СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

ДӘРІС № 11

ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ЖАЗЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

4-*тарау.* ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ЖАЗЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫ

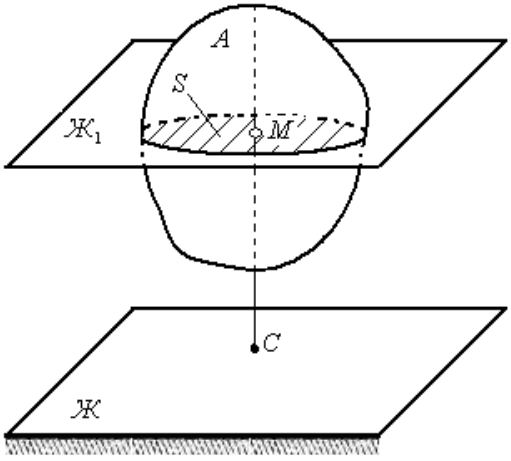
§1. Жазық фигураның өз жазықтығындағы қозғалысы

Дененің барлық нүктелері берілген қозғалмайтын жазықтыққа параллель жазықтықтарда қозғалатын қозғалыс қатты дененің жазық қозғалысы деп аталады.

Мұндай қозғалысқа көптеген мысалдар келтіруге болады, мысалы: трамвайдың түзу сызықты қозғалысы кезіндегі дөңгелегінің қозғалысы; иінтіректі-бұлғақты (кривошипті-шатунды) механизмінің иінтіректің (кривошипінің) қозғалысы, бұлғақтың (шатунының) қозғалысы, т.б.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Келесі мысалды толығырақ қарастырайық. Берілген дене A, қозғалмайтын «Ж» жазықтығына параллель жазық қозғалыста болсын (*27-сурет*). Берілген денені (A) қозғалмайтын «Ж» жазықтығына параллель $Ж_1$ жазықтығымен екіге бөлейік. Кесілген жердегі фигураны (жазықтықты) S арқылы белгілейік. Бұл жазықтық, дененің қозғалыс кезінің әр уақытында $Ж_1$ жазықтығында жатады. Сонымен қатар A денесі абсолют қатты болғандықтан, $Ж_1$ жазықтығындағы жазық фигура S-тің қозғалысы осы дененің қозғалысын толығымен анықтайды. Себебі, жазық қозғалыс кезінде, денеден алынған кез келген түзу ($C\,M$) қозғалмайтын жазықтыққа перпендикуляр болса, онда ол түзу өзіне параллель күйде қозғалады.



27-сурет

Демек, аталған $C\,M$ түзуінің бойындағы әрбір нүктенің (дененің нүктелері) қозғалысы бірдей болады, ал олардың қозғалысы S фигурасындағы (жазықтығындағы) M нүктесінің қозғалысымен толығымен анықталады. Сондықтан жазық фигураның қалған нүктелерінің қозғалыстары, дененің сәйкес перпендикулярларында жатқан нүктелердің қозғалыстарын анықтайды.

Қорыта айтқанда, *қатты дененің жазық қозғалысы өз жазықтығында жатқан жазық фигураның қозғалысымен толық анықталады.* Яғни, дененің қозғалысын зерттеудің орнына, жазық фигураның қозғалысын зерттеу жеткілікті де тиімді болып табылады.

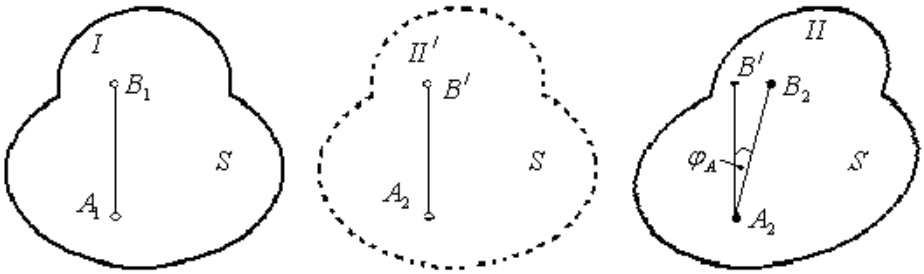
§2. Жазық фигураның қозғалысын ілгерілмелі және айналмалы қозғалыстарға жіктеу

Кез келген фигураның жазықтықтағы орны, оның екі нүктесімен немесе осы фигурадағы түзудің орнымен анықталады. Мысалы, S фигурасының

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

жазықтықтағы орны оның A_1 және B_1 нүктелерімен немесе A_1B_1 түзуімен анықталады (*28-сурет*).

Белгілі бір уақытта S фигурасының жазықтықтағы орны I болсын. Ал біраз уақыттан кейін, бұл фигура берілген заңдылықпен қозғала отырып, II орнына ауыссын.



28-сурет

Енді осы фигураны I орнынан II орнына екі қарапайым қозғалыстардың, атап айтқанда: ілгерілмелі және айналмалы қозғалыстардың көмегімен ауыстырып көрейік. Ол үшін, фигураны ілгерілмелі қозғалыспен жылжыта отырып, A_1 нүктесін A_2 нүктесіне алып келеміз. Бұл кезде аталған фигура II' орнына келіп орналасады, ал A_1B_1 түзуі A_2B' орнына ие болады. Осыдан кейін, фигураны A_2 нүктесі арқылы φ_A бұрышына сағат тілінің бағытымен бұрамыз. Бұл кезде A_2B' түзуі A_2B_2 орнына ие болады, ал фигураның өзі II орнына келеді. Сонымен, фигураны алдымен ілгерілмелі қозғалыспен жылжыттық, содан кейін айналмалы қозғалысты пайдаландық. Айта кететін жағдай, ілгерілмелі қозғалысты анықтайтын және айналу нүктесі болып табылатын A_1 нүктесі – *полюс* деп аталады. Сонымен қатар фигураның ілгерілмелі қозғалысы қай нүктені полюс етіп алуға тәуелді болады да, ал айналу қозғалысы полюске тәуелді болмайтынын; мұндай орын ауыстыруды керісінше де іске асыруға болатынын, яғни фигураны алдымен айналмалы қозғалыспен жылжытып, содан кейін ілгерілмелі қозғалысты пайдалануға болатынын айта кеткен артық болмайды.

Қорытынды:

1) жазық фигураның өз жазықтығындағы кез келген орын ауыстыруын: полюске тәуелді ілгерілмелі және полюске тәуелсіз айналмалы қозғалыстардан тұратын күрделі қозғалыс ретінде қарастыруға болады;

2) фигураның уақыттың әр кезеңіндегі қозғалысын, оның полюспен бірге ілгерілмелі және осы полюсті айнала қозғалатын қозғалыстардан тұратын күрделі қозғалыс ретінде қарастыруға болады.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

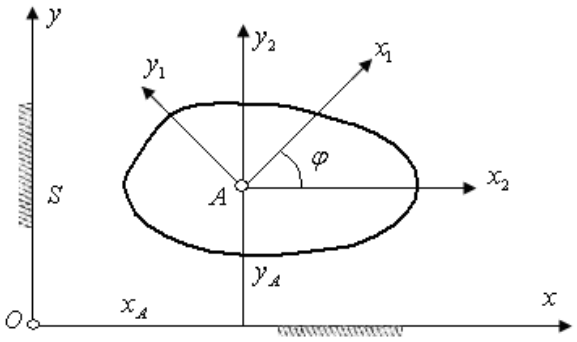
§3. Жазық фигураның қозғалысының теңдеуі

Берілген S фигурасының (*29-сурет*) жазықтығында жататын координаталар жүйесін аламыз, олар:

- негізгі жүйе Oxy;

- қозғалмалы жүйе Ax_1y_1, осы жүйенің координаталар басын - A полюс ретінде қабылдаймыз;

- фигурамен бір байланыстағы қозғалмалы жүйе Ax_2y_2. Бұл жүйенің осьтері Ox және Oy параллель және негізгі жүйеге қарағанда ілгерілмелі қозғалыста болады.



29-сурет

Фигураның Oxy жүйесіне қатысты орны, яғни берілген жазықтықтағы орны, қозғалмалы жүйе Ax_1y_1 жүйесінің орны арқылы анықталады. Қозғалмалы жүйенің қозғалмайтын жүйеге қатысты орнын анықтау үшін, полюстің координаталарын (x_A, y_A) және Ax_2 мен Ax_1 осьтерінің арасындағы бұрыш (φ) берілу керек. Қозғалыс кезінде бұл шамалар өзгеріп отырады. Осылардың (x_A, y_A, φ) уақытқа тәуелді түрде өзгеру заңдарын біле отырып, олардың шамаларын табуға болады, демек фигураның қозғалысын жете түсінуге болады.

Сонымен, жазық фигураның қозғалысын анықтайтын, келесі теңдеулер

$$x_A = f_1(t),\ y_A = f_2(t),\ \varphi = f_3(t). \qquad (42)$$

жазық фигураның өз жазықтығындағы қозғалысының теңдеуі деп аталады, сонымен қатар фигураның қозғалысы дененің жазық қозғалысын анықтайтын болғандықтан, аталған теңдеулер *қатты дененің жазық қозғалысының теңдеуі* деп те аталады.

Алғашқы екі теңдеулер ($x_A = f_1(t)$, $y_A = f_2(t)$) қозғалыстың ілгерілмелі бөлігін анықтаса, ал үшінші теңдеу ($y_A = f_2(t)$) – қозғалыстың айналу бөлігін көрсетеді. Қозғалыстың ілгерілмелі бөлігі полюске тәуелді болғандықтан, алдыңғы екі теңдеулер полюсті таңдауға байланысты әртүрлі

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

болып келеді. Бұрылу бұрышы (φ) полюске тәуелді болмағандықтан, үшінші теңдеу барлық полюстер үшін тұрақты болады.

Анықтамалар:

1) «A» нүктесінің жылдамдығы $\vec{v}_A$ мен үдеуі $\vec{a}_A$ *полюстің жылдамдығы* мен *үдеуі* деп аталады, ал бұлар әр полюс үшін әртүрлі келеді.

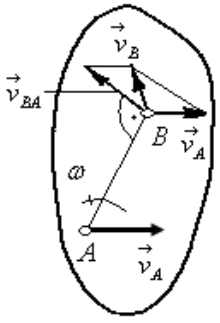
2) Фигураның (S) полюс арқылы айналуының бұрыштық жылдамдығы ($\omega = \frac{d\varphi}{dt}$) мен бұрыштық үдеуі ($\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$) *фигураның бұрыштық жылдамдығы* мен *бұрыштық үдеуі* деп аталады. ал бұлар әр полюс үшін әртүрлі болады. Бұрылу бұрышы (φ) полюске тәуелді болмағандықтан, ω және ε полюске тәуелді болмайды.

III тарауға сүйене отырып, фигураның тасымал қозғалысы ретінде оның ілгерілмелі қозғалатын Ax_2y_2 координаттар жүйесімен (бұл жүйенің координаттар басы A полюсінде жатады) қозғалысын, ал салыстырмалы қозғалысы ретінде оның A полюсіне қатысты айналуын қабылдаймыз.

§4. Жазық фигураның нүктелерінің жылдамдығы

Егер жазық фигураның бұрыштық жылдамдығы және оның бір нүктесінің жылдамдығы белгілі болса, онда фигураның кез келген нүктесінің жылдамдығын табуға болады.

Суретте көрсетілген фигураның A нүктесінің жылдамдығы (v_A) және осы фигураның бұрыштық жылдамдығы (ω) берілсін (*30-сурет*).



30-сурет

Фигураның қозғалысын тасымал (полюспен бірге ілгерілмелі) және салыстырмалы (полюс арқылы айналу) қозғалыстардан тұратын күрделі қозғалыс ретінде қарастырамыз. Полюс ретінде A нүктесін аламыз. Кез келген B нүктесінің абсолют жылдамдығы ($\vec{v}_B$) тасымал және салыстырмалы жылдамдықтардың геометриялық қосындысына тең болады (жылдамдықтарды қосу теорамасы).

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

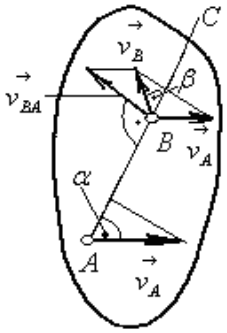
Тасымал жылдамдығы ілгерілмелі қозғалыс болғандықтан, B нүктесінің тасымал жылдамдығы полюстің жылдамдығына ($\vec{v}_A$) тең болады. Фигураның полюс арқылы айналуы, оның салыстырмалы жылдамдығы болып табылады, яғни B нүктесінің салыстырмалы жылдамдығы A полюсын айналу жылдамдығына тең болады; оны $\vec{v}_{BA}$ арқылы белгілейміз, бұл жылдамдық фигураның айналу бағытына сәйкес келеді, ал оның модулі $v_{BA} = \omega \cdot AB$. Сонымен:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} . \qquad (43)$$

<u>Қорытынды</u>: жазық фигураның кез келген нүктесінің жылдамдығы екі жылдамдықтардың, атап айтқанда, полюстің жылдамдығы мен салыстырмалы жылдамдықтың қосындысына тең болады.

Тақырып соңында келесі теореманы дәлелдейік. Бұл теореманың көмегімен, көпшілік жағдайда, жазық фигураның нүктелерінің жылдамдықтары жеңіл табылады.

Теорема. *Жазық фигураның екі нүктесінің жылдамдықтарының осы нүктелер арқылы өтетін оське проекциялары бағыттас болса, онда олар өзара тең болады.*



31-сурет

Теореманы дәлелдеу үшін *43-формуланы* пайдаланамыз. Фигураның екі нүктелерінің (A және B нүктелері) жылдамдықтары берілсін, олар: $\vec{v}_A$ мен $\vec{v}_B$ (*31-сурет*).

Аталған жылдамдықтардың AC түзуіне проекциялары өзара тең екенін дәлелдеу керек болсын. Полюс ретінде A нүктесін қабылдаймыз. Бұл кезде B нүктесінің жылдамдығы – $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, ал $\vec{v}_{BA}$ – AC түзуіне перпендикуляр. Осы теңдіктің екі бөлігінде AC түзуіне проекциялаймыз, сонда

$$(\vec{v}_B)_{AB} = (\vec{v}_A)_{AB} + (\vec{v}_{BA})_{AB} .$$

Бұл теңдіктегі $(\vec{v}_{BA})_{AB} = 0$ болғандықтан: $(\vec{v}_B)_{AB} = (\vec{v}_A)_{AB}$, демек,

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha \,. \qquad (44)$$

§5. Жылдамдықтың лездік центрі

Өткен параграфта келтірілген формулалардың (43, 44) көмегімен жазық фигураның кез келген нүктелерінің жылдамдықтарын анықтауға болады, бірақ кинематикада бұдан басқа тәсіл жиі қолданылады. Ол тәсіл жылдамдықтардың *лездік центрі* түсінігіне байланысты. Осыған байланысты, алдымен келесі теореманы дәлелдеп алайық.

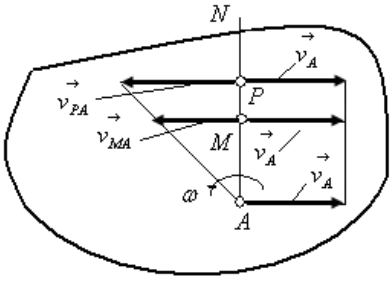
Теорема. *Жазық фигураның өз жазықтығындағы ілгерілмелі емес қозғалысы кезінде, фигураның тек жалғыз бір нүктесінің ғана дәл осы уақыт сәтіндегі – кезеңіндегі жылдамдығы нөлге тең болады.*

Фигураның A нүктесінің жылдамдығы $\vec{v}_A$ және фигураның бұрыштық жылдамдығы ω берілсін. Полюс ретінде A нүктесін қабылдаймыз.

Полюс (A) арқылы, $\vec{v}_A$ жылдамдығының бағытына перпендикуляр AN түзуін жүргіземіз (*32-сурет*).

Осы түзудің бойындағы, полюстан басқа кез келген нүктенің (M) абсолют жылдамдығы екі жылдамдықтан: барлық нүктеге бірдей $\vec{v}_A$ жылдамдығынан және полюс арқылы айналу жылдамдығынан ($\vec{v}_{MA}$) тұрады. Айналу жылдамдығы $\vec{v}_{MA}$ - фигураның полюс арқылы айналуымен бағыттас және AM түзуіне перпендикуляр, оның модулі:

$$v_{MA} = \omega \cdot AM \,. \qquad (45)$$



32-сурет

Сонымен қатар AN жарты түзуінің бойынан, айналу жылдамдығы $\vec{v}_{PA}$ модулі бойынша полюстың жылдамдығына тең және оған қарама-қарсы бағытталған, бір нүктенің, мысалы, P нүктесінің табылатыны сөзсіз. Бұл нүктенің полюстан арақашықтығын $v_A = v_{PA} = \omega \cdot AP$ теңдігінен табамыз:

$$AP = \frac{v_A}{\omega} \,. \qquad (46)$$

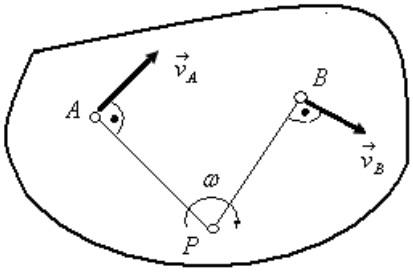
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Жылдамдықтарды: $\vec{v}_A$ және $\vec{v}_{PA}$ өзара қосып, P нүктесінің абсолют жылдамдығының нөлге тең екенін көреміз, демек, теорема дәлелденді (Қарастырылған фигураға қатаң бекітілген және сол фигурамен бірге қозғалыстағы жазықтықтың тек жалғыз бір нүктесі үшін де бұл теорема заңды болып табылады).

Анықтама: Жазық фигураның, осы уақыт кезеңіндегі жылдамдығы нөлге тең P нүктесі – жылдамдықтардың лездік центрі деп аталады. Бұл нүкте кейде – *айналудың лездік центрі* деп аталады (*32 а-сурет*).

Егер фигураның лездік центрін полюс ретінде қабылдасақ, онда *43-формуладағы* $\vec{v}_P$ нөлге тең болады, демек,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BP}\ . \tag{47}$$



33 а-сурет

Соңғы теңдіктен шығатын қорытынды: фигура өз жазықтығында қозғалған кезде, оның кез келген нүктесінің жылдамдығы – сәйкес нүктенің *жылдамдықтардың лездік центрін* айналу жылдамдығы болып табылады.

Соңғы *32а-суретінде* A нүктесінің жылдамдығының $(\vec{v}_A)$ шамасы – $\omega \cdot AP$ мәніне тең, ал B нүктесінің жылдамдығының $(\vec{v}_B)$ шамасы $\omega \cdot BP$ – мәніне тең,

Олар PA және PB кесінділеріне перпендикуляр болып бағытталған, яғни: $\vec{v}_A \perp PA$ және $\vec{v}_B \perp PB$. Бұл жердегі v_A-ны v_b-ға бөлсек,

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB}\ . \tag{48}$$

Сонымен, *фигура нүктелерінің жылдамдықтар, уақыттың әр мезгілінде, осы нүктелердің жылдамдықтардың лездік центрінен арақашықтықтарына пропорционал болады*.

Жылдамдықтың лездік центрін анықтаудың дербес түрлері

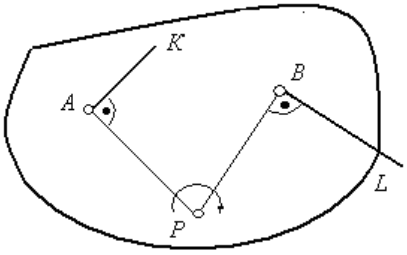
1) Егер кез келген нүктенің, мысалы, A нүктесінің жылдамдығы $\bar{v}_A$ және фигураның бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}$ берілсе, онда жылдамдықтардың

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

лездік центрі – жылдамдықтардың лездік центрі болатыны дәлелденген теорема негізінде табылады (*32-сурет*). Ол үшін, $\bar{v}_A$ жылдамдығы бағытталған түзуді A нүктесі арқылы, фигураның айналу бағытына сәйкес тік бұрышқа бұрып, содан кейін, аталған түзудің бойына $AP = \frac{v_A}{\omega}$ кесіндісін түсіру керек. Осы кездегі P нүктесі жылдамдықтардың лездік центрі болып табылады.

2) Егер фигураның екі нүктесі жылдамдықтарының бағыттары белгілі болса, онда фигураның жылдамдықтардың лездік центрін табу ешқандай қиындық көрсетпейді.

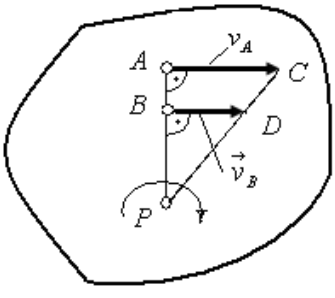
Фигураның A және B нүктелерінің жылдамдықтарының бағыттары (AK және BL) берілген болсын (*33 ә-суреті*).



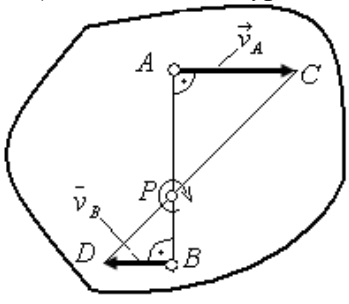
32 ә-суреті

Жылдамдықтардың лездік центрінің орны олардың жылдамдықтарына түсірілген A және B нүктелерін басып өтетін перпендикулярлардың, сәйкес жылдамдықтармен қиылысатын нүктелері болып табылады. Өйткені A және B нүктелерінің жылдамдықтары айналу радиустарына (PA және PB) перпендикуляр бағытталған.

3) Кейбір ерекше жағдайларда, мысалы, A және B нүктелерінің жылдамдықтары өзара параллель және AB кесіндісіне перпендикуляр болған жағдайда, жылдамдықтардың лездік центрінің орнын анықтау үшін фигураның екі нүктелерінің жылдамдықтарының бағыттары ғана беріліп қоймай, оның үстіне, олардың сан шамалары да берілу керек (*33 б және 33 в-суреттер*).



33 б-сурет

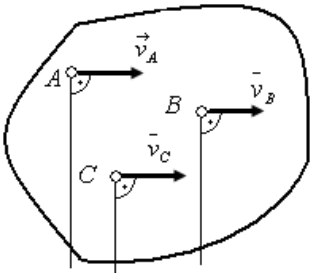


33 в-сурет

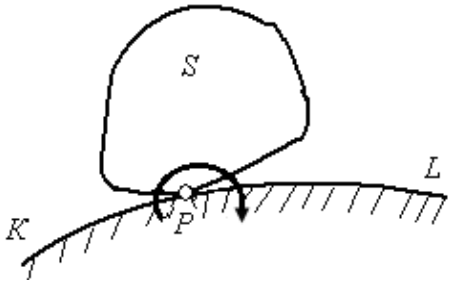
САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Бұл кезде, жылдамдықтардың лездік центрі $A\,B$ сызығының P нүктесінде жатады, ал P нүктесінен A және B нүктелеріне дейінгі арақашықтар $\dfrac{v_A}{v_B}=\dfrac{PA}{PB}$ қатынасын қанағаттандырады.

4) Егер A және B нүктелерінің жылдамдықтары белгілі бір уақыт кезеңінде өзара параллель болып, екеуі де бір жаққа бағытталса және $A\,B$ сызығына перпендикуляр болмаса (*33 г-сурет*), онда аталған перпендикулярлар осы жылдамдықтармен қиылыспайды. Мұның өзі, жылдамдықтардың лездік центрі болмайтынын көрсетеді.



33 г-сурет



33 ғ-сурет

Бұл жағдайда, фигураның барлық нүктелерінің осы уақыт кезеңіндегі жылдамдықтары бір-біріне тең болады, яғни

$$\vec{v}_A=\vec{v}_B=\vec{v}_C=\cdots$$

Бұл кезде, нүктелердің үдеулері бір-біріне тең болмайды. Фигураның мұндай қозғалысын кейде, шартты түрде, лездік ілгерілмелі деп атайды.

5) Жазық фигураның тәжірибеде жиі кездесетін қозғалыстарының бір түрі: кез келген қозғалмайтын қисықтың бетімен сырғанамай домалайтын домалақ дене (мысалы, вагонның дөңгелегінің рельс бойымен сырғанамай дөңгелеуі). Бұл кезде S фигурасы жылдамдықтарының лездік центрі болып, осы дененің сыртқы беттінің қозғалмайтын KL сызығымен жанасу нүктесі табылады (33 ғ-суреті). Өйткені фигура сырғанамай тербелетін болғандықтан, оның жанасу нүктесінің (P) жылдамдығы нөлге тең болады, демек, осы нүкте фигураның жылдамдықтарының лездік центрі болып табылады.

Ескерту. Жазық фигураның өз жазықтығындағы әр уақыт кезіндегі қозғалысын, оның жылдамдықтардың лездік центрін айнала қозғалысы ретінде қарастыруға болады. Ал дененің қозғалмайтын жазықтыққа параллель қозғалысын, оның қозғалмайтын жазықтыққа перпендикуляр және жылдамдықтардың лездік центрі арқылы өтетін осьті айналуы ретінде қарастыруға болады. Бұл ось *жылдамдықтардың лездік осі* деп аталады.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Дененің толассыз қозғалысы кезінде мұндай осьтер шексіз көп болады. Олар қозғалыстағы дененің бойында және қозғалмайтын жазықтықта да жатады. Жылдамдықтардың лездік осінің геометриялық орны қозғалмайтын және қозғалмалы аксоидтар (грек тілінде: *«аксон» – ось, «одос» – жол*) деп аталады, ал олар цилиндрлік беттер болып табылады.

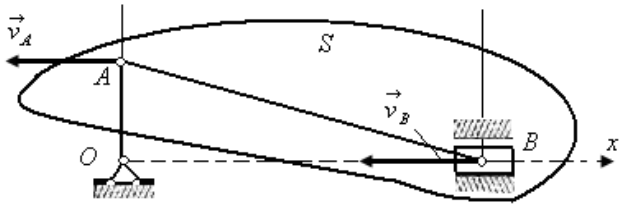
§6. Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын анықтау

1-есеп. Иінтіректі-бұлғақты (кривошип-шатунды) механизмінің иінтірегінің (кривошипінің) ұзындығы $OA = r = 10\ см$.

Иінтірек бірқалыпты айнала отырып, минутына 600 айналым жасайды, яғни $n = 600\ айн/мин$.

Иінтірек Ox осіне перпендикуляр болып орналасқан кезіне сәйкес, сырғақтың (ползунның) B жылдамдығын анықтау керек.

Механизмнің AB бұлғағына S фигурасын бекіткеннен кейін, оның қозғалысын қарастырайық (*34-сурет*). A нүктесінің жылдамдығы мен бағытын анықтауға болады.



34-сурет

Сонымен қатар B нүктесі жылдамдығының бағыты да белгілі. Суретте көрсетілгендей, $\vec{v}_B$ және $\vec{v}_A$ жылдамдықтарының бағыттарына перпендикулярлар тұрғызып, олардың өзара параллель екенін көреміз, демек, жылдамдықтардың лездік центрі болмайды.

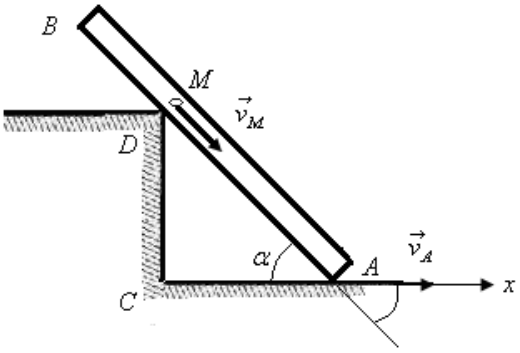
Сондықтан бұлғақтың барлық нүктелерінің жылдамдықтары, геометриялық тұрғыдан, өзара тең болады, яғни $\vec{v}_B = \vec{v}_A$. Егер $v_A = r \cdot \omega$, ал $\omega_д = \dfrac{\pi \cdot n}{30} = 20 \cdot \pi$ екенін ескерсек, онда: $v_A = v_B = 6{,}28\ \ м/с$. Сонымен, бұлғақтың барлық нүктелерінің жылдамдықтары бірдей, ал үдеулері, әрине, бірдей емес (*Фигураның жылдамдықтарын лездік центрінің* көмегінсіз, *43-және 44-формулаларды пайдаланып та табуға болады*).

2-есеп. Түзу сызықты сырық AB баспалдаққа көлбеу орналасқан, ол өзінің бір нүктесімен баспалдақтың D нүктесіне тіреліп, ал A шетімен Cx осінің бойымен көлденең бағытта сырғанайды (*35-сурет*).

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Берілім бойынша A нүктесінің жылдамдығы тұрақты және $v_A = 4\ \ м/с$. Сырық пен көлденең Cx осінің арасындағы бұрыш $\alpha = 45^0$ болған кездегі сырықтың M нүктесінің жылдамдығын табу керек.

Бізге A нүктесінің жылдамдығы берілген, ал M нүктесінің жылдамдығының бағыты қарастырылып отырған кезеңде сырықтың бағытына сәйкес. A және M нүктелері жылдамдықтарының MA түзуіне проекциялары өзара тең (*44-формуласының* негізінде).



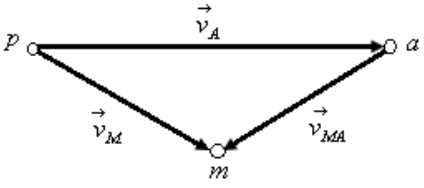
35-сурет

Бірақ, $\vec{v}_M$ жылдамдығының MA түзуіне проекциясы v_M шамасына тең, ал $\vec{v}_A$ жылдамдығының MA түзуіне проекциясы $v_A \cos\alpha$ шамасына тең. Сондықтан:

$$v_M = v_A \cos\alpha = 2{,}83\ \ м/с\,.$$

Енді $\vec{v}_M$ шамасын графикалық жолмен анықтайық. Ол үшін, полюс ретінде A нүктесін қабылдаймыз, сол кезде: $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$. Бұл теңдіктегі $\vec{v}_{MA}$ MA түзуіне перпендикуляр.

Кез келген P нүктесі арқылы белгілі бір масштабпен $\vec{v}_A$ жылдамдығын тұрғызамыз (*36-сурет*).



36-сурет

Енді $\vec{pa} = \vec{v}_A$ векторының оң жақ шетінен MA түзуіне перпендикуляр $\vec{am}$ сызығын жүргіземіз. Содан кейін, $\vec{pa} = \vec{v}_A$ векторының сол жақ шетінен

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$\vec{v}_M$ бағытына параллель $\vec{pm}$ сызығын жүргіземіз. Жүргізілген сызықтардың ($\vec{am}$ және $\vec{pm}$) қиылысу нүктесі (m) $\vec{v}_M$ жылдамдығының шеткі нүктесін көрсетеді, яғни $\vec{pm} = \vec{v}_M$. Ал вектор $\vec{am}$ дегеніміз $\vec{v}_{MA}$ жылдамдығын көрсетеді. Соңғы суретте көрсетілген $\vec{am}$ және $\vec{pm}$ сызықтарын өлшеп, жылдамдықтардың мәндерін анықтаймыз, олар:

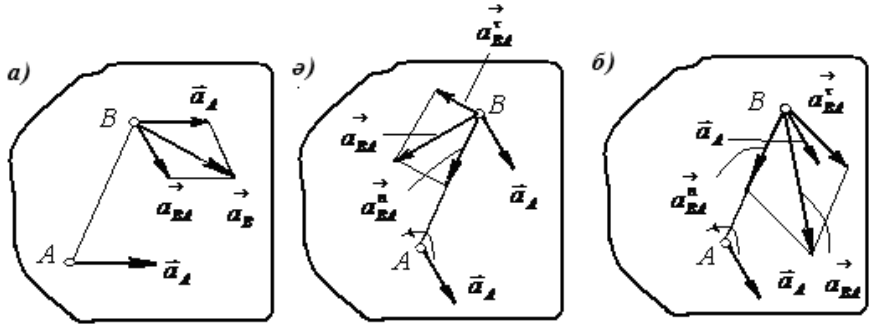
$$v_M = 2{,}83 \ м/с,$$

$$v_{MA} = 2{,}83 \ м/с.$$

Жылдамдықтар диаграммасы (36-сурет) *жылдамдықтар планы* (*сызбасы*) деп аталады.

§7. Жазық фигураның нүктелерінің үдеулері

Жазық фигура нүктелерінің үдеуін оның жылдамдықтары секілді, қозғалысты тасымалдау (полюспен бірге ілгерілмелі) және салыстырмалы (полюсті айнала қозғалу) қозғалыстардан тұратын құрама қозғалыс ретінде қарастыру арқылы анықтауға болады. Егер жазық фигураның A нүктесінің белгілі бір уақыт кезеңіне сәйкес үдеуі ($\vec{a}_A$), оның бұрыштық жылдамдығы (ω) және бұрыштық үдеуі (ε) белгілі болса, онда фигураның кез келген нүктесінің үдеуін табуға болады.



37-сурет

Полюс ретінде A нүктесін алып (*37 а-сурет*), фигураның кез келген B нүктесінің үдеуін $\vec{a}_A$ табамыз. Фигураның тасымалдау қозғалысы үдеуі бар ілгерілмелі қозғалыс болғандықтан, үдеулерді қосу теорамасы негізінде келесі тұжырым заңды болып табылады: *жазық фигураның кез келген нүктесінің үдеуі полюс үдеуіне тең болатын тасымал үдеуі мен оның фигурамен бірге, полюсті айналу қозғалысындағы салыстырмалы үдеуінің геометриялық қосындысына тең болады*, яғни

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \qquad (49)$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Бұл теңдіктегі $\vec{a}_{BA}$ – нүктенің фигурамен бірге, полюсті айналу қозғалысындағы салыстырмалы үдеуі. Бұл үдеуді екі үдеуге жіктеуге болады, олар: BA сызығы бойымен полюске бағытталған центргетартқыш үдеуі ($\vec{a}^{n}_{BA}$) және BA сызығына перпендикуляр бағытталған айналу үдеуі ($\vec{a}^{\tau}_{BA}$). Осыған байланысты, *49-формуланы*

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA} \qquad (50)$$

түрінде көрсетуге болады.

Бұлардың сандық мәндерін белгілі формулалар арқылы анықтауға болады:

$$a^{n}_{BA} = AB \cdot \omega^2 ,\ a^{\tau}_{BA} = AB \cdot \varepsilon ,\ \ a_{BA} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} .$$

Ескертулер:

- $\vec{a}^{n}_{BA}$ және $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ үдеулерін B нүктесінің абсолют қозғалысындағы тік және жанама үдеулерімен шатастырып алмау керек. Бұлар – нүктенің фигурамен бірге, полюсті айнала қозғалысындағы салыстырмалы үдеуінің құраушылары.

- егер фигура полюсті үдемелеп айналса, онда $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ бағыты айналу бағытына сәйкес (*37 ә-сурет*); егер фигура полюсті бәсеңдеп айналса, онда $\vec{a}^{\tau}_{BA}$ бағыты айналу бағытына қарсы болады (*37 б-сурет*);

- полюс A бірқалыпсыз және қисық сызық бойымен қозғалған кезде, көп жағдайда, үдеудің (a_A) орнына оның тік және жанама құраушыларын алады. Бұл уақытта:

$$\vec{a}_B = \vec{a}^{n}_{A} + \vec{a}^{\tau}_{A} + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA} . \qquad (50а)$$

§8. Үдеудің лездік центрі

Өзінің жазығында қозғалып келе жатқан, әр уақыт кезеңінде ω және ε шамалары бір уақытта нөлге тең болмайтын жазық фигура үшін, сәйкес уақыт кезеңінде үдеуі нөлге тең бір нүкте болады. Осы нүкте – *үдеулердің лездік центрі* деп аталады.

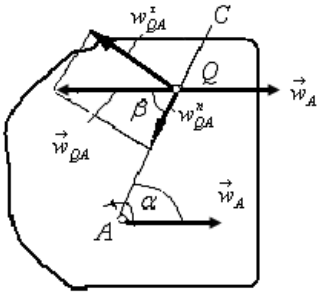
Келтірілген тұжырымдаманы дәлелдейік. Ол үшін, бұрыштық жылдамдығы (ω) мен бұрыштық үдеуі (ε) белгілі фигураның A нүктесінің үдеуі ($\vec{a}_A$) берілсін (*38-сурет*).

Полюс ретінде A нүктесін қабылдап, $\vec{a}_A$ векторымен α бұрышын құрайтын AC түзуін жүргізейік. Бұл бұрыштың өрнегі:

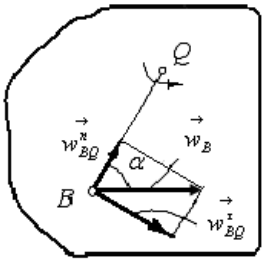
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\alpha = arctg\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (51)$$

Егер фигура полюсті үдемелеп айналса, онда α бұрышын $\vec{a}_A$ векторынан бастап фигураның айналуына бағыттас етіп орналастырамыз (*38-сурет*), ал егер фигура полюсті бәсеңдеп айналса, онда α бұрышын $\vec{a}_A$ векторынан бастап фигураның айналуына бағытына қарсы орналастырамыз.



38-сурет



39-сурет

Фигураның полюсті үдемелеп айналуын (ω, ε – таңбалары бірдей) қарастырамыз. AC түзуіне ұзындығы

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \qquad (52)$$

кесіндісін жүргізейік. *38-суреттен* $tg\beta = \frac{a^{\tau}_{QA}}{a^{n}_{QA}} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ екенін көреміз, яғни $\beta = \alpha$ және $\vec{a}_{QA}$ үдеуі $\vec{a}_A$ үдеуіне қарама-қарсы бағытталған. Сонымен:

$$a_{QA} = \sqrt{(a^n_{QA})^2 + (a^{\tau}_{QA})^2} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Соңғы теңдіктегі QA-ның орнына 52-ші өрнектегі мәнін қойсақ: $a_{QA} = a_A$. Демек, *38-суреттегі Q-нүктесі үдеулердің лездік центрі болып табылады*.

Егер полюс ретінде үдеулердің лездік центрі алынса, онда фигураның кез келген нүктесінің үдеуі оның фигурамен бірге үдеулердің лездік центрін айнала қозғалысының үдеуіне тең болады (*39-сурет*).

Үдеулердің лездік центрін (Q) полюс ретінде қабылдап, *50-формуланы* қайталап жазайық: $\vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{a}^{n}_{BQ} + \vec{a}^{\tau}_{BQ}$, бірақ $\vec{a}_Q = 0$ болғандықтан:

$$\vec{a}_B = \vec{a}^{n}_{BQ} + \vec{a}^{\tau}_{BQ}. \qquad (53)$$

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Бұл формуладағы

$$\vec{a}^{\,n}_{BQ} = QB \cdot \omega^2 \qquad (54)$$

және

$$\vec{a}^{\,\tau}_{BQ} = QB \cdot |\varepsilon| . \qquad (55)$$

Соңғы өрнектерді 53-ке қойсақ,

$$a_B = QB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} . \qquad (56)$$

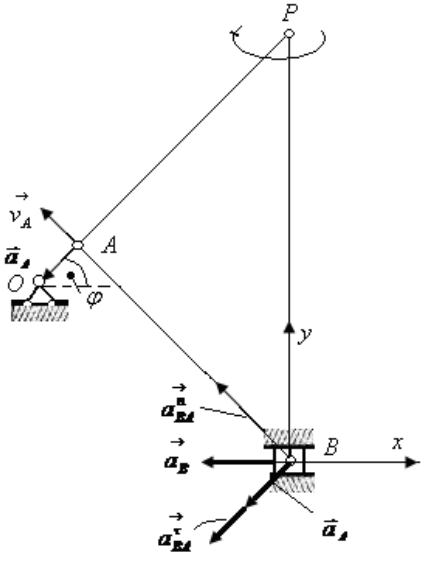
- $\vec{a}^{\,n}_{BA}$ және $\vec{a}^{\,\tau}_{BA}$ үдеулерін B нүктесінің абсолют қозғалысындағы тік және жанама үдеулерімен шатастырып алмау керек. Бұлар – нүктенің фигурамен бірге, полюсті айналу қозғалысындағы салыстырмалы үдеуінің құраушылары.

§9. Жазық фигура нүктелерінің үдеулерін анықтау есептері

1-есеп. Дезаксиалды (орталық емес) иінтірек механизмінің OA иінтірегі бірқалыпты айналып, AB бұлғағын іске (қозғалысқа) қосады (*40-сурет*).

Оның бұрыштық жылдамдығы 300 *айн / мин* сәйкес. Иінтірек пен бұлғақ өзара перпендикуляр және $\varphi = 45^0$ болған уақыттағы B жылшығышының үдеуін табу керек. Берілімдер: $OA = 10$ *см*, $AB = 60$ *см*, $n = 300$ айн/мин.

Механизмнің қозғалыс басталғаннан кейін бір секунд өткен соң жазықтықтағы орны *40-суретте* көрсетілген. Полюс ретінде A нүктесін қабылдап, шатунның (AB) қозғалысын қарастырайық. Полюстің жылдамдығы мен үдеуі оңай табылады, өйткені олар иінтіректің шеткі нүктесінің жылдамдығы мен үдеуіне тең болады.



40-сурет

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Белгілі формулаларды пайдаланып, келесі шамаларды анықтаймыз:

- иінтіректің бұрыштық жылдамдығы $\omega_{OA} = \frac{\pi \cdot n}{30} = 12\pi \ 1/cek$,

- жылдамдығы $v_A = OA \cdot \omega_{OA} = 3{,}77 \ м/с$,

- үдеуі $a = OA \cdot \omega_{OA}^2 = 142 \ м/с^2$.

Енді бұлғақтың бұрыштық жылдамдығын (ω_{AB}) табуға болады. Суреттен көрініп тұрғандай, механизмнің жазықтықтағы орнына сәйкес, AB бұлғағының жылдамдықтарының лездік центрі болып P нүктесі анықталады. Сондықтан: $\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = 6{,}28 \ 1/cek$ ($AP = AB = 60см$), $a_{BA}^n = AB \times \omega_{AB}^2 = 23{,}66 \ м/с^2$.

Келтірілген суретте $\vec{a}_{BA}^{\tau}$, $\vec{a}_{BA}^{n}$, $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ шамаларының бағыттары көрсетілген. Бірақ $\vec{a}_{BA}^{n}$ және $\vec{a}_A$ шамаларының бағыттары белгілі болғанмен, $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ және $\vec{a}_B$ шамаларының бағыттары белгісіз, өйткені айналу үдеуі $\vec{w}_{BA}^{\tau}$ AB бұлғағына перпендикуляр болғанмен, оның қай жаққа айналдыратыны белгсіз. Сол секілді, $\vec{a}_B$ үдеуі горизонталь бағытталғанмен, қай жаққа (оңға немесе солға) бағытталғаны белгісіз. Сондықтан олардың бағыттары үзбе сызықпен көрсетілген.

Үдеулерді анықтау үшін белгілі теңдікті ($\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau}$) By осіне проекциялайық. Сонда:

$$0 = a_{BA}^n \cos 45^0 - a_A^n \cos 45^0 - a_{BA}^{\tau} \cos 45^0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{BA}^{\tau} = \vec{a}_{BA}^{n} - \vec{a}_A = -118{,}34 \ м/с^2.$$

Алынған $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ шамасының минус таңбасы, оның нағыз бағыты 40-суретте көрсетілген бағытқа қарама-қарсы екенін көрсетеді.

Фигураның лездік бұрыштық үдеуінің модулі:

$$|\varepsilon_{AB}| = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = 197{,}23 \ 1/cek.$$

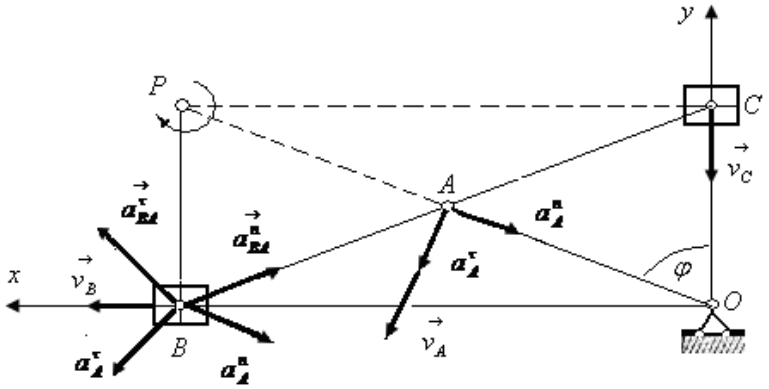
$\vec{w}_B$ - анықтау үшін белгілі теңдікті ($\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{BA}^{n} + \vec{w}_{BA}^{\tau}$) Bx осіне проекциялайық. Сонда:

$$a_B = -a_{BA}^n \cos 45^0 - a_A \cos 45^0 - a_{BA}^{\tau} \cos 45^0 \quad \Rightarrow \quad a_B = -36{,}18 \ м/с^2.$$

Бұл жердегі минус таңбасы жылжығыш үдеуінің сол жаққа бағытталғанын көрсетеді.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

2-есеп. Механизмінің OA иінтірегі O осі арқылы тұрақты үдеумен ($\varepsilon = 2\ 1/c^2$) айналып, эллипсографтың сызғышын (BC) қозғалысқа келтіреді (*41-сурет*).



41-сурет

Егер қозғалыс басталардың алдында иінтірек тік орналасқан болса, онда қозғалыс басталғаннан кейін бір секунд өткен соң B жылжығышының үдеуі нешеге тең болады? Берілімдер:

$$OA = BA = AC = r = 10\ см\ .$$

Қозғалыс басталғаннан кейін бір секунд өткен соң иінтірек $\varphi = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} = 1$ радиан бұрышына бұрылады, ал механизм *41-суретте* көрсетілген қалыпқа келеді. Полюс ретінде A нүктесін алып, BC сызғышының жазық қозғалысын қарастырайық. Уақыт $t = 1 \cdots c$ кезінде – $\omega_{OA} = \varepsilon \cdot t = 2\frac{1}{c}$, сондықтан жылдамдық: $v_A = r \cdot \omega_{OA} = 2 \cdot 10 = 20\ см/с$. A нүктесінің үдеуін екі үдеудің, яғни: $a_A^n = r \cdot \omega_{OA}^2 = 40\ см/с^2$ және $a_A^\tau = r \cdot \varepsilon_{OA} = 20\ см/с^2$ үдеулерінің қосындысы ретінде қарастырамыз.

Енді BC сызғышының лездік бұрыштық жылдамдығын табайық. Ол үшін, $\vec{v}_B$ және $\vec{v}_A$ жылдамдықтарына перпендикуляр жүргізіп, P нүктесін табамыз. Осы нүкте сызғыштың жылдамдықтарының лездік центрі болып табылады. Сондықтан $\omega_{BC} = \frac{v_A}{PA}$, ал $PA = OA = r$ болғандықтан $\omega_{BC} = \frac{v_A}{r}$. Уақыт $t = 1c$ кезінде: $\omega_{BC} = 2\frac{1}{c}$.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY