СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

ДӘРІС № 9

ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ІЛГЕРІЛЕМЕЛІ ЖӘНЕ АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСТАРЫ

Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

2-*тарау.* ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ІЛГЕРІЛМЕЛІ ЖӘНЕ АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСТАРЫ

Қатты дене қозғалыстарын: ілгерілмелі, айналмалы, жазық, сфералық және дененің еркін қозғалысы деп бес түрге бөлуге болады. Олардың ішіндегі қарапайымы екеу, олар: ілгерілмелі және айналмалы. Қозғалыстың басқа түрлері күрделі болып келеді, бірақ әр уақыт мезетінде, оларды ілгерілмелі және айналмалы қозғалыстардан құрауға болатынын келесі тараулардан көре аламыз.

§1. Қатты дененің ілгерілмелі қозғалысы

Қатты дененің ілгерілмелі қозғалысы деп дененің бойындағы кез келген түзудің, қозғалыстың барлық уақытында да өзінің алғашқы орналасуына параллель болып қалатын қозғалыс түрін айтады.

Теорема. Ілгерілмелі қозғалыс кезінде қатты дененің барлық нүктелерінің траекториялары бір-біріне ұқсас, өзара параллель және олардың жылдамдықтары мен үдеулері уақыттың әр кезеңінде бір-біріне тең.

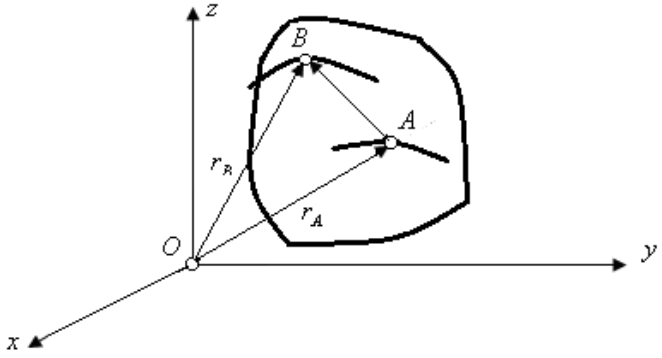
Теореманы дәлелдеу үшін, *Oxyz* санақ жүйесінде ілгерілмелі қозғалыстағы, кез келген қатты дененің A және B нүктелерін қарастырайық (*14-сурет*). Суреттен көрініп тұрғандай:

$$\vec{r}_B = \vec{r} + \vec{AB}. \qquad (18)$$

Дененің қозғалыс кезінде $\vec{AB}$ векторының модулі де, бағыты да өзгермейді. Себебі дене абсолют қатты және ілгерілмелі қозғалыс қарастырылып отыр. Соңғы теңдіктің (18) екі жағынан уақыт бойынша туынды алсақ,

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt}.$$



14-сурет

Алынған теңдіктегі $\vec{AB} = const$ болғандықтан $\frac{d(\vec{AB})}{dt} = 0$. Сонымен қатар, $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$ және $\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A$ демек, A және B нүктелерінің кез келген уақыттағы жылдамдықтары геометриялық тұрғыдан өзара тең. Соңғы теңдіктің екі жағынан уақыт бойынша туынды алсақ,

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}.$$

Бірақ $\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_B$ және $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$ яғни A және B нүктелерінің кез келген уақыттағы үдеулері геометриялық тұрғыдан өзара тең болғандықтан теорема дәлелденді деп тұжырымдаймыз.

Сонымен, *ілгерілмелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің қозғалыстары бірдей және дененің қозғалысы оның кез келген бір нүктесінің қозғалысымен толық анықталады*. Сол нүктенің қозғалыс теңдеуі қатты дененің ілгерілмелі қозғалысының теңдеуі болып табылады, демек:

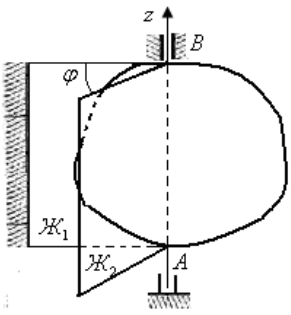
$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad z_A = f_3(t). \qquad (18а)$$

§2. Қатты дененің айналмалы қозғалысы

Қатты дененің айналмалы қозғалысы деп, оның нүктелері – өзара параллель жазықтарда, центрлері қозғалмайтын бір түзудің (осьтің) бойында жатқан шеңбер бойымен қозғалатын қозғалысты айтады. Аталған қозғалмайтын түзу дененің айналу осі болып табылады. Мұндай қозғалысқа динамомашинаның роторы мысал бола алады. Айналып тұрған дененің кеңістіктегі орны қозғалмайтын $Ж_1$ жазықтығымен және денемен байланыстағы, осы денемен бірге айналатын $Ж_2$ жазықтығының

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

арасындағы екіжақты бұрыш φ арқылы толығымен анықталады. Бұл бұрыш қатты дененің бұрылу бұрышы деп аталады (*15-сурет*).



15-сурет

Ол бұрыш радианмен өлшеніп, уақыттың функциясы болып табылады:

$$\varphi = f(t) \qquad (19)$$

Бұл теңдеу қатты дененің айналу заңы немесе айналу теңдеуі деп аталады.

Кей кезде, дененің бұрылу бұрышы айналу санименде көрсетіледі; ол кезде n – айналымға сәйкес бұрыш $\varphi = 2\pi \cdot n$ радианға тең болады.

Айналмалы қозғалыстағы бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеу. Дененің қозғалмайтын осьті айналуын сипаттайтын шамалар – бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеу болып табылады. Орташа бұрыштық жылдамдық:

$$\omega_{орт} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} .$$

Берілген уақыт мезетіндегі бұрыштық жылдамдық ω дененің бұрылу бұрышы φ-дің уақытқа байланысты өзгеру тездігін көрсететін шама:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} . \qquad (20)$$

Сонымен қатар бұрыштық жылдамдық векторлық шама болып табылады. Бұрыштық жылдамдық векторын

$$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\bar{k} = \omega\bar{k} \qquad (21)$$

формуласымен өрнектеуге болады.

Бұрыштық жылдамдықтың бұрыш пен уақыттың қатынасымен өлшенеді, яғни $[\omega] = \frac{1}{T}$, ал оның бірлік өлшемі - $\frac{радиан}{секунда} = 1/c$.

Бұрыштық үдеу дегеніміз – дененің айналмалы қозғалысын сипаттаушы бұрыштық жылдамдықтан уақыт бойынша алынған бірінші туындыға

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

немесе айналу бұрышынан (φ) уақыт бойынша алынған екінші туындыға тең болатын кинематикалық шама:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{немесе} \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{22}$$

Бұрыштық үдеу векторын

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}\bar{k} \quad \text{немесе} \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\bar{k}. \tag{22-а}$$

формуласымен өрнектеуге болады.

Бұрыштық үдеудің өлшемі – $[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[\mathrm{t}]} = \frac{1}{T^2}$, ал оның бірлік өлшемі – $\frac{радиан}{секунда^2} = 1/с^2$.

Дененің бірқалыпты айналмалы қозғалысы

Егер дененің айналысы кезінде оның бұрыштық жылдамдығы тұрақты болса ($\omega = const$), онда мұндай айналмалы қозғалысты бірқалыпты айналмалы қозғалыс деп атаймыз. Бірқалыпты айналмалы қозғалыстың теңдеуін анықтайық. Ол үшін, бастапқы уақытта дененің бұрылу бұрышы $\varphi_0 = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ деп қабылдайық. Енді *20-формуланы* түрлендіріп жазайық: $d\varphi = \omega \cdot dt$. Бұл теңдеуді уақыт үшін 0-ден t-ға дейінгі шекарада, ал бұрышты φ_0-ден φ-ге дейінгі шекарада интегралдайық. Сол кезде, *дененің бірқалыпты айналмалы қозғалысындағы теңдеуін аламыз*:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t. \tag{23}$$

Техникада, бірқалыпты айналмалы қозғалыстың бұрыштық жылдамдығын бір минуттағы айналу санымен сиппаттайды да, n *айн/мин* деп белгілейді. Дененің бір айналуындағы бұрылу бұрышы 2π радиан, ал дене n минутта $2\pi \cdot n$ бұрышқа бұрылады. Бір секундтағы бұрыштық жылдамдық

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30} 1/с.$$

Дененің бірқалыпты айнымалы қозғалысы

Дененің теңайнымалы қозғалысы деп бұрыштық үдеуі тұрақты болатын ($\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = const$) *айналмалы қозғалысты айтамыз.*

Егер ε және ω таңбалары бірдей болса (екеуінің таңбасыда плюс не минус), онда дененің теңайнымалы қозғалысы *теңүделген*, ал таңбалары әртүрлі болса (біреуінің таңбасы да плюс екіншісінікі минус), онда дененің теңайнымалы қозғалысы *теңбаяуланған* деп аталады. *Дененің бірқалыпты айналмалы қозғалысындағы теңдеуін* алу үшін, уақыт $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$ және дененің бастапқы бұрыштық жылдамдығы ω_0 деп қабылдаймыз. Жоғарыда

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

келтірілгендей $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = const$ немесе $d\omega = \varepsilon \cdot dt$. Көрсетілген теңдеуді уақыт үшін 0-ден t-ға дейінгі шекарада, ал бұрыштық жылдамдықты ω_0-ден ω-ға дейінгі шекарада интегралдап,

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$$

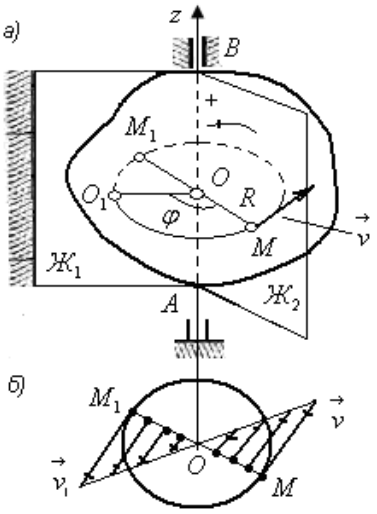
теңдеуін аламыз.

Соңғы теңдеуді уақыт үшін 0-ден t-ға дейінгі шекарада, ал бұрышты φ_0-ден φ-ге дейінгі шекарада интегралдап, *дененің бірқалыпты айналмалы қозғалысындағы теңдеуін* аламыз:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}. \qquad (24)$$

§3. Тұрақты осьті айналатын дене нүктелерінің жылдамдықтары және үдеулері

Берілген қатты дене тұрақты осьті айналып тұрсын. Осы дененің айналу осінен R қашықтықта орналасқан M нүктесінің (*16 а-сурет*) қозғалысын қарастырайық.



16-сурет

Дененің тұрақты осьті айналу кезіндегі траекториясы, жазықтықтары айналу осіне перпендикуляр, ал центрі айналу осінде жататын шеңбер болады. Доғалық координатта басы ретінде, $Ж_1$ жазықтығында жатқан O_1 нүктесін, ал қозғалыстың оң бағыты ретінде сағат тіліне қарсы бағытты қабылдаймыз. Келтірілген *16 а-суретінен* $\cup O_1M = s = R \cdot \varphi$ екенін көреміз. Жылдамдық векторының жанамаға проекциясы нүктенің доғалық

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

координатасының уақыт бойынша алынған бірінші туындысына тең екенін ескерсек:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega . \qquad (25)$$

Жылдамдықтың модулі:

$$v = R|\omega| . \qquad (26)$$

Қозғалмайтын осьтің айналасында айналатын дене нүктелерінің жылдамдығы – нүктенің айналу жылдамдығы деп аталады (кейбір кезде шеңберлік немесе сызықтық жылдамдық деп те аталады). Сондықтан нүктенің айналу жылдамдығы модулі бойынша - *бұрыштық жылдамдықтың модулі мен осы нүктенің қозғалыс шеңберінің радиусының көбейтіндісіне тең болады.* (Бұл кезде v векторы радиусы R, ал центрі O_1 нүктесінде жататын шеңберге жанамамен айналыс болатын жаққа қарай бағытталады).

MM_1 түзуінің бойында жатқан нүктелер жылдамдығының эпюрасы *16 ә-суретінде* көрсетілген.

Енді M нүктесінің үдеуін, оның жанама және тік (нормаль) үдеулерінің қосындысы ретінде анықтайық (ось айналасында айналатын дененің нүктесінің жанама үдеуі – айналу үдеуі деп, ал тік үдеуі – центрге тартқыш үдеуі деп аталады). Он бесінші формулаға сүйенсек:

$$a_\tau = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_\tau| = R \cdot |\varepsilon| . \qquad (27)$$

15- және 26-формулалардан:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R \cdot \omega)^2}{R} = R \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad a_n = R \cdot \omega^2 . \qquad (28)$$

Демек, айналмалы қозғалыстағы нүктенің толық үдеуі

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau \bar{\tau} + \bar{a}_n \bar{n} \text{ немесе } f = \sqrt{f_\tau^2 + f_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (29)$$

формулаларымен анықталады.

Нүктенің толық үдеуінің векторының бағыты үдеу векторы мен шеңбердің центрінен осы нүктеге дейінгі арақашықтық-радиус арасындағы бұрышпен анықталады:

$$tg\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} . \qquad (30)$$

Егер дене қозғалмайтын ось айналасында бірқалыпты ($\omega = const$) айналатын болса, онда дененің кез келген нүктесінің тек центргетартқыш үдеуі ғана болады, яғни:

$$a = R \cdot \omega^2 . \qquad (31)$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

§4. Қатты дененің айналу қозғалыстарының есептері

Қатты дененің айналу қозғалыстарының есептерін екі топқа бөлуге болады: 1) егер дене қозғалысының теңдеуі берілсе, онда оның бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін және дененің нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтауға болады; 2) егер дене қозғалысының бұрыштық жылдамдығы немесе бұрыштық үдеуі берілсе, онда оның қозғалысының теңдеуін және сол дененің нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтауға болады.

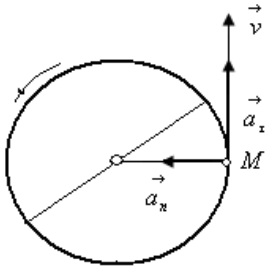
1-есеп. Мотордың роторын (*17-сурет*) жұмысқа қосқанда, ол:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} t^3$$

заңдылықпен айналады

Роторды жұмысқа қосқаннан соң $t = 1c$ уақыт өткен кейінгі ротор қозғалысының бұрыштық жылдамдығын, бұрыштық үдеуін және ротор тогы M нүктесінің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін анықтау керек болсын.

Берілімдер: Ротордың диаметрі $d = 20\,см$, бұрыштық жылдамдығы $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{2} t^2 \; 1/c$, бұрыштық үдеуі $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \pi \cdot t \; 1/c^2$.



17-сурет

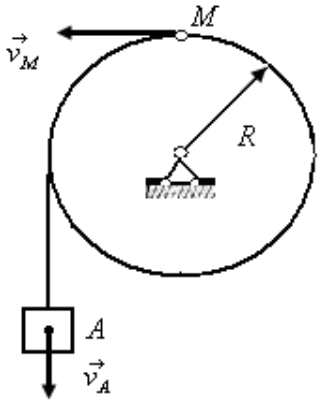
Шешімі. Уақыт кезеңі $t = 1\,c$ болған кезде, ротордың бұрыштық жылдамдығы $\omega_1 = \frac{\pi}{2} 1/c$, ал бұрыштық үдеуі $\varepsilon_1 = \pi \; 1/c^2$. Нүктенің айналу жылдамдығы $v = \omega \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot d \cdot t^2 \quad см/с$. Нүктенің айналу үдеуі $w_\tau = \varepsilon \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot d \cdot t \quad см/с^2$. Нүктенің центргетартқыш үдеуі $w_n = \omega^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi^2}{8} \cdot d \cdot t^4 \; см/с^2$.

Алынған теңдіктерге сан мәндерін қойғаннан кейін: роторды жұмысқа қосқаннан соң $t = 1\,c$ уақыт өткен соң - $v = \frac{\pi \cdot d}{4} = 15{,}7 \; см/с$,

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$w_\tau = \frac{\pi}{2} \cdot d = 30{,}1 \quad см/с^2$, $w_n = \frac{\pi^2}{8} \cdot d = 25 \quad см/с^2$, нүктенің толық үдеуі $w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = 40 \; см/с^2$.

2-есеп. Радиусы $R = 0{,}5 \; м$ шкивке ілінген темір арқанға (тросқа) A жүгі ілінген (*18-сурет*).



18-сурет

Жүк алғашқы орнынан $w = 2 \; м/с^2$ үдеумен төмен қарай қозғалып, шкивті айналдырады. Шкивтің айналу қозғалысының теңдеуін, оның кез келген уақыттағы қозғалысының бұрыштық жылдамдығын, бұрыштық үдеуін және шкив тоғынының M нүктесінің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін анықтау керек.

Шешімі. Шкив тоғыны нүктелерінің, оның ішінде M нүктесінің жылдамдығы жүк (A) жылдамдығымен бірдей болатыны анық, яғни $v_M = v_A$. Жүк тең үдеумен қозғалатын болғандықтан, шкивтің айналу қозғалысының теңдеуі (оның кез келген уақыттағы қозғалысының жылдамдығы)

$$v_M = v_A = a \cdot t = 2t \quad м/с$$

теңдігі арқылы өрнектеледі.

25-формула бойынша:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2t}{0{,}5} = 4t \quad 1/с.$$

Шкивтің бұрыштық үдеуі:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 4 \quad 1/с^2.$$

Бұрыштық жылдамдық тұрақты, ал $\varphi_0 = 0$ және $\omega_0 = 0$ болғандықтан

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\varphi = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} = 2t^2 .$$

Шкив тогы M нүктесінің айналу үдеуін *27-формула* арқылы анықтаймыз:

$$\left|a_\tau\right| = R \cdot \left|\varepsilon\right| = 2 \ \ м/с^2 .$$

Шкив тогы M нүктесінің центргеекпін үдеуін *28-формула* арқылы анықтаймыз.

$$a_n = R \cdot \omega^2 = 8t^2 \ \ м/с^2 .$$

Толық үдеу: $$a = 2\sqrt{1+16 \cdot t^4} \ \ м/с^2 .$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY