СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

ДӘРІС № 12

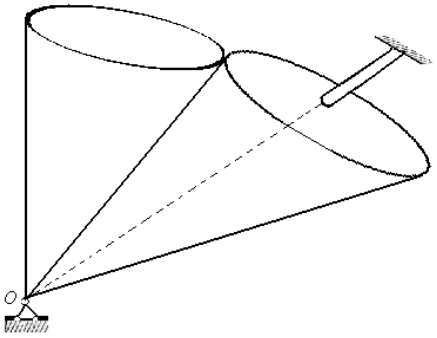
ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ СФЕРАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

5-*тарау.* ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ СФЕРАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Бір нүктесі қозғалмайтын қатты дененің қозғалысын қарастырайық. Төбелері бір-бірімен сфералық топсамен өзара бекітілген конустардың біреуі қозғалмайтын болсын (*42-сурет*).

Осы қозғалмайтын конустың бетімен қозғалатын екінші конустың қозғалысын мысал ретінде қарастыруға болады. Бұл кезде, қозғалыстағы дененің әр нүктесі қозғалмайтын нүктеден (O) тұрақты арақашықтықта болады, сондықтан қозғалыстағы дененің барлық нүктелері центрі қозғалмайтын нүктедегі сфералық жазықтықта қозғалады.

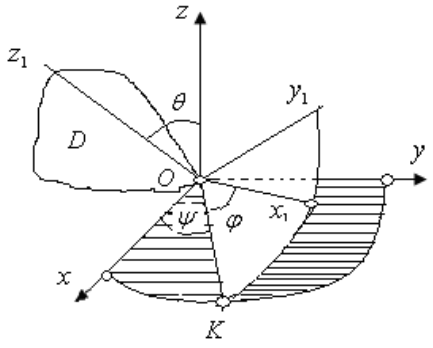


42-сурет

Дененің мұндай қозғалысы *сфералық қозғалыс* немесе *қатты дененің қозғалмайтын нүктені айнала қозғалысы* деп аталады.

§1. Эйлер бұрышы. Қатты дененің сфералық қозғалысының теңдеуі

Бір нүктесі қозғалмайтын қатты дененің орнын анықтау үшін: қозғалмайтын жүйе $Oxyz$ және қарастырылып отырған денеге (D) қатаң бекітілген жүйе $Ox_1y_1z_1$ координаттар жүйесін пайдаланамыз. Бұл координат жүйелерінің бастары болып D денесінің қозғалмайтын O нүктесі қабылданған (*43-сурет*).



43-сурет

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Қатты дененің әр уақыт кезеңіне сәйкес орнын қозғалмайтын жүйенің орнымен салыстыра қарасақ, онда бұл дененің орны қозғалмалы жүйенің орнымен толық түрде анықталады. Ал қозғалмалы жүйенің қозғалмайтын жүйеге қатысты орны белгілі бір бұрыштармен анықталады. Ондай бұрыштардың саны тоғыз. Бұл бұрыштардың үшеуі ғана тәуелсіз бұрыштар, ал қалған алтауын осы тәуелсіз бұрыштар арқылы өрнектеу арқылы табуға болады. Бірақ алты бұрыштарды тәуелсіз бұрыштар арқылы анықтау әдетте, көп қиындық келтіреді, сондықтан қозғалмайтын бір ғана нүктесі бар қатты дененің орнын анықтау үшін, көп жағдайда, ерекше бұрыштар қолданылады. Бұл бұрыштардың саны үшеу және олар *Эйлер бұрыштары* деп аталады.

Қозғалмалы жазықтықтың (x_1Oy_1) қозғалмайтын жазықтықпен (xOy) қиылысу нүктесін K әрпімен белгілейміз (*43-сурет*). Суретте көрсетілген OK сызығы *түйіндер сызығы* деп аталады. Егер Oz осі Oz_1 осіне кіші бұрышпен, сағат тілінің айналуына қарама-қарсы бағытпен бұрылса, онда OK сызығының бағыты оң деп есептеледі.

Эйлер бұрыштары:

1) ψ – *прецессия бұрышы* xOy жазықтығында жатады, түйіндер сызығы (OK) және Ox осінің арасындағы бұрыш;

2) θ – *нутация бұрышы* zOz_1 жазықтығында жатады, Oz_1 және Oz осьтерінің арасындағы бұрыш;

3) φ – *таза айналу бұрышы немесе меншіктік айналу бұрышы*, x_1Oy_1 жазықтығында жатады, түйіндер сызығы (OK) және Ox_1 осінің арасындағы бұрыш.

Аталған тоғыз бұрыштар Эйлер бұрыштары арқылы өрнектеліп, қатты дененің сфералық қозғалысын зерттеуді жеңілдетеді. Бір нүктесі қозғалмайтын қатты дене қозғалыста болған кезде, Эйлер бұрыштары өзгеріп отырады.

Егер қатты дененің сфералық қозғалысының төмендегі теңдеулері (*қатты дененің сфералық қозғалысының теңдеулері*):

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t) \qquad (57)$$

берілсе, онда әр уақыт кезеңіне сәйкес Эйлер бұрыштарын табуға болады, демек, дененің қозғалмайтын жүйеге қарағандағы орнын анықтауға болады.

§2. Қозғалмайтын бір нүктесі бар дененің орын ауыстыруы туралы теорема (Эйлер-Даламбер теорамасы). Лездік айналу осі. Аксоидтар

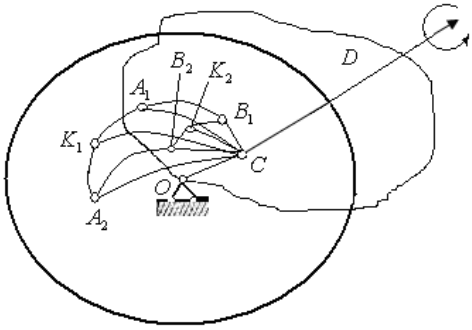
Дененің орын ауыстыру теоремасы дененің сфералық қозғалысының негізі болып табылады. Эйлер дәлелдеген (1770 ж.) теорема бойынша, қозғалмайтын бір нүктесі бар дененің орын ауыстыруын, қозғалмайтын үш осьтерді, атап айтқанда, *43-суреттегі* Oz, Ok және Oz_1 осьтерін айналу арқылы іске асыруға болады. Бұл теореманы пайдаланып, дененің сфералық

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

қозғалысын аналитикалық (координаталық) әдіспен зерттеуге болады. Эйлер-Даламбер теоремасы қозғалмайтын бір нүктесі бар дененің орын ауыстыруын геометриялық әдіспен зерттейді. Енді осы теореманы (Эйлер-Даламбер теорамасын) толығырақ қарастырайық.

Теорема. *Қозғалмайтын бір нүктесі бар дененің кез келген орын ауыстыруын қозғалмайтын нүкте арқылы өтетін осьті айналу арқылы іске асыруға болады.*

Беттері берілген D денесін қиып өтетіндей етіп, қозғалмайтын O нүктесі арқылы сфера тұрғызамыз (*44-сурет*).



44-сурет

Дененің A_1 және B_1 нүктелерін қарастырамыз, олар тұрғызылған сфераның бетінде жатсын. Дененің орнын оның A_1 және B_1 нүктелері арқылы немесе үлкен шеңбердің $\overset{\smile}{A_1B_1}$ доғасымен толық анықтауға болатыны дау тудырмайды. Белгілі бір уақыт өткен соң A_1 нүктесі A_2 нүктесінің орнына, B_1 нүктесі B_2 нүктесінің орнына, ал $\overset{\smile}{A_1B_1}$ доғасы $\overset{\smile}{A_2B_2}$ доғасының орнына ауыссын.

Енді $\overset{\smile}{A_1A_2}$ доғасымен $\overset{\smile}{B_1B_2}$ доғаларының орталары арқылы және оларға перпендикуляр етіп, үлкен шеңбердің доғаларын ($\overset{\smile}{K_1C}$, $\overset{\smile}{K_2C}$) жүргіземіз. Бұл екі доғалар ($\overset{\smile}{K_1C}$ және $\overset{\smile}{K_2C}$) сфераның бетінде жатқан C нүктесінде қиылысады. Осы C нүктесі және A_1, A_2, B_1, B_2 нүктелері арқылы үлкен шеңбердің доғаларын жүргіземіз. Бұл кезде сферада өзара тең екі сфералық үшбұрыштар пайда болады, олар: ΔCA_1B_1 және ΔCA_2B_2. Олардың өзара тең болатын себебі:

1) қатты дененің нүктелерінің арақашықтары өзгермейтіндіктен: $\overset{\smile}{A_1B_1} = \overset{\smile}{A_2B_2}$

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

2) өзара перпендикуляр шеңберлердің ($\overset{\smile}{K_1C}$ және $\overset{\smile}{K_2C}$) табанындағы K_1 және K_2 нүктелерінен тең қашықтықтағы доғалар (үлен шеңбердің) болғандықтан: $\overset{\smile}{A_1C} = \overset{\smile}{A_2C}$ және $\overset{\smile}{B_1C} = \overset{\smile}{B_2C}$.

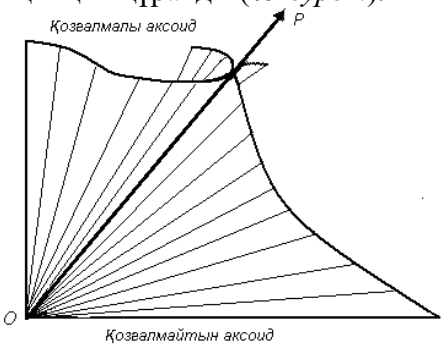
Сфералық үшбұрыштардың теңдігінен, олардың C төбесіндегі бұрыштарының теңдігі шығады, яғни $\prec B_1CA_1 = B_2CA_2$. Осыдан кейін ΔA_1CB_1 үшбұрышын C нүктесі арқылы $\prec B_1CB_2$ бұрышына бұрсақ, онда бұл үшбұрыш ΔA_2CB_2 үшбұрышымен, ал $\overset{\smile}{A_1B_1}$ доғасы $\overset{\smile}{A_2B_2}$ доғасымен дәл беттеседі. Осы қозғалыс кезінде C нүктесі қозғалыссыз болады, сонымен қатар дененің тағы бір нүктесі, атап айтқанда, O нүктесі қозғалмайтындықтан, OC түзуі ешқайда қозғалмайды, демек, теорема дәлелденді.

Дәлелденген теорема дененің кез келген орын ауыстыруы үшін дұрыс болып табылады, оның ішінде, шексіз аз уақыт аралығындағы элементар орын ауыстыру үшін де бұл теорема дұрыс болып табылады. Сонымен, қатты дененің әр уақыт кезеңіндегі сфералық қозғалысын, қозғалмайтын нүкте арқылы өтетін қозғалыссыз осьті айнала қозғалатын лездік қозғалысы ретінде қарастыруға болады.

Қатты дене берілген орнынан, белгілі бір ось арқылы айналып, шексіз аз бұрышқа бұрылу арқылы шексіз аз жақын орынға ауысса, онда бұл ось – *айналудың лездік осі* деп аталады. Дененің лездік осьті айналуын сипаттайтын шама – *лездік бұрыштық жылдамдық* деп аталады.

Дененің үздіксіз қозғалысы кезінде лездік айналу осі OP (44-сурет) қозғалмайтын кеңістікте де және қозғалыстағы дененің бойында да өзінің орнын ауыстырып отырады.

Лездік айналу осінің, қозғалмайтын координаталар жүйесіне қарағандағы геометриялық орны, төбесі дененің қозғалмайтын нүктесінде орналасқан конустық жазықтықты құрайды. Бұл жазықтық *қозғалмайтын аксоид* деп аталады. Лездік айналу осьтерінің, қозғалатын координаталар жүйесіне қарағандағы геометриялық орны *қозғалмалы аксоид* деп аталады. Қозғалмалы аксоид – қозғалмайтын аксоид секілді, төбесі дененің қозғалмайтын нүктесінде орналасқан конустық жазықтықты құрайды (*45-сурет*).



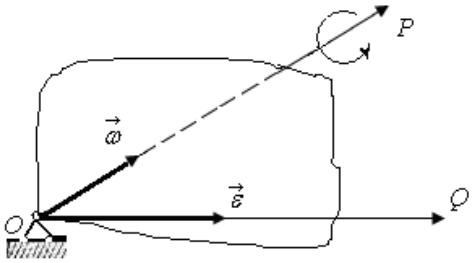
45-сурет

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Әр уақыт сәтінде, қозғалмайтын аксоид пен қоғалмалы аксоид өздерінің құрушыларының бойымен бір-бірімен жанасады және бұл құраушылар олардың осы сәттегі лездік айналу осі болып табылады.

§3. Сфералық қозғалыстағы қатты дененің бұрыштық жылдамдығы және бұрыштық үдеуі

Сфералық қозғалыстағы қатты дененің лездік осьті айналуын сипаттайтын шаманың – *лездік бұрыштық жылдамдық* деп аталатынын айтқанбыз (§2). Бұл жылдамдық модулі бойынша $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha}{\Delta t}$ шамасына тең, ал формуладағы α –дененің бұрылуындағы элементар бұрыштың модулі. Сонымен қатар, $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha}{\Delta t}$ шамасының α-нің уақыт бойынша алынған туындысы емес екені есте болғаны жөн. Қатты дененің лездік бұрыштық жылдамдығын айналу қозғалысы секілді, вектор ретінде көрсетеміз. Вектор айналу қозғалысы секілді, лездік айналу осінің бойында жатады, ал оның бағытын, денеге қараған кезде ол сағат тіліне қарсы бағытта қозғалатын жаққа қарай бағыттаймыз. Бұрыштық жылдамдықтың векторын дененің қозғалмайтын нүктесіне түсірген ұтымды болады. Дененің лездік бұрыштық жылдамдығын бұрынғыша, $\vec{\omega}$ символымен белгілейміз (*46-сурет*).



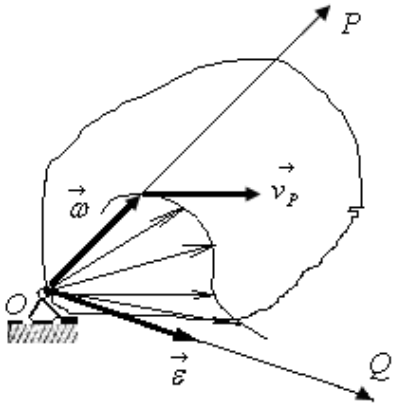
46-сурет

Дененің сфералық қозғалысы кезінде $\vec{\omega}$ шамасының, жалпылама алғанда, модулі мен бағыты өзгереді. Сонымен, *сфералық қозғалыстағы дененің лездік бұрыштық үдеуі деп* $\vec{\omega}$ *шамасының модулі мен бағытының өзгеруін сипаттайтын шаманы*, яғни $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ *векторын* айтамыз.

Дененің сфералық қозғалысы кезіндегі лездік бұрыштық үдеуін, бұрынғыша, $\vec{\varepsilon}$ символымен белгілейміз, яғни

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (58)$$



47-сурет

Векторлар $\vec{\omega}$ және $\vec{\varepsilon}$ бір осьтің бойымен бағытталмайды. Лездік бұрыштық жылдамдығының векторы ($\vec{\omega}$) лездік айналу осінің (OP) бойымен бағытталады, ал $\vec{\varepsilon}$ векторы *бұрыштық үдеу осі* деп аталатын OQ осінің бойымен бағытталады (*46-сурет*).

Сфералық қозғалысты зерттеген кезде, лездік бұрыштық үдеуінің векторы қозғалмайтын O нүктесінен тұрғызылған лездік бұрыштық жылдамдық векторы аяғының (соңғы нүктесінің) жылдамдығы ретінде қарастырылады. Дененің үздіксіз қозғалыс кезінде $\vec{\omega}$ векторы өзгереді, ал оның соңғы нүктесі (P) $\vec{\omega}$ радиус-векторының рөлін атқаратын нүктелер үшін, бұрыштық жылдамдығы векторының годографы бойынша қозғалады (*47-сурет*). Сондықтан:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{v}_P. \qquad (59)$$

Ал $\vec{\varepsilon}$ векторы

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}. \qquad (60)$$

формуласымен де анықталады.

Формуладағы:

$$\cos(\hat{\vec{\varepsilon}, \vec{i}}) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon}, \ \cos(\hat{\vec{\varepsilon}, \vec{j}}) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon}, \ \cos(\hat{\vec{\varepsilon}, \vec{k}}) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}. \qquad (61)$$

$$\varepsilon_x = \omega_x, \ \varepsilon_y = \omega_y, \ \varepsilon_z = \omega_z. \qquad (62)$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Лездік бұрыштық жылдамдық пен лездік бұрыштық үдеу бір ғана қозғалмайтын нүктесі бар қатты дененің кинематикалық күйін сипаттайтын негізгі шамалар болып табылады.

§4. Сфералық қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің жылдамдығы

Қатты дененің сфералық қозғалысы уақыттың әр сәтінде, OP лездік осін $\vec{\omega}$ - лездік бұрыштық жылдамдығымен айналу болып табылады, сондықтан оның кез келген $M(x,y,z)$ нүктесінің (*48-сурет*) жылдамдығы

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{63}$$

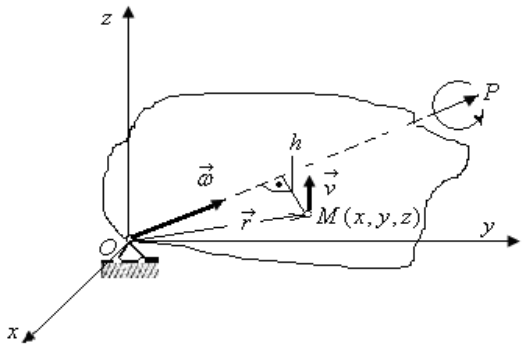
формуласымен анықталады.

Бұл формуладағы $\vec{r}$ – нүктенің радиус-векторы.

$M(x,y,z)$ нүктесінің жылдамдық модулінің формуласы:

$$v = \omega \cdot h\,, \tag{64}$$

бұл формуладағы $h - M(x,y,z)$ нүктесінен айналудың лездік осінен $M(x,y,z)$ нүктесіне дейінгі ең жақын арақашықтық.



48-сурет

$M(x,y,z)$ нүктесінің жылдамдығының проекциялары, қозғалмайтын координаттар осьтеріне *63-теңдіктің* екі жағын проекциялау арқылы табылады.

Демек,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \mathrm{X} \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \\ \omega_x, \omega_y, \omega_z \\ x, y, z \end{vmatrix}.$$

Соңғы формуладағы x, y, z - $M(x,y,z)$ нүктесінің координаталары, ал ω_x, ω_y және ω_z шамалары $\vec{\omega}$ векторының проекциялары болғандықтан:

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y\,,\ v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z\,,\ v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x\,. \qquad (65)$$

Соңғы *65-формулалар Эйлер формулалары* болып табылады.

Ескерту. *Лездік айналу осінде жатқан нүктелердің жылдамдықтары нөлге тең болады, сондықтан бұл осьті дәл осы уақыт сәтінде жылдамдықтары нөлге тең нүктелердің геометриялық орны ретінде қарастыруға болады. Ал лездік айналу осін жылдамдықтардың лездік осі деп атаған жөн болар еді. Бұлай болған кезде, осьтің нүктелерінің жылдамдықтары нөлге тең, ал олардың үдеулері нөлге тең еместігі айқындалып тұрар еді.*

§5. Сфералық қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің үдеуі

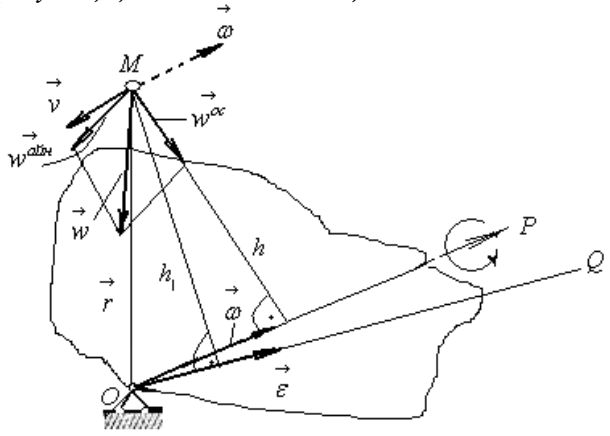
Сфералық қозғалыстағы қатты дененің (*49-сурет*) кез келген M нүктесінің үдеуін табу үшін $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ – формуласын пайдаланамыз. Ол үшін бұл формуладағы $\vec{v}$ шамасын $\vec{\omega} \times \vec{r}$ өрнегімен алмастырамыз. Сонда:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\,.$$

Бірақ $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \varepsilon$ және $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ болғандықтан:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}\,. \qquad (66)$$

Бұл формула Ривальс теоремасы болып табылады, яғни: *сфералық қозғалыстағы қатты дененің кез келген M нүктесінің үдеуі айналу үдеуі мен* оскетартқыш *үдеуінің қосындысына тең болады*.



49-сурет

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Сондықтан бұл теңдіктегі $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ шамасын *айналу үдеуі* деп атап, $\vec{w}^{айн}$ символымен белгілейміз, яғни

$$\vec{a}^{айн} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \qquad (67)$$

Ал $\vec{a}^{ось} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ шамасын *оськетартқыш үдеу* деп атап, $\vec{a}^{ось}$ символымен белгілейміз, яғни

$$\vec{a}^{ось} = \vec{\omega} \times \vec{v}. \qquad (68)$$

Нүктенің айналу үдеуі бұрыштық үдеудің осі арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр бағытталған. Оның модулі:

$$a^{айн} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin(MOQ) = h_1 \cdot \varepsilon. \qquad (69)$$

Соңғы формуладағы $h_1 -$ M нүктесінен бұрыштық үдеуге дейінгі ең жақын арақашықтық.

Нүктенің оськетартқыш үдеуі $\vec{\omega}$ және $\vec{v}$ векторлары жатқан жазықтыққа перпендикуляр бағытталған. Оның модулі:

$$a^{ось} = \omega \cdot v \cdot \sin 90^0 = \omega \cdot v. \qquad (69)$$

Соңғы формуладағы $h_1 -$ M нүктесінің бұрыштық үдеуге дейінгі ең жақын арақашықтық.

Нүктенің оськетартқыш үдеуі $\vec{a}^{ось}$ және $\vec{v}$ векторлары жатқан жазықтыққа перпендикуляр бағытталған. Оның модулі: $\vec{a}^{ось} = \omega \cdot v \cdot \sin 90^0 = \omega \cdot v$. Ал, $v = \omega \cdot h$ болғандықтан:

$$a^{ось} = h \cdot \omega^2. \qquad (70)$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY