ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

ДӘРІС № 8

НҮКТЕ КИНЕМАТИКАСЫ

Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

2-бөлім. КИНЕМАТИКА

Кинематика «кинема» (қозғалыс) деген грек сөзіне негізделген. Теориялық механиканың бұл бөлімінде денелер қозғалыстары геометриялық тұрғыдан (күштерге тәуелсіз) қарастырылады. Бұл салада:

1) дененің берілген қозғалысы, математикалық формулалардың және графиктер мен кестелердің көмегімен сипатталады;

2) аталған қозғалысты сипаттайтын кинематикалық шамалар анықталады. Кинематикаға тән ұғымдар мен шамалар: нүкте, абсолют қатты дене, санақ жүйесі, траектория ұғымдары мен жол, орын ауыстыру, жылдамдық, үдеу, бұрылу бұрышы, бұрыштық жылдамдық, бұрыштық үдеу шамалары және тағы басқалар.

Негізгі түсініктер мен анықтамалар.

Кинематикада дененің қозғалысы зерттеледі. Кез келген дененің қозғалысы оны қоршаған басқа да денелердің әсеріне тәуелді болатындықтан, қозғалыс мәселелерін толық шешу үшін денеге әсер етуші күштерді ескеру қажет. Бірақ, алдымен, қозғалысты зерттеу денеге әсер етуші күшке тәуелсіз түрде қарастырылады. Осындай қозғалысты зерттеудің қарапайым түрі кинематика саласында оқылады. Демек, *қозғалысты тудыратын күш ескерілмей, қозғалыс тек геометриялық тұрғыдан зерттелетін – теориялық механиканың бөлімі кинематика деп аталады*.

Кинематика атауын 1834 жылы белгілі физик Ампер (1775-1836) механикаға енгізген еді. Кинематика бір жағынан динамикаға кіріспе ретінде қарастырылса, екінші жағынан механизмдер теориясының негізі болып табылады. Сонымен қатар XVIII ғасырдың соңғы жағынан бастап, кинематика дербес ғылым ретінде дамып келеді.

Жоғарыда айтылғандай, теориялық механика тек механикалық қозғалысты, атап айтқанда, уақыт өтуіне байланысты денелердің кеңістіктегі орындарының басқа денелерге қатысты өзара өзгеруін зерттейді. Материяның бар болуының ең жалпы түрі қозғалыс екені белгілі, ал кез келген қозғалыс, оның ішінде механикалық қозғалыс, кеңістікте және уақыт бойымен өрбиді. Кеңістік пен уақыт материямен айрылмастай байланыста, ешқашанда да материядан бөлек бола алмайды. Өз кезегінде, кеңістік пен уақыт айрылмастай байланыста, ал бұл байланыс қозғалыс арқылы көрінеді. Осыған қарамай, классикалық механикада – кеңістік пен уақыт бір-бірімен де, материядан да байланыссыз түрде қарастырылады. Кейбір анықтамалар:

- Қасиеттері барлық жерінде бірдей (біртектілік) және барлық бағытта бірдей (изотроптылық) үш өлшемді эвклид кеңістігі қарастырылады. Ұзындық өлшемі – *метр*.
- Уақыт – кеңістіктің барлық нүктелері үшін бірдей деп саналады. И.Ньютонның айтуынша: «уақыт, сырт әсерінің ешқайсысына да тәуелсіз, өз бетімен жүре береді». Математика тұрғысынан қарағанда, уақыт – үздіксіз

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

өзгеріп отыратын шама, ал уақыт өзгеруіне тәуелді өзгеріп отыратын шамалар: жол, жылдамдық, үдеу және таға басқалар. Уақыт өлшемі – *секунд.*

– Уақыт санауы, әр есеп үшін – ерекше, белгілі бір *алғашқы кезеңнен* (*моменттен*) басталады. *Алғашқы кезеңнен* бастап қарастырылып отырған кезеңге дейін саналған секунд саны *қазіргі кезеңді* көрсетеді. Аталған кезеңдердің айырымы *уақыттар аралығы* деп аталады.

– Дене қозғалыстарын зерттегенде, оның әр уақыт моментінде тұрған жерін, белгілі бір нағыз немесе шартты түрде алынған денемен салыстыра отырып анықтайды. Мұндай денелер *санақ жүйесі* деп аталады. Әдетте, бұл денені координаталар жүйесімен байланыстырады да, оны да *санақ жүйесі* деп атайды.

Кеңістік пен уақыт классикалық механикада материямен байланыстырылмай, абстракт түрде қарастырылатын болғандықтан, механиканың қорытындылары жуық шамалар деп есептеледі (салыстырмалы теория бойынша). Жарық жылдамдығынан өте көп аз жылдамдықтар үшін, механиканың қорытындыларының жеткілікті түрде дәл шамалар екенін тәжірибелер көрсетеді.

Кинематика саласында қарастырылатын негізгі тақырыптар:

- нүкте кинематикасы; қатты дененің ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстары;
- нүктенің құрама қозғалысы; қатты дененің жазықтық қозғалысы;
- қатты дененің сфералық қозғалысы;
- қатты дененің жалпылама түрдегі қозғалысы;
- қатты дененің құрама қозғалысы.

1-тарау. НҮКТЕ КИНЕМАТИКАСЫ

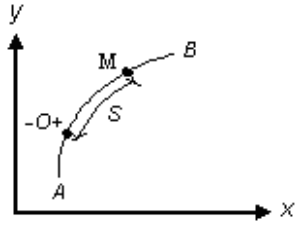
§1. Нүкте қозғалысының берілу тәсілдері. Нүкте қозғалысының траекториясы

Таңдалып алынған санақ жүйесіне қатысты қозғалыстағы нүкте кез келген сызықтың бойымен қозғалады. Бұл сызық нүкте траекториясы деп аталады. Егер траектория түзу сызық болса, онда нүкте қозғалысы түзу сызықты деп аталады. Егер траектория қисық сызық болса, онда нүкте қозғалысы қисық сызықты деп аталады. Түзу сызықты қозғалыс қисық сызықты қозғалыстың жекеленген түрі болып табылады, сондықтан оны бөлек қарастырмаймыз. Кинематикада зерттелетін әрбір қозғалыс, берілген әртүрлі шамалар арқылы қозғалыстағы нүктенің таңдалып алынған санақ жүйесіндегі орнын, оның жылдамдығын және үдеуін кез келген уақытта анықтауға болатындай, белгілі бір түрде берілу керек.

Нүкте қозғалысының заңын анықтаудың немесе қозғалыс теңдеулерін құрудың үш тәсілі бар: табиғи тәсіл, координаталық тәсіл және векторлық тәсіл.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

1. Табиғи тәсіл. Нүкте қозғалысы берілуінің бұл тәсілінде, нүктенің кез келген бір санақ жүйесіне қатысты траекториясы және нүкте қозғалысының заңы беріледі. Мысалы, M нүктесі AB траекториясымен қозғалсын. Траектория бойынан, доға ұзындығын есептеудің бастапқы нүктесі ретінде O нүктесін қабылдаймыз. Қашықтықты санаудың оң бағыты ретінде мүмкін екі бағыттың кез келген бірін аламыз. Мысалы, сағат тілінің бағытын алсақ, онда M нүктесінің орны $S = OM$ шамасымен анықталады (*1-сурет*).



1-сурет

Бұл кезде, нүктенің траектория бойындағы орны ұзындығы $S = OM$ доғаның ұзындығымен анықталады және бұл доға нүктенің *доғалық координатасы* деп аталады. Қозғалыс кезінде доғалық координата белгілі бір заңдылықпен уақытқа байланысты өзгеріп отырады:

$$s = f(t) \ . \qquad (1)$$

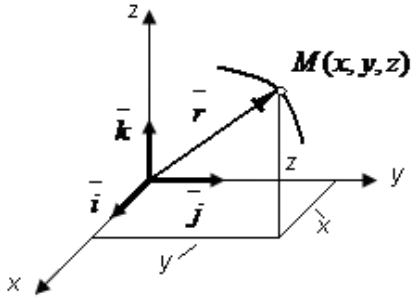
Доға ұзындығы мен уақыт арасындағы функциялық бұл тәуелділік (1) нүкте қозғалысының теңдеуі немесе нүктенің траектория бойымен қозғалуының заңы деп аталады.

Ескерту. Доғалық координата s-ті t уақытта жүрілген жол S пен шатастырып алмау керек. Егер нүкте үнемі бір бағытта ашық траектория арқылы қозғалып және осы нүктенің алғашқы орны доғаның санақ басына дәл келген күнде ғана, доғалық координата s пен жүрілген жол S бір-біріне сәйкес келеді.

2. Координаттық тәсіл. Бұл тәсілде, $M(x, y, z)$ нүктесінің қозғалысы абсолют қозғалмайтын осьтер жүйесінде, уақыт функциясы ретінде беріледі (*2-сурет*).

Сонымен, егер осы нүктенің координаталары $x,\ y,\ z$ уақыттың (t) үздіксіз бірмәнді функциялары болып келсе, онда:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \qquad (2)$$



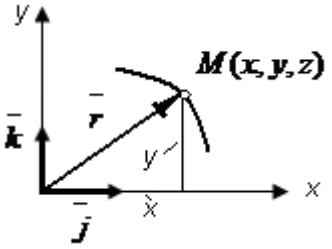
2-сурет

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Бұл теңдеулер декарттық координаттардағы нүкте қозғалысының теңдеулері деп аталады.

Егер нүкте жазық траектория арқылы қозғалса, онда Oxy координаталар жүйесінде (*3-сурет*) екі теңдеу аламыз, демек:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \tag{2a}$$



3-сурет

Координаттық тәсіл кезінде, нүктенің кеңістіктегі траекториясы екі теңдеу арқылы ($\phi_1(x,y,z)=0$, $\phi_2(x,y,z)=0$) өрнектеледі, ал жазықтықта – бір теңдеумен ($\phi(x,y)=0$) өрнектеледі**.**

3. Векторлық тәсіл. Бұл тәсілде $Oxyz$ координаттар жүйесіне қатысты нүктенің орны радиус-вектормен ($\vec{r} = \vec{OM}$) анықталады. Радиус-вектор дегеніміз – координаттар бас нүктесін және берілген $M(x,y,z)$ нүктесін қосатын вектор. Нүктенің радиус-векторы төмендегі формуламен өрнектеледі (*2-сурет*)

$$\vec{r} = \vec{f}(t) \quad \text{немесе} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{i} \tag{3}$$

Бұл жердегі: x, y, z – нүктенің координаталары, ал $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ –координат осьтерінің орттары.

Бұл теңдеулер (3) нүкте қозғалысының векторлық теңдеулері деп аталады. Сондықтан бұл теңдеулер $M(x,y,z)$ нүктесінің радиус-векторының модулі мен бағытының әрбір уақыт мезгіліне сәйкес келетін мәндерін табуға мүмкіндік береді. Қозғалыс кезінде $\bar{r}$ - өзінің модулін де, бағытын да өзгертеді. Демек, ол t-ның бірмәнді, үздіксіз, дифференциалданатын функциясы болып келеді.

Ескерту. Өзгермелі вектордың, берілген нүктеде тұрғызылған геометриялық орны *вектордың годографы* деп аталатыны математикадан белгілі. Сондықтан нүктенің траекториясы нүктенің радиус-векторының годографы болып табылады.

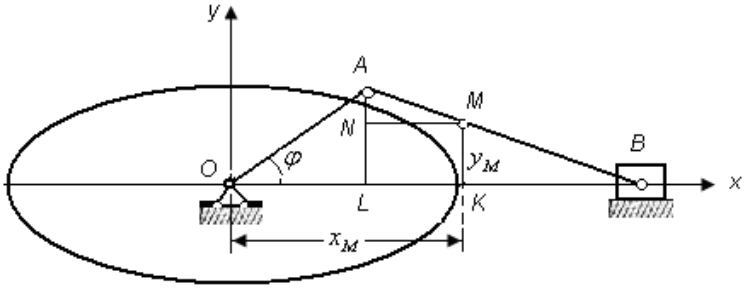
4. Нүкте қозғалысының траекториясы. Нүкте қозғалысының траекториясының теңдеуін құру үшін *2-теңдеулерден*, параметр ретінде тұрған,

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

уақытты алып тастау керек. Сол кезде траектория теңдеуі төмендегіше жазылады

$$F(x,z)=0,\quad F(y,z)=0. \tag{4}$$

Мысал. $OA=a$ иінтірегі (кривошипы) (4-сурет) айналған кезде ϕ бұрышының өзгеру заңдылығы: $\phi=\omega\cdot t$. Бұл формуладағы ω – тұрақты шама. Бұлғақтың (шатунның) ұзындығы: $AB=OA$. Бұлғақтың ортасындағы M нүктесінің траекториясын анықтау керек және B жылыстаушының (ползунның) қозғалыс теңдеуін құру керек.



4-сурет

Суретте көрсетілгендей, жылжымайтын осьтер жүйесін аламыз. Кез келген жағдайдағы иінтіректі-бұлғақты (кривошипно-шатунды) механизмді көрсетіп, осы жағдайдағы $M(x_M,y_M)$ нүктесінің координата нүктелерін тұрғызамыз. OAL, MNA және BKM үшбұрыштарынан:

$$x_M=OL+LK=\frac{3a}{2}\cos(\omega\cdot t),\ y_M=MB\cdot\sin\phi=\frac{a}{2}\sin(\omega\cdot t).$$

Сонымен, M нүктесінің тікбұрышты координаттар жүйесіндегі теңдеуін таптық. Алынған теңдеулердегі t параметрінен құтылып, M нүктесінің траекториясын анықтаймыз:

$$\frac{x_M^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2}+\frac{y_M^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1.$$

Соңғы теңдеуден көрініп тұрғандай, M нүктесінің траекториясы эллипс түрінде болады, ал оның жарты осьтері: $\frac{3a}{2}$ және $\frac{a}{2}$.

Енді, B сырғағының (ползунның) қозғалыс теңдеуін анықтайық. Оның траекториясы Ox осінің бір бөлігі болғандықтан, OAL және BAL үшбұрыштарынан:

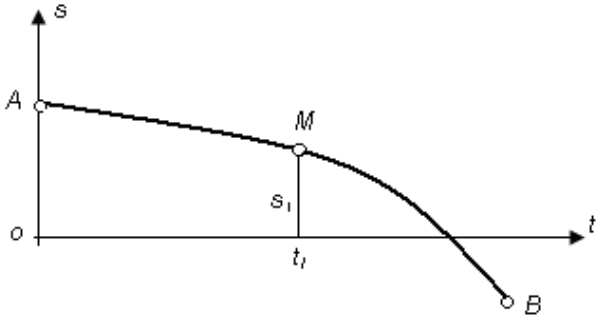
$$x_B=OB=OA\cos\phi+AB\cos\phi=2a\cdot\cos(\omega\cdot t).$$

Демек, B сырғағының қозғалыс теңдеуі:

$$x_B=2a\cdot\cos(\omega\cdot t).$$

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

5. Қозғалыс графигі. Нүктенің қозғалысын зерттеген кезде, кейде графикалық тәсілде қолданылады. Ол үшін өзара перпендикуляр екі ось алынады да, абсцисса осіне белгілі бір масштабпен уақыттың шамасы салынады, ал ординат осіне доғалық координатының (s) сәйкес шамасы көрсетіледі (*5-сурет*).

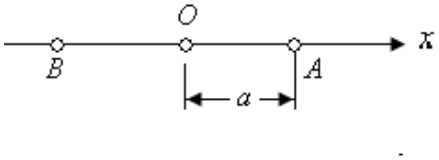


5-сурет

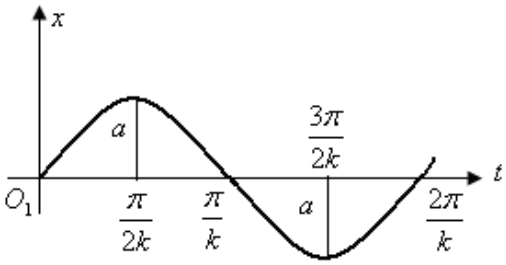
Осы кезде қозғалыс заңы белгілі бір AB сызығымен көрсетіледі. Аталған сызық *қозғалыс графигі* деп аталады. Қозғалыс графигі қозғалысты көрнекі етіп көрсетеді. Сонымен қатар қозғалыс графигін нүкте траекториясымен және жүрілген жолдың графигімен шатастырып алмау керек. Келтірілген түсініктердің айырмашылықтарын жете түсіну үшін келесі мысалды қарастырайық.

Мысал. Берілген нүкте $x = a\sin kt$ заңы бойынша түзу сызықты қозғалыста болсын. Бұл теңдеудегі a және k тұрақты шамалар. Қозғалыстың және жүрілген жолдың графигін тұрғызу керек.

Нүктенің траекториясы түзу сызық; осы сызықты Ox осі ретінде қабылдайық (*6-сурет*). Қозғалыс графигін белгілі бір масштабпен $O_1 t x$ координата жүйесінде тұрғызамыз. Бұл график синусоида түрінде болады (*7-сурет*).



6-сурет



7-сурет

Тұрғызылған траектория мен график нүкте қозғалысын толық түсіндіреді. Мысалы, *6-суретте* көрсетілгендей O-дан бастап, яғни $x = 0$ кезден бастап берілген нүкте Ox траекториясымен қозғалысты бастайды. Уақыт $t = 0$-ден

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

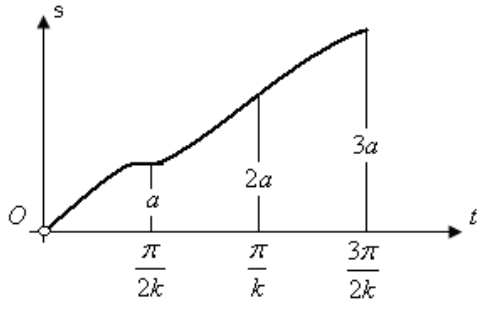
$t_1 = \frac{\pi}{2k}$-ге дейін x өсе-өсе келе оңға қарай қозғалып, оң жақтағы шеткі нүкте A-ға дейін келеді. Бұл арақашықтық $OA = a$. Бұдан кейін, уақыт $t_1 = \frac{\pi}{2k}$-ден $t_2 = \frac{\pi}{k}$-ға дейін кері қарай қозғалып, координата басына (O) қайтып келеді, ал бұл қозғалысқа кеткен уақыт – $t_2 = \frac{\pi}{k}$. Осыдан кейін, уақыт $t_2 = \frac{\pi}{k}$- дан $t_3 = \frac{3\pi}{2k}$ -ға дейін солға қарай қозғалып, сол жақтағы шеткі нүкте B-ға дейін келеді. Бұл арақашықтық $OB = a$. Содан кейін, уақыт $t_4 = \frac{2\pi}{k}$-ға тең болған кезде координата басына (O) қайтып келеді. Осылайша, қарастырылып отырған қозғалыс қайталана береді. Қозғалыстың мұндай түрі *гармоникалық тербеліс қозғалысы* деп аталады. Кейбір анықтамаларды келтірейік:

1) нүктенің координата басынан ең үлкен ауытқуы (a) *тербелістің амплитудасы* деп аталады;

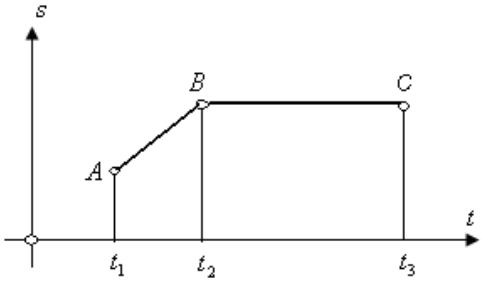
2) нүктенің бұрынғы бағытта қозғала отырып, бастапқы орнына қайтып келетін уақытты – *тербелістің периоды* $(T = \frac{2\pi}{k})$ деп атайды.

Енді жүрілген жолдың графигін тұрғызайық. Ол үшін абсцисс осіне белгілі бір масштабпен уақыттың шамасы салынады, ал ординат осіне жүрілген жолдың координатының сәйкес шамасы көрсетіледі (*8-сурет*).

Нүкте оңға қозғалғанда, оның жүрген жолы (S) мен координатасы (x) бір-біріне сәйкес болады. Бірақ нүкте A-ға дейін жетіп (*6-сурет*), одан кейін кері қарай қозғалғанда жағдай басқаша болады, өйткені бұл кезде, координата азая бастайды, жүрілген жол өседі.



8-сурет



9-сурет

Нүкте $t_2 = \frac{\pi}{k}$ уақытта координата басына жеткен кезде, x нөлге тең болады, ал бұл уақыт аралығында $(t = 0, t_2 = \frac{\pi}{2})$ жүрілген жол $2a$-ға тең

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

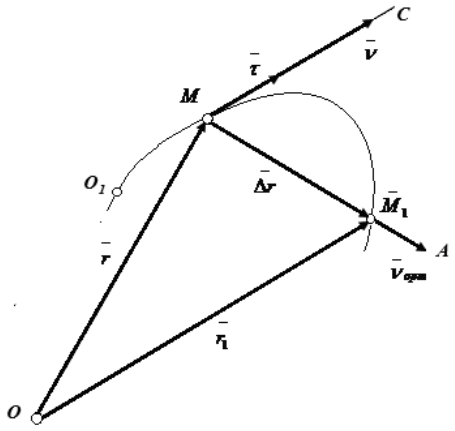
болады. Сонымен, жүрілген жолдың графигі болып, ординатасы кез келген қозғалыс кезінде өсіп отырады да, тек қозғалыс тоқтаған кезде Ot осіне параллель түзу (BC) болатын график табылады (*9-сурет*).

§2. Нүкте жылдамдығы

Нүкте қозғалысының негізгі кинематикалық өлшемінің бірі – оның жылдамдығы болып табылады. Жылдамдық жүрілген жолдың сандық өсуін ғана сипаттап қоймайды, онымен қоса жолдың бағытына да мән береді. Сондықтан нүктенің жылдамдығы векторлық шама болып табылады.

1. Векторлық тәсіл. Жылдамдықтың векторлық шама ретіндегі анықтамасына тоқталайық. Ол үшін, кез келген нүктенің қозғалысын қарастырайық. Аталған нүкте t уақытында M нүктесінде болсын, ал $t + \Delta t$ уақытында M_1 нүктесіне орын ауыстырсын (*10-сурет*).

Нүктенің t және t_1 уақыттарындағы орындары $\bar{r}$ мен $\bar{r}_1$ радиус-векторларымен анықталады. Нүктенің, берілген есептеу жүйесіндегі орнының өзгеруін сипаттайтын $\overline{MM}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta\bar{r}$ векторын, $\Delta t = t_1 - t$ уақыт аралығындағы *нүктенің орын ауыстыру векторы* деп атаймыз.



10-сурет

Нүктенің орташа жылдамдығы деп, оның радиус-векторының осы орын ауыстыруға сәйкес уақыт аралығына қатынасына тең болатын векторлық шама ($\bar{v}$) аталады, яғни:

$$\bar{v}_{орт} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}. \qquad (5)$$

Ал берілген сәттегі нүкте жылдамдығы деп оның радиус-векторының уақыт бойынша алынған бірінші туындысына тең болатын векторлық шаманы айтамыз, яғни:

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\bar{v} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (6)$$

Жылдамдықтың өлшемі $[v] = \frac{L}{T}$ (L - ұзындық, T - уақыт). Жылдамдықтың СИ жүйесіндегі өлшемі м/с. *10-суретте* көрсетілгендей, *MA* кесіндісі шегінде *MC* жанамасына сәйкес келетін болғандықтан, *нүктенің жылдамдығы – қозғалыс бағытына сәйкес, траекторияға жанама бойымен бағытталған вектор* болып табылады.

2. Координаттық тәсіл. Егер санақ жүйесі ретінде декарттық жүйе Oxyz берілген болса, онда жылдамдық векторын үш құраушыға жіктеп, оларды:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (7)$$

өрнектерімен анықтауға болады.

Алынған формулалар (8) нүкте жылдамдығының ($\bar{v}$) координаттық осьтердегі проекцияларын көрсетеді. Яғни, жылдамдық проекциялары табылғаннан кейін толық вектордың өзі де табылады. Оның модулі

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (8)$$

формуласымен анықталады.

Бұдан кейін жылдамдық векторының бағыттаушы косинустарын табуға болады:

$$\cos(v,x) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(v,y) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(v,z) = \frac{v_z}{v}. \qquad (9)$$

Егер нүкте жазық траекториямен қозғалса, онда:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (9а)$$

3. Табиғи тәсіл. Нүктенің қозғалысы табиғи тәсіл арқылы берілген болса, онда нүктенің жылдамдық векторының анықтамасын пайдалана отырып,

$$V = \frac{dS}{dt}. \qquad (10)$$

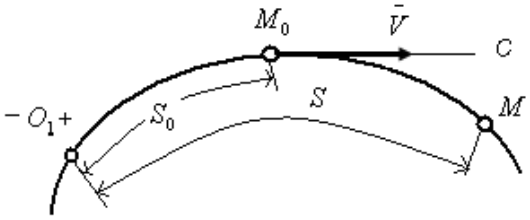
өрнегін алуға болады.

4. Нүктенің бірқалыпты қозғалысы. Егер нүктенің жылдамдығының жанамаға проекциясы қозғалыс кезінде тұрақты болса, онда нүкте қозғалысы *бірқалыпты қозғалыс* деп аталады. Бірқалыпты қозғалыс түзу сызықты немесе қисық сызықты болып келеді.

Нүктенің бірқалыпты қозғалысының теңдеуін анықтайық. Нүктенің бастапқы орны M_0, ал оның доғалық координатасы s_0 болсын (*11-сурет*). Енді *14-формуланы* $dS = V_\tau \cdot dt$ түрінде жазайық. Осы өрнекті интегралдаған кезде, оның интегралдау шектері: уақыт нөлден t-ға дейін, ал жол S_0-ден S-ке дейін өзгерсін. Сонда:

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\int_{S_0}^{S} dS = \int_{0}^{t} V_\tau \cdot dt \quad \Rightarrow \quad S - S_0 = V_\tau t \quad \Rightarrow \quad S = S_0 + V_\tau t\,.$$



11-сурет

Соңғы өрнек нүктенің бірқалыпты қозғалысының теңдеуі болып табылады. Егер доғалық координаттың орнына жолдың оң шамасын алсақ, онда:

$$S = V \cdot t\,.$$

Демек, нүктенің бірқалыпты қозғалыс кезінде жүрген жолы, жылдамдықпен уақыттың көбейтіндісіне тең болады.

§3. Нүкте үдеуі

Нүкте қозғалысының негізгі кинематикалық өлшемінің келесісі – оның үдеуі болып табылады.

1. Векторлық тәсіл.

Жылдамдық векторының формуласынан (6) нүктенің берілген уақыттағы орташа үдеуі:

$$\bar{a}_{орт} = \frac{\Delta\bar{v}}{dt} \qquad (11)$$

өрнегімен анықталады

Нүктенің үдеуі деп, Δt-нің нөлге ұмтылған кездегі орташа үдеудің шегін айтамыз, яғни:

$$\bar{a} = \lim \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \text{немесе} \quad \bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\,.$$

Сонымен, берілген уақыт мезгіліндегі нүктенің үдеуі деп жылдамдық векторының уақыт бойынша алынған бірінші туындысына немесе нүктенің радиус-векторының уақыт бойынша алынған екінші туындысына тең болатын векторды айтамыз.

Үдеудің өлшемі $[a] = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ (v – жылдамдық, t – уақыт). Үдеудің *СИ* жүйесіндегі өлшемі $м/сек^2$.

2. Координаттық тәсіл

Үдеу модулінің кординаттар осьтеріндегі проекциялары:

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{12}$$

Үдеу модулі

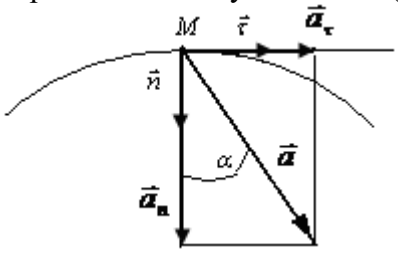
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{13}$$

Ал үдеу векторының кеңістіктегі бағыты оның бағыттаушы косинустарымен анықталады:

$$\cos(a,x) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(a,y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(a,z) = \frac{a_z}{a}. \tag{14}$$

3. Табиғи тәсіл

Нүктенің қозғалысының тік және жанама үдеулері туралы. Қозғалысы табиғи тәсіл түрінде берілген нүктенің үдеуін берілген осьтер бағыттарындағы құраушыларға жіктеп жазуға болады (*12-сурет*)



12-сурет

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{15}$$

Оның модулі:

$$\vec{a} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}\ . \tag{16}$$

Бұл жердегі: $\vec{a}_\tau$ – жанама үдеу, ал $\vec{a}_n$ – тік (нормаль) үдеу.

Жанама үдеу жылдамдықтың шама жағынан, яғни модуль бойынша өзгеруін сипаттайды, өйткені ол жылдамдықтың модулінен уақыт бойынша алынған бірінші туындыға тең. Олай болса, *тік (нормаль) үдеу* жылдамдықтың бағыт бойынша өзгеруін сипаттайды.

Үдеудің бағыты оның нормальмен құрайтын бұрышымен анықталады. Яғни

$$tg\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n}. \tag{17}$$

Келтірілген (15) – (17) формулалар арқылы нүктенің қозғалысы табиғи тәсілмен, нүктенің траекториясы мен қозғалыс заңы берілген кездегі үдеуі анықталады.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Нүкте қозғалысының жекеленген түрлері.

а) Түзу сызықты қозғалыс. Түзу сызықтың қисықтығы нөлге, ал қисықтық радиусы шексіздікке тең болғандықтан, түзу сызықты қозғалыс кезінде нүкте тек жанама үдеуге ғана ие бола алады. Демек, бұл кезде

$$a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0.$$

ә) Қисық бойымен бірқалыпты қозғалыс. Бірқалыпты қозғалыс кезінде $v_\tau = const$ болғандықтан, $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = 0$ болады. Яғни, қисық бойымен бірқалыпты қозғалыс кезінде нүкте тек тік (нормаль) үдеуге ғана ие бола алады. Сонымен, егер нүкте түзу сызықты және бірқалыпты қозғалса, онда оның жанама үдеуі де және тік (нормаль) үдеуі де нөлге тең болады. Олай болса, бұл кезде нүктеде үдеу болмайды. Қорыта айтқанда, *нүктенің түзу сызықты және бірқалыпты қозғалысында үдеу мүлде туындамайды.*

б) Нүктенің бірқалыпты айнымалы (теңөзгермелі) қозғалысы. Егер жанама кернеу қозғалыс кезінде тұрақты ($a_\tau = const$) болса, онда нүктенің қозғалысы – *бірқалыпты айнымалы* (*теңөзгермелі*) *қозғалыс деп аталады.* Егер жанама үдеудің бағыты жылдамдықтың бағытына сәйкес келсе, онда бұл қозғалыс теңүделген, ал бағыттар керісінше болса, онда тең баяуланған қозғалыс деп аталады. Нүктенің бірқалыпты айнымалы қозғалыс заңының формуласы:

$$S = S_0 + v_{\tau 0} \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}.$$

§4. Кинематика элементтерін (траектория, жылдамдық, үдеу) анықтау

Нүкте қозғалысының кинематикалық элементтерін анықтау үшін не қозғалыстың декарт координаттарындағы теңдеулері берілу керек немесе оның траекториясы мен нүктенің осы траекториямен қозғалу заңдылығы берілу керек. Түсінікті болу үшін келесі есепті қарастырайық.

Есеп. Нүктенің қозғалысы

$$x = b \cdot \cos kt\,,\; y = b \cdot \sin kt$$

теңдеулерімен берілсін.

Мұндағы, b және k – тұрақты шамалар.

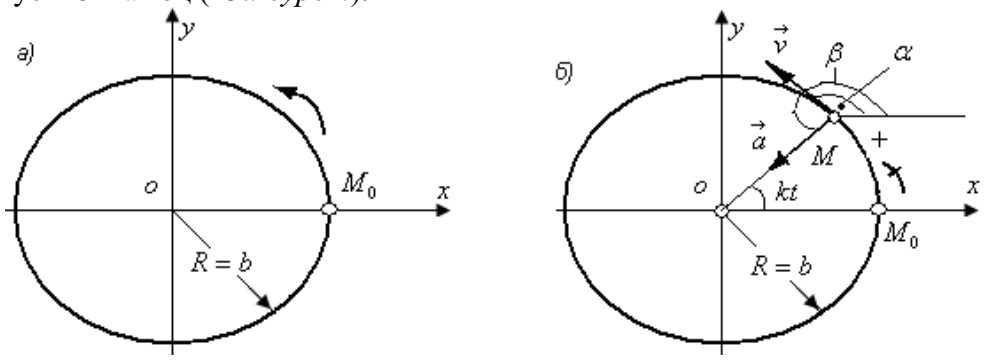
Нүктенің траекториясын, уақыттың t – кезіне сәйкес жылдамдығын және үдеуін табу керек.

1. Траекторияның теңдеуін анықтау үшін берілген теңдеулердегі t параметрінен құтылу керек. Ол үшін әр теңдеудің екі жағында квадраттап, сәйкес жақтарын бір-біріне қосамыз. Сонда:

$$x^2 + y^2 = b^2 \cdot (\cos^2 kt + \sin^2 kt) \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = b^2.$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Соңғы теңдіктен көрініп тұрғандай, нүктенің траекториясы шеңбер болып шықты. Бұл шеңбердің центрі координата басында жатады және оның радиусы b -ға тең (*13а-сурет*).



13-сурет

2. Нүктенің уақыттың t кезіне сәйкес жылдамдығын анықтайық. Алдымен жылдамдықтың модулін табайық.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -bk \cdot \sin ktсм/c\,, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = bk \cdot \cos ktсм/c\,.$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = bkck\ /c\,.$$

Жылдамдықтың модулі мен бағытын анықтайық:

$$\alpha = (\vec{v}, \vec{i}) = \frac{\pi}{2} + kt\,,\ \cos(\vec{v}, \vec{i}) = \frac{1}{v} \cdot \frac{dx}{dt} = -\sin kt = \cos\left(\frac{\pi}{2} + kt\right).$$

Өрнектерден көрініп тұрғандай, жылдамдық модулі бойынша тұрақты болып шықты, демек, нүкте шеңбер бойымен бірқалыпты қозғалыста болады. Жылдамдықтың векторы OM радиусына перпендикуляр және шеңберге жанамамен бағытталған; жылдамдық пен Ох осінің арасындағы бұрыш $\alpha = (\vec{v}, \vec{i}) = \frac{\pi}{2} + kt$ (*13 ә-сурет*).

3. Нүктенің уақыттың t кезіне сәйкес үдеуін анықтайық. Алдымен белгілі формулаларды пайдаланып, үдеулерді табамыз. Содан кейін, модульді және бағыттаушы косинустарды табамыз. Олар:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -bk^2 \cos ktct\ /c^2\,, \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -bk^2 \sin ktct\ /c^2\,,$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)} = bk^2 см/c^2\,.$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{1}{a} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos kt = \cos(\pi + kt), \qquad \beta = (\vec{a}, \vec{i}) = \pi + kt\,.$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Нүктенің үдеуі модулі бойынша тұрақты, шеңбердің центріне бағытталған болып шықты және Ох осімен $\beta = (\vec{a}, \vec{i}) = \pi + kt$ бұрыш құрайды (13 ә-сурет). Енді нүктенің жанама үдеуін табайық. Жоғарыда келтірілген формула бойынша

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d(bk)}{dt} = 0 .$$

Бұл жерде $v_\tau = v$, өйткені қозғалыстың бағыты есептеу жүйесінің оң бағытымен сәйкес. Жанама үдеу нөлге тең болды (нүкте шеңбер бойымен бірқалыпты қозғалғандықтан!), сондықтан толық үдеу тік (нормаль) үдеуге тең, яғни:

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = bk^2 см / с^2 .$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY