте арқылы, *параллель күштердің центрі* деп аталатын C нүктесі арқылы өтеді. Бұл нүктенің ерекшеліктері: егер күштерді өздерінің әсер ету нүктелері арқылы бір бағытқа және бәрін бірдей бұрышқа бұрса, онда тең әсер ету күшіде сол бағытқа және сондай бұрышқа бұрылады.



71-сурет

Қорыта айтқанда, *егер параллель күштерді, өздерінің әсер ету нүктелері арқылы бәрін бірдей бұрышқа және бәрін бір жаққа бұрса, онда, параллель күштердің тең әсер етуші күшінің әсер ету сызығы да, өзінің бойында жатқан белгілі бір нүкте арқылы айналады. Әсер ету сызығында жатқан осы нүкте параллель күштердің центрі деп аталады*.

Вариньон теоремасын қолданып, параллель күштер центрінің координаттарының формулаларын алуға болады. Ол үшін, тең әсер етуші күштің Ox және Oy осьтеріне қатысты моменттерінің өрнектерін жазамыз, олар:

$$M_x(F) = \sum M_x(F_i) \text{ және } M_y(F) = \sum M_y(F_i)\,.$$

71-суреттен көрініп тұрғандай: Ox осі арқылы момент алғанда күштердің иіндері – сәйкес нүктелердің ординаталары, ал Oy осі арқылы момент алғанда күштердің иіндері – сәйкес нүктелердің абсциссалары алынады. Сондықтан: $F \cdot x_C = \sum F_i \cdot x_i$, $F \cdot y_C = \sum F_i \cdot y_i$. Осы теңдіктерден:

$$x_C = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i}, \; y_C = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\sum F_i}\,.$$

Осы теореманы қолданып, z осі үшін сәйкес теңдікті алуға болады, яғни

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$z_C = \frac{\sum F_i \cdot z_i}{\sum F_i}.$$

Алынған үш теңдік, параллель күштер центрінің координаталарының формулалары болып табылады. Демек

$$x_C = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i},\ y_C = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\sum F_i},\ z_C = \frac{\sum F_i \cdot z_i}{\sum F_i}. \qquad (45а)$$

Егер параллель күштер центрінің радиус-векторын r_c символымен, ал бұл күштердің әсер ету нүктелерінің радиус-векторларын r_1, r_2,..., r_n арқылы белгілесек, онда *45 а-алгебралық формулаларды* бір векторлық формула арқылы жазуға болады, яғни

$$r_C = \frac{\sum F_i \cdot r_i}{\sum F_i}. \qquad (45ә)$$

Қорытылған *45 а- және 45 ә-формулалары* бәрі бір жаққа бағытталған параллель күштер үшін алынған болатын. Егер мұндай параллель күштер әр жаққа бағытталса, онда бұл формулаларды қолдану үшін күштердің бір бағытын оң деп, ал екінші бағытты сол бағыт ретінде қабылдап, моменттердің таңбаларын ескерсе жеткілікті.

§2. Салмақ (ауырлық) центрі. Салмақ центрінің формулалары

Жер шарына таяу орналасқан әрбір денені *Жер* өзіне белгілі бір күшпен тартады. Сонымен қоса, дене *Жермен* бірге, оның осін айнала қозғалуына байланысты тағы бір күш пайда болады. Осы екі күштің тең әсер күшін салмақ күші дейміз. Екінші күш өте аз болғандықтан оны елемеуге болады, сондықтан салмақ күші ретінде тек *Жердің* тарту күші ғана қабылданады.

Дененің салмақ күшінің әсер ету нүктесін анықтау үшін денені көптеген ұсақ элементтерге бөлеміз. Осы элементтердің салмақ күштерінің әсер ету сызықтары, шындығында, *Жердің* центрінің маңында қиылысады, бірақ *Жер* бетіндегі ең үлкен ғимараттың өлшемдері *Жердің* өлшемдерімен салыстыруға келмейтіндей аз болғандықтан, элементтердің салмақ күшінің әсер ету сызықтары бір-біріне параллель деп қарастыруға болатыны сөзсіз.

Сонымен, элементтердің өзара параллель салмақ күштерінің тең әсер ету күші қарастырылып отырған дененің салмақ күші болып есептеледі. Сондықтан параллель күштердің центрі осы дененің салмақ центрі болып табылады. Дененің салмақ центрі геометриялық нүкте, бірақ бұл нүкте кей-кезде бұл дененің нүктесі болмауы да мүмкін. Мысалы, сақинаның салмақ центрі осы сақинаның бойында жатпайды, тек оның геометриялық центрінде жатады.

Дененің салмақ центрінің формулаларын қорыту үшін, дененің i-ші элементінің салмақ күшін P_i деп, ал оның координаталарын x_i, y_i және z_i

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

деп белгілейік. Осы шамаларды *45-формулаларға* қойып, дененің салмақ центрінің формулаларын аламыз

$$x_C = \frac{\sum P_i \cdot x_i}{\sum P_i},\ y_C = \frac{\sum P_i \cdot y_i}{\sum P_i},\ z_C = \frac{\sum P_i \cdot z_i}{\sum P_i}. \qquad (46а)$$

Дененің салмақ центрінің радиус-векторы:

$$r_C = \frac{\sum P_i \cdot r_i}{\sum P_i}. \qquad (46ә)$$

Бір текті денелердің (дененің барлық элементтерінің меншікті салмағы бірдей) салмақ центрі координаталарының формулалары:

$$x_C = \frac{\sum \Delta V_i \cdot x_i}{\sum V_i},\ y_C = \frac{\sum \Delta V_i \cdot y_i}{\sum V_i},\ z_C = \frac{\sum \Delta V_i \cdot z_i}{\sum V_i}. \qquad (47а)$$

V – дененің көлемі,

ΔV_i – дене элементінің көлемі,

γ – дененің меншікті салмағы,

$P_i = \gamma \cdot \Delta V_i$ – элементтің салмақ күші.

Алынған *47 а-формула* жуық формула, ал дәл формула алу үшін, ΔV_i шамасын нөлге ұмтылдыра отырып, формуланың алымының шегін алу керек, яғни

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V},\ y_C = \frac{\int_V y dV}{V},\ z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \qquad (47ә)$$

Біртекті жұқа пластина үшін

$$x_C = \frac{\sum \Delta F_i \cdot x_i}{F},\ y_C = \frac{\sum \Delta F_i \cdot y_i}{F},\ z_C = 0. \qquad (48а)$$

немесе:

$$x_C = \frac{\int_F x dF}{F},\ y_C = \frac{\int_F y dF}{F},\ z_C = 0. \qquad (48ә)$$

Осы формулалардың алымындағы шамалар ауданның статикалық моменттері деп аталады, яғни

$$S_x = \int_F y dF,\ S_y = \int_F x dF.$$

Сондықтан:

$$x_C = \frac{S_y}{F},\quad y_C = \frac{S_x}{F}. \qquad (48б)$$

Біртекті сырық (кейде «сызық» деп те атайды) үшін

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l},\ y_C = \frac{\int_l y dl}{l},\ z_C = \frac{\int_l z dl}{l}. \qquad (48в)$$

l – сырықтың ұзындығы.

§3. Денелердің салмақ центрлерін анықтау

Есептеу тәжірибесінде жиі кездесетін денелердің салмақ центрін анықтаудың мысалдарын қарастырайық.

1. Біртекті тұзусызықты кесіндінің салмақ центрі. Біртекті тұзусызықты кесіндінің салмақ центрі оның геометриялық ортасында болады. Осыған байланысты, тұзусызықты кесінділерден тұратын пішіннің (контурдың) салмақ центрінің координаталарын таба аламыз.

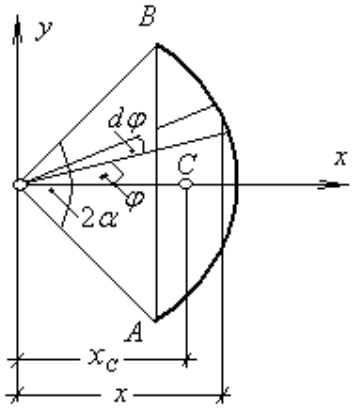
2. Шеңбер доғасының салмақ центрі. Шеңбер доғасының радиусы – R, ал орталық бұрышы 2α болсын (*72-сурет*). Осы доғасының салмақ центрін анықтайық.

Қарастырылып отырған доға Ox осіне симметриялы, сондықтан доғаның салмақ центрі осы Ox осінің бойында жатады. Демек, оның салмақ центрі x_C абсциссасы арқылы толығымен анықталады. Берілімдерді *72-суреттен* аламыз. Олар

$$l = AB = 2\alpha R,\ dl = R \cdot d\phi \text{ және } x = R \cdot \cos\phi.$$

Осы шамаларды пайдаланып, салмақ центрінің яғни абсциссасын табамыз, яғни

$$x_C = \frac{\int_l x dl}{l} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R^2 \cdot \cos\phi \cdot d\phi}{2 \cdot \alpha \cdot R} = \frac{R \cdot \sin\alpha}{\alpha}.$$



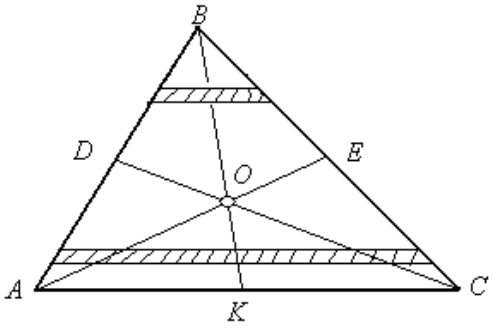
72-сурет

Бұл формуладағы бұрыш радианмен есептеледі. Мысалы, жарты шеңбер үшін ($\alpha = \frac{\pi}{2}$):

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$x_C = \frac{2R}{\pi} = 0,637R\,.$$

3. Үшбұрыштың ауданының салмақ центрі. Үшбұрыш ауданының салмақ центрін анықтау үшін, ABC үшбұрышын AC қабырғасына параллель түзулердің көмегімен берілген үшбұрышты көптеген жұқа тілімдерге бөлейік (*73-сурет*).



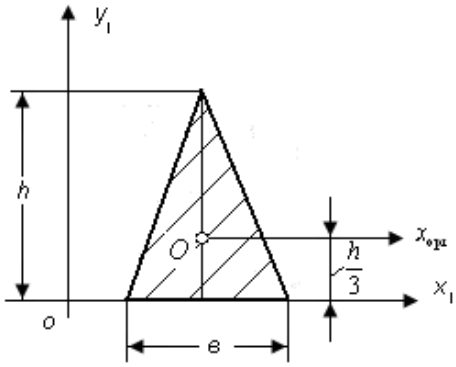
73-сурет

Бұл тілімдер өте жұқа болғандықтан, оларды тік төртбұрыш есебінде қарастыруға болады. Демек, тілімдердің салмақ центрлері үшбұрыштың BK медианасының бойында жатады. Осы секілді, үшбұрышың BC және AB қабырғаларына параллель түзулердің көмегімен оны көптеген жұқа тілімдерге бөлеміз. Бұл кезде де, тілімдердің салмақ центрлері үшбұрыштың сәйкес медианаларының (AE, CD) бойында жатады.

Сонымен, үшбұрыш ауданының салмақ центрі оның медианаларының қиылысында, яғни O нүктесінде жатады. *73-суреттен*:

$$\frac{BO}{OK} = \frac{2}{1}\,.$$

Енді биіктігі h табаны - $в$ үшбұрыштың салмақ центрінің, оның табанынан қанша жерде орналасқанын табайық. Ол үшін кез келген x_1 осін үшбұрыштың табаны арқылы жүргіземіз (*74-сурет*).



74-сурет

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Бұл осьтегі статикалық момент:

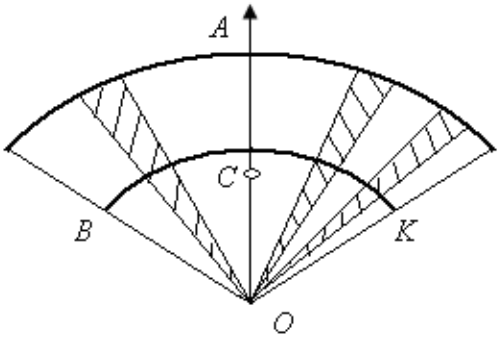
$$S_{x1} = \frac{bh^2}{6}.$$

Осы параграфтағы 48 ә-формуласын қолданамыз, яғни

$$y_{opm} = \frac{S_{x1}}{F} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{1}{2} b \cdot h} = \frac{h}{3}.$$

Сонымен, үшбұрыштың салмақ центрі (O нүктесі), табанынан $\frac{h}{3}$ шамасындағы қашықтықта жатады (*74-сурет*).

4. Шеңбер секторы ауданының салмақ центрі. Сектордың симметрия осі болатындықтан, оның салмақ центрі осы OA осінің бойында жатады (*75-сурет*).



75-сурет

Сектордың салмақ центрі, шеңбердің центрінен (O нүктесі) OC қашықтықта жатсын, яғни C нүктесі сектордың салмақ центрі болсын. Осы арақашықтықты табу үшін, сектордың ауданын элементар секторларға (суретте штрихталған) бөліп, оларды үшбұрыш элементтер ретінде қарастырайық. Бұл кезде элементар секторлардың салмақ центрі O нүктесінен $\frac{2}{3}R$ қашықтықта болады, демек олар радиусы $\frac{2}{3}R$ шамасына тең $\overset{\smile}{BK}$ доғасының бойында жатады. Сондықтан сектор ауданының салмақ центрі біртекті $\overset{\smile}{BK}$ доғасының салмақ центріне дәл келеді, яғни

$$OC = \frac{OM \cdot \sin\alpha}{\alpha}.$$

$OB = \frac{2}{3}R$ болғандықтан:

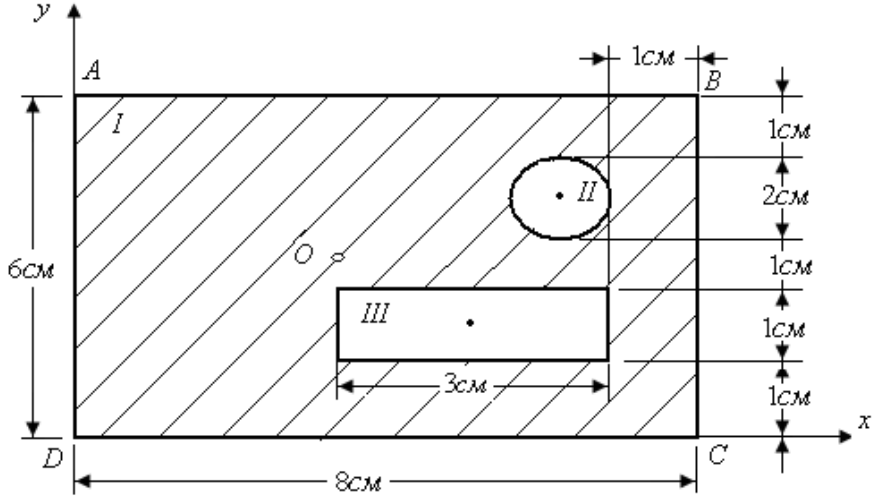
$$OC = \frac{2R \cdot \sin\alpha}{3\alpha}.$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Бұл жерде де α бұрышын радианмен есептеу керек. Мысалы, жарты дөңгелектің ауданы үшін:

$$OC = \frac{4R}{3\pi}.$$

5. Күрделі ауданның (қиманың) салмақ центрі. Әртүрлі фигуралардан тұратын қиманың салмақ центрін анықтайық. Тік төртбұрыш қиманың екі тесігі бар: біреуі тік төртбұрыш, ал екіншісі дөңгелек (*76-сурет*).



76-сурет

Координата осьтерін суретте көрсетілгендей етіп қабылдаймыз. Қиманы үш фигура (бөлік): *ABCD* тік төртбұрышы толығырақ, тік төртбұрыш түріндегі тесік және дөңгелек тесік ретінде қарастырамыз.

Бөліктер	I *ABCD тік төртбұрышы*	II *тік төртбұрыш тесік*	III *дөңгелек тесік*
x_i	$4см$	$6см$	$5,5см$
y_i	$3см$	$4см$	$1,5см$
ΔF_i	$48см^2$	$-3,14см^2$	$-3см^2$

Есептеуге оңай болу үшін, керек берілімдер кесте түрінде көрсетілген. Тесіктердің аудандарын минус таңбасымен алып, *48-формуланы* қолданамыз:

$$x_C = \frac{\Delta F_1 x_1 + \Delta F_2 x_2 + \Delta F_3 x_3}{\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3} = 3,76\ см,\ y_C = \frac{\Delta F_1 y_1 + \Delta F_2 y_2 + \Delta F_3 y_3}{\Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3} = 3,03\ см.$$

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY