ПӘН: PHY1071 ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

ДӘРІС № 14

ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ КҮРДЕЛІ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Преподаватель: ***Бейсебаева Айгуль Самсалиевна***
Контакты: 8-776-388-14-45, a.s.beysebayeva@satbayev.university

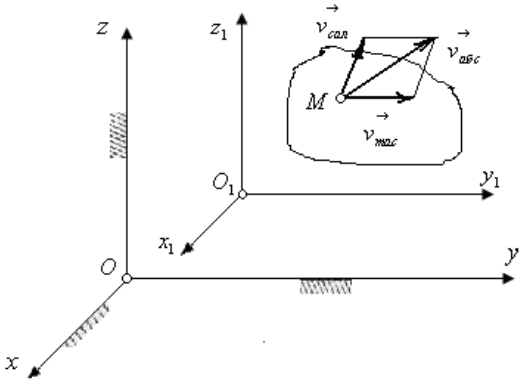
7-*тарау.* ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ КҮРДЕЛІ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Бұдан бұрын (3-тарау) қатты дене қозғалысын екі қозғалыстан тұратын күрделі қозғалыс ретінде қарастырған едік. Осы тәсіл қатты дененің күрделі қозғалысын зерттеген кезде де қолданылады. Бұл тарауда дененің жылдамдығы және оның нүктелерінің жылдамдығы қарастырылады, ал олардың үдеуі туралы мәселе қарастырылмайды.

§1. Ілгерілмелі қозғалыстарды қосу

Қатты дене M (*54-сурет*) бір уақыттың ішінде ілгерілмелі қозғалыстың екі түрімен (салыстырмалы және тасымал) қозғалыста болсын.

Мысалы, $O_1x_1y_1z_1$ есептеу жүйесіне қарағанда $\vec{v}_{сал}$ жылдамдығымен, ал қозғалмайтын $Oxyz$ жүйесіне қарағанда $\vec{v}_{тас}$ жылдамдығымен қозғалыста болсын.



54-сурет

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Мұндай құрама қозғалыстың мысалы ретінде, ғимараттың қабырғасын жағалай қозғалып келе жатқан көпірлі кранның арбашасының қозғалысын келтіруге болады. Кранның арбашасының қозғалысы кранмен салыстырғанда салыстырмалы қозғалыс, ал кранның өзінің қозғалысы тасымал қозғалысы болып табылады. Сонымен қатар осы арбашаның ғимараттың қабырғасымен салыстырғандағы қозғалысы абсолют қозғалыс болып табылады.

Ілгерілмелі қозғалыс кезінде дене нүктелерінің жылдамдықтары өзара тең (геометриялық тұрғыдан) болатындықтан, осы дененің нүктелерінің салыстырмалы және тасымал жылдамдықтары да геометриялық теңдікте болады. Сондықтан жылдамдықтарды қосу теориясы негізінде - дене нүктелерінің абсолют жылдамдықтары сәйкес векторлар ($\vec{v}_{сал}$, $\vec{v}_{тас}$) арқылы тұрғызылған параллелограмның диагоналына тең болады:

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{сал} + \vec{v}_{сал} . \qquad (74)$$

Сонымен: *егер қатты дененің екі ілгерілмелі қозғалысын қоссақ, онда дененің абсолют қозғалысы да ілгерілмелі қозғалыс болады, ал оның жылдамдығы осы қозғалыстың құраушы қозғалыстарының геометриялық жиынына тең болады* (*74-формула*).

Егер қатты дене бір уақытта бірнеше ілгерілмелі қозғалыста болса, онда дененің абсолют қозғалысы да ілгерілмелі қозғалыс болады, ал оның жылдамдығы осы барлық қозғалыстардың құраушы қозғалыстарының геометриялық жиынына тең болады, яғни

$$\vec{v}_{абс} = \sum \vec{v}_i . \qquad (74а)$$

§2. Қатты дененің параллель осьтерді айналуындағы лездік айналуларын қосу

Егер қатты дене параллель осьтерді айнала қозғалысы кезінде, бір уақытта, айналудың екі түріне қатысса, онда оның барлық нүктелері айналу осіне перпендикуляр жазықтықта қозғалады, яғни дененің абсолют қозғалысы жазық қозғалыс болып табылады. Мұндай қозғалыстардың үш түрі болады. Олар:

- айналудың құраушылары бір жаққа бағытталған;
- айналудың құраушылары әр жаққа бағытталған, ал айналудың бұрыштық жылдамдықтарының модульдері бір-біріне тең болмайды;
- айналудың құраушылары әр жаққа бағытталған, ал айналудың бұрыштық жылдамдықтарының модульдері өзара тең. Қозғалыстардың аталған түрлерін жеке-жеке қарастырайық.

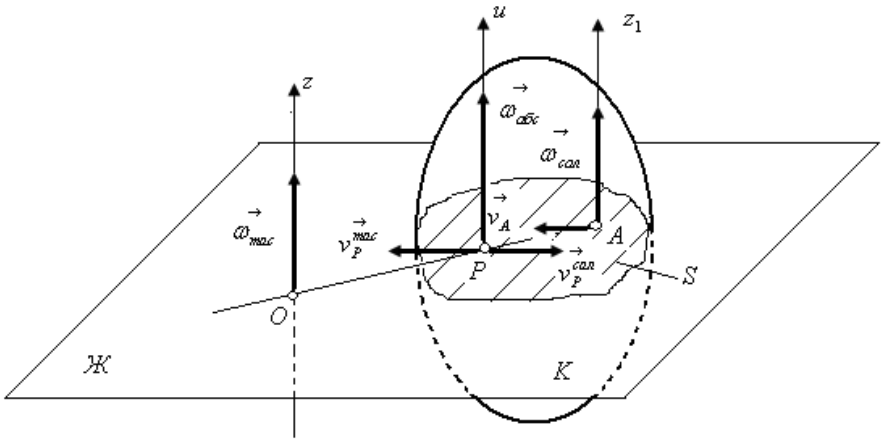
I. Айналудың құраушылары бір жаққа бағытталған

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Қатты дене K Az_1 осін айнала қозғалсын, ал бұл осьтің өзі қозғалмайтын Oz осін айнала қозғалсын (*55-сурет*). Бұл кезде дененің Az_1 осін айнала қозғалуы салыстырмалы қозғалыс болады, ал дененің осы осьпен бірге Oz осін айнала қозғалуы – тасымал қозғалысы болып табылады.

Қатты дененің осы қозғалыстардағы (дене K жазық қозғалыс жасайды) бұрыштық жылдамдықтарын $\vec{\omega}_{сал}$ және $\vec{\omega}_{mac}$ символдарымен белгілейік.

Қарастырылып отырған денені айналу осіне перпендикуляр $Ж$ жазықтығымен екіге бөлеміз. Қиылған жердегі жазықтықтың түрі S фигурасымен көрсетілген. Осы жазықтық (S) қозғалысы жалпы дененің қозғалысын анықтайды.



55-сурет

Суретте көрсетілген A және O нүктелері $Ж$ жазықтығындағы айналу осьтерінің іздері болып табылады. Әр уақыт сәтінде S фигурасының жылдамдықтың лездік центрі (абсолют жылдамдығы нөлге тең нүкте) болатыны белгілі. Сонымен қатар фигураның кез келген нүктесінің абсолют жылдамдығы салыстырмалы және тасымал жылдамдықтарынан тұратынын ескерсек, онда бұл жылдамдықтардың өзара тең және қарама-қарсы бағытталатыны белгілі. Ал S фигурасының жылдамдықтарының лездік центрі A және O нүктелерінің араларында жататын болғандықтан, ол нүктені P нүктесімен белгілейміз де, жылдамдықтардың лездік центрі дейміз. Бұл кезде салыстырмалы жылдамдықтың модулі тасымал жылдамдығының модуліне тең болады, яғни $\vec{v}_P^{mac} = \vec{v}_P^{сал}$. Ал келесі шамалар: $\vec{v}_P^{сал} = AP \times \vec{\omega}_{сал}$, $\vec{v}_P^{mac} = OP \times \vec{\omega}_{mac}$ бұрыннан белгілі болғандықтан

$$\frac{\omega_{сал}}{\omega_{mac}} = \frac{OP}{AP}. \qquad (75)$$

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Фигураның абсолют бұрыштық жылдамдығын табу үшін A нүктесін қарастырайық. Бұл нүкте салыстырмалы айналу осінде жатады, салыстырмалы қозғалысқа қатыспайды, сондықтан $\vec{v}_A^{\text{абс}} = \vec{v}_A^{\text{тас}}$.

Бірақ $v_A^{\text{абс}} = AP \cdot \omega_{\text{абс}}$, $v_A^{\text{тас}} = OA \cdot \omega_{\text{тас}}$ және $OA = OP + AP$ болғандықтан *75-формуланы* пайдаланып,

$$\omega_{\text{абс}} = \omega_{mac} + \omega_{сал} \qquad (76)$$

өрнегін аламыз.

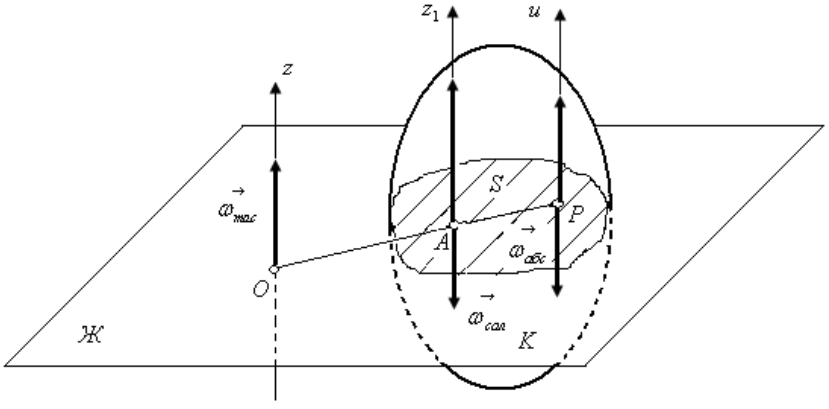
Енді K денесінің қозғалысына келетін болсақ, оның осы сәттегі абсолют қозғалысын – жылдамдықтардың лездік центрі арқылы өтетін және айналуды құрайтын осьтерге параллель Pu лездік осін айналу қозғалысы ретінде қабылдаймыз. Сонымен, қатты дененің параллель осьтерді айналуындағы бір бағыттағы екі лездік айналысын қосқанда дененің абсолют қозғалысы (айналуды құрайтын осьтерге параллель лездік осьті сәйкес бағытта айналуы) пайда болады. Дененің абсолют бұрыштық жылдамдығының модулі және құрама айналулардың бұрыштық жылдамдықтарының жиыны бір-біріне тең болады.

Лездік осьтің (Pu) дененің сыртында жатуы да мүмкін. Сонымен қатар ол екі цилиндрлік беттер жасай отырып, кеңістіктегі орнын үнемі өзгертіп отырады, ол беттер:

- *қозғалмайтын аксоид* – қозғалмайтын кеңістікке қатысты;
- *қозғалатын аксоид* – қозғалыстағы денеге қатысты.

II. Айналудың құраушылары әр жаққа бағытталған, ал айналудың бұрыштық жылдамдықтарының модульдері бір-біріне тең емес

Қатты дене K Az_1 осін айнала қозғалсын, ал оның салыстырмалы бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}_{сал}$ болсын, сонымен қоса, ол осы айналу осімен бірге Oz осін айнала қозғалсын (*56-сурет*), ал оның бұл кездегі тасымал бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}_{mac}$ болсын. Айналу бағыттары әртүрлі және $\omega_{mac} \prec \omega_{сал}$.



56-сурет

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Жоғарыдағы ойымызды жалғастыра отырып, K денесінің осы сәттегі абсолют қозғалысы – оның лездік Pu осін айнала қозғалысы болып табылады деп тұжырымдаймыз.

Қарастырылып отырған жағдайда лездік ось Oz және Az_1 осьтерінің сырт жағында жатады. Дененің абсолют бұрыштық жылдамдығы өзінің модулі бойынша, айналуды құраушы бұрыштық жылдамдықтардың модульдерінің айырмасына тең болады, яғни

$$\omega_{абс} = \omega_{сал} - \omega_{тас}. \qquad (77)$$

Сонымен, қатты дененің параллель осьтерді айналуындағы әр бағыттағы, бұрыштық жылдамдықтарының модульдері әртүрлі екі лездік айналысын қосқанда дененің абсолют қозғалысы (айналуды құрайтын осьтерге параллель лездік осьті, үлкен бұрыштық жылдамдықпен айналу бағытына сәйкес айналу) пайда болады. Дененің абсолют бұрыштық жылдамдығының модулі айналуды құрайтын бұрыштық жылдамдықтардың айырмасына тең болады.

Өткен жолғыдай, бұл кезде де лездік осьті екі цилиндрлік беттер жасай отырып, кеңістіктегі орнын үнемі өзгертіп отырады, ол беттер:

- *қозғалмайтын аксоид*;
- *қозғалатын аксоид*.

III. Айналудың құраушылары әр жаққа бағытталған, ал айналудың бұрыштық жылдамдықтарының модульдері өзара тең

Қатты дене K Az_1 осін айнала қозғалсын, ал оның салыстырмалы бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}_{сал}$ болсын, сонымен қоса, ол осы айналу осімен бірге Oz осін айнала қозғалсын (*57-сурет*), ал оның бұл кездегі тасымал бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}_{тас}$ болсын. Айналу бағыттары әртүрлі және $\omega_{сал} = -\omega_{тас}$.

Қатты дененің параллель осьтерді модульдері өзара тең, бірақ қарама-қарсы бағытталған бұрыштық жылдамдықтармен айнала қозғалысындағы екі лездік айналудың осындай жиынтығы – лездік айналудың жұбы деп аталады.

Қарастырып отырған денені айналу осіне перпендикуляр $Ж$ жазықтығымен екіге бөліп, қиылған жердегі S жазықтығының айналуын қарастырайық (*57-сурет*).

Осы S жазықтықттығының кез келген M нүктесінің салыстырмалы қозғалысы $\vec{v}_{саа} = \vec{\omega}_{саа} \cdot AM$ шамасына тең және тасымал қозғалысы $\vec{v}_{тас} = \vec{\omega}_{саа} \cdot OM$ болғандықтан, оның абсолют қозғалысы:

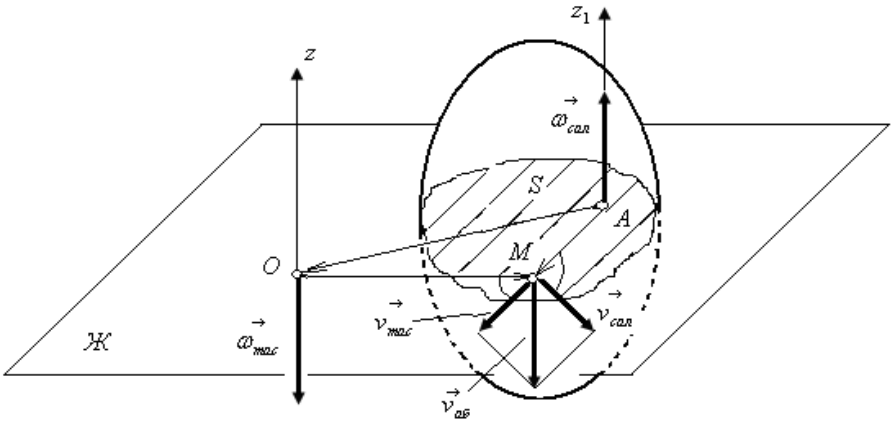
САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

$$\vec{v}_{аб} = \vec{v}_{сал} + \vec{v}_{тас} = \vec{\omega}_{сал} \cdot AM + \vec{\omega}_{тас} \cdot OM \ .$$

Бұл өрнектегі $\omega_{сал}$ шамасын $-\omega_{тас}$ арқылы алмастырып, $OM - AM = OA$ екенін ескеріп,

$$\vec{v}_{аб} = \vec{\omega}_{сал} \cdot OA = \vec{\omega}_{тас} \cdot AO$$

формуласын аламыз.



57-сурет

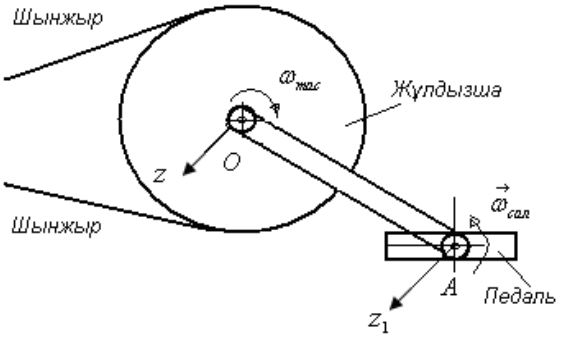
Бұл өрнектегі $\omega_{тас}$ және OA шамалары M нүктесінің S жазықтықтығының қай жерінде орналасқанына тәуелді болмағандықтан, осы жазықтықтың барлық нүктелерінің жылдамдықтары бірдей деп қорытынды жасауға болады. Ал мұндай жағдай тек дененің лездік-ілгерілмелі қозғалысына тән екені белгілі.

Сонымен, модульдері өзара тең және параллель, бірақ қарама-қарсы бағытталған екі бұрыштық жылдамдықтардың жиынтығы – бұрыштық жылдамдықтар жұбы деп, ал $\vec{v}$ векторы – бұрыштық жылдамдықтар жұбының моменті деп аталады, яғни

$$\vec{v} = \vec{\omega}_{тас} \cdot AO \ . \qquad (78)$$

Егер қозғалыстың барлық уақытында бұрыштық жылдамдықтардың жұбы бар болса, онда мұндай қозғалыс үздіксіз (перманентті) ілгерілмелі қозғалыс болып табылады. Мысал ретінде, велосипед педалінің оның рамасына қатысты қозғалысын қарастыруға болады (*58-сурет*). Педаль OA иінтірегінің A нүктесінде Az_1 осі арқылы айналады, сонымен қоса рамаға бекітілген және Az_1 осіне параллель Oz осін иінтірекпен бірге айнала қозғалады. Бұл айналулардың бұрыштық жылдамдықтары өзара тең, бірақ қарама-қарсы бағытталған.

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

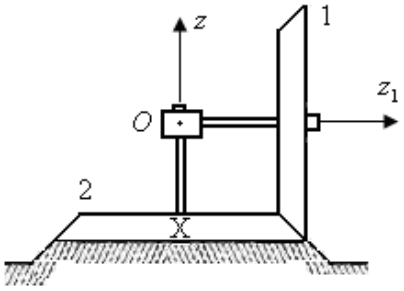


58-сурет

Қозғалыс кезінде велосипедтің педалі өз-өзіне параллель күйде қалып, ілгерілмелі қозғалыс жасайды. Оның жылдамдығы бұрыштық жылдамдықтар жұбының моментіне тең болады. Демек, лездік айналу жұбы лездік-ілгерілмелі қозғалысқа эквивалент болғандықтан, кез келген лездік-ілгерілмелі қозғалысты лездік айналу жұбы ретінде қарастыруға болады.

§3. Қатты дененің өзара қиылысатын осьтерді айналуындағы лездік айналуларын қосу

Қатты дененің өзара қиылысатын екі осьтерді бір кезде айналуындағы құрама қозғалысын қарастырайық. Мұндай қозғалыстың мысалы ретінде *59-суретте* көрсетілген механизмнің жұмысын келтіруге болады. Бұл суреттегі конус тәріздес 2-тісті доңғалақ (шестерня) қозғалмайды, ал 1-тісті доңғалақ қозғалыста (теңселу қозғалысы) болады.



59-сурет

Қатты дене K уақыттың осы сәтінде Oz_1 осін айнала қозғалсын, ал оның салыстырмалы бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}_{сал}$ болсын, сонымен қоса, ол осы айналу осімен бірге қозғалмайтын Oz_2 осін айнала қозғалсын (*60-сурет*), ал оның бұл кездегі тасымал бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}_{тас}$ болсын. Айналудың салыстырмалы және тасымалдау осьтерінде жатқан O нүктесі

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

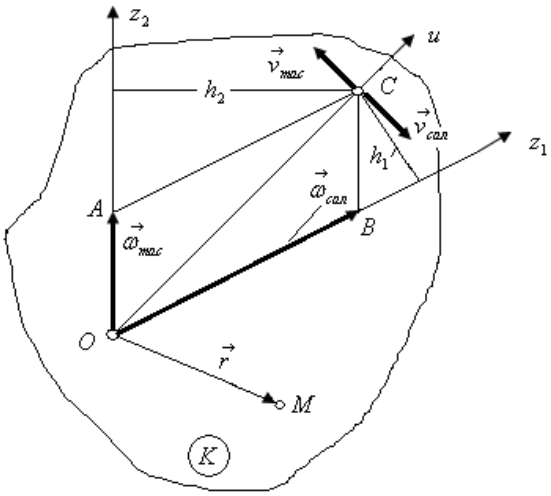
қозғалмайтын нүкте, сондықтан дененің абсолют қозғалысы осы қозғалмайтын O нүктесін айнала қозғалатын сфералық қозғалыс болып табылады, сонымен қатар дененің осы сәттегі қозғалысы – қозғалмайтын нүкте арқылы өтетін лездік осьті айналу қозғалысы болып табылады.

Лездік ось – қабырғалары $\omega_{сал}$ және $\omega_{тас}$ векторларынан тұратын $OACB$ параллелограмының диагоналына (*60-сурет*) сәйкес келетінін дәлелдейік. Ол үшін C нүктесінің жылдамдығының нөлге тең екенін дәлелдесек жеткілікті.

Параллелограмының C нүктесінің абсолют жылдамдығы: $\vec{v}_C^{аб} = \vec{v}_C^{сал} + \vec{v}_C^{тас}$,

ал C нүктесінің O нүктесі қарағандағы радиус-векторы $\vec{OC}$ болғандықтан *63-формула* бойынша

$$\vec{v}_C^{сал} = \vec{\omega}_{сал} \times \vec{OC} \text{ және } \vec{v}_C^{тас} = \vec{\omega}_{тас} \times \vec{OC}.$$



60-сурет

Ал C нүктесінің жылдамдықтары ($\vec{v}_C^{сал}$, $\vec{v}_C^{тас}$) векторлық көбейтінді болғандықтан, $OACB$ параллелограмының жазықтығына перпендикуляр және өзара қарама-қарсы бағытталған. Олар модулдері бойынша осы параллелограмның ауданына тең болғандықтан: $\vec{v}_C^{сал} = -\vec{v}_C^{тас}$, ал $\vec{v}_C^{аб} = 0$. Демек, екі нүктелері, яғни O және C нүктелері қозғалмайтын болғандықтан, OC түзуі айналудың лездік осі болып табылады.

Дененің абсолют бұрыштық жылдамдығын ($\vec{\omega}_{аб}$) анықтайық. Ол үшін, қатты дененің кез келген M нүктесін алайық. Бұл нүктенің O нүктесіне

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

қарағандағы радиус-векторы $\vec{r}$ болсын. Сонда, осы нүктенің жылдамдығы $\vec{v}_M^{\text{абс}} = \vec{v}_M^{\text{сал}} + \vec{v}_M^{\text{тас}}$ өрнегімен анықталады, ал бұл өрнектегі

$$\vec{v}_M^{\text{сал}} = \vec{\omega}_{сал} \times \vec{r} \text{ және } \vec{v}_M^{\text{тас}} = \vec{\omega}_{тас} \times \vec{r}, \text{ яғни}$$

$$\vec{v}_M^{\text{абс}} = \vec{\omega}^{\text{сал}} \times \vec{r} + \vec{\omega}^{\text{тас}} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_{сал} + \vec{\omega}_{тас}) \times \vec{r}.$$

Екінші жағынан, $\vec{v}_M^{\text{абс}} = \vec{\omega}_{абс} \times \vec{r}$ болғандықтан $(\vec{\omega}_{сал} + \vec{\omega}_{тас}) \times \vec{r} = \vec{\omega}_{абс} \times \vec{r}$.

Сонымен қатар M нүктесін дененің кез келген нүктесі деп қабылдағандықтан, бұл теңдіктегі $\vec{r}$ – кез келген шама, демек

$$\vec{\omega}_{абс} = \vec{\omega}_{сал} + \vec{\omega}_{тас}. \quad (79)$$

Қорыта айтқанда, *қатты дененің өзара қиылысатын осьтерді айналғандағы екі лездік айналуларын қосқанда – айналуды құрайтын осьтердің қиылысу нүктесі арқылы өтетін лездік осьті айналу қозғалысы пайда болады, яғни бұл дененің абсолют қозғалысы болып табылады. Дененің абсолют бұрыштық жылдамдығы айналуды құрайтын бұрыштық жылдамдықтардың геометриялық қосындысына тең болады*.

Бұл дәлелденген теорема, бір нүктеде қиылысатын осьтерді лездік айналулардың құраушыларының кез келген саны үшін әділетті, яғни

$$\vec{\omega}_{абс} = \sum \vec{\omega}_i. \quad (79а)$$

Тақырыптың соңында, қатты дененің берілген осьті айналу қозғалысын, берілген осьпен ортақ қиылысу нүктесі бар осьті екі (немесе оданда көп) лездік айналу қозғалысына жіктеуге болатынын; қатты дененің, ортақ бір осьті модульдері тең, бірақ бағыттары қарама-қарсы бұрыштық жылдамдықтармен айналудың екі лездік қозғалысының жиыны – тыныштық күйге эквивалент екенін айтқан жөн болар.

§4. Қатты дененің сфералық қозғалысындағы бұрыштық жылдамдығын Эйлер бұрыштары арқылы өрнектеу

Қозғалмайтын O нүктесі бар қатты дене, осы сәтте, OP лездік осін $\vec{\omega}$ шамасына тең бұрыштық жылдамдықпен айналып тұрсын (*61-сурет*).

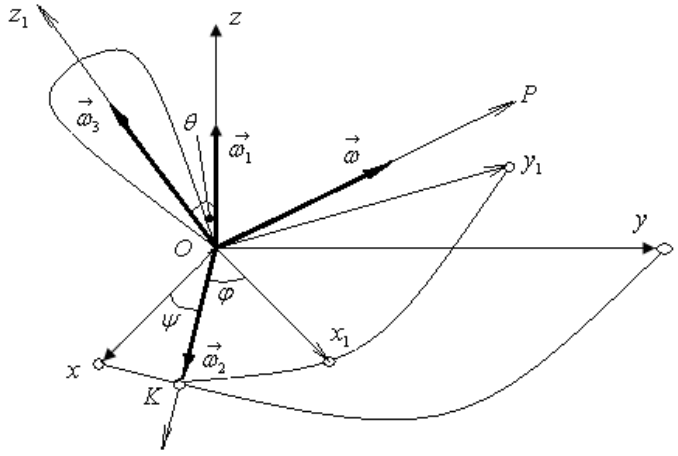
Бұрыштық жылдамдықты ($\vec{\omega}$), суретте көрсетілген Oz, Ok және Oz_1 осьтерімен бағытталған үш бұрыштық жылдамдықтарға $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ жіктеп,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

шамаларын аламыз.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Енді дененің сфералық қозғалысын Oz, Ok және Oz_1 осьтерін айнала қозғалатын үш лездік айналу қозғалыстарынан тұратын күрделі қозғалыс ретінде қарастыруға болады.



61-сурет

Осы қозғалыстардың әрқайсысында Эйлердің тек бір бұрышы өзгеріп отырады, атап айтқанда: Oz осін айнала бұрылғанда прецессия (*астр.*, *айналып тұрған дененің осінің бұрылуы*) бұрышы ψ, Ok осін айнала бұрылғанда нутация (*астр.*, *Эйлердің бірінші бұрышының тұрақты кезіндегі айналу осінің қозғалысы*) бұрышы θ, ал Oz_1 осін айнала бұрылғанда таза айналу бұрышы φ өзгеріп отырады. Сондықтан: $\omega_1 = \dot{\psi}$, $\omega_2 = \dot{\theta}$, $\omega_3 = \dot{\varphi}$.

Бұрыштық жылдамдықтың $(\vec{\omega})$ $Oxyz$ осьтеріне проекцияларын табамыз. Олар:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x} = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cdot\sin\psi, \\ \omega_y &= \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3x} = \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cdot\cos\psi, \\ \omega_z &= \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z} = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned} \qquad (80)$$

Проекциялары арқылы $\vec{\omega}$ векторының модулі анықталады:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}\ .$$

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

Сол секілді, сол проекциялар арқылы $\vec{\omega}$ векторының бағыттаушы косинустарын анықтаймыз, яғни

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{\vec{i}}) = \frac{\omega_x}{\omega},$$
$$\cos(\vec{\omega}, \hat{\vec{j}}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \qquad (81)$$
$$\cos(\vec{\omega}, \hat{\vec{k}}) = \frac{\omega_z}{\omega}.$$

Бұрыштық жылдамдықтың ($\vec{\omega}$) проекцияларының теңдеулерінің екі жағын уақыт арқылы дифференциалдап, дененің бұрыштық үдеуі векторының координаталар осьтеріндегі проекцияларын аламыз. Бұл проекциялар табылғаннан кейін, бұрыштық үдеудің ($\vec{\varepsilon}$) модулін және оның бағыттаушы косинустарын анықтаймыз.

Келтірілген формулалар сфералық қозғалысты аналитикалық зерттеудің негізі болып табылады.

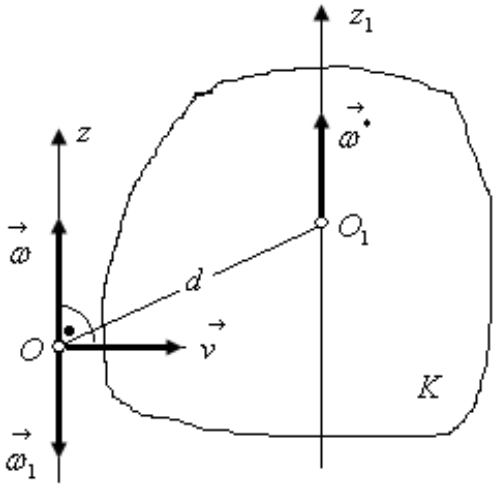
§5. Қатты дененің лездік ілгерілмелі және айналу қозғалыстарын қосудың жекеленген түрлері

Қатты дененің күрделі қозғалысы лездік ілгерілмелі қозғалысынан және айналу қозғалысынан тұруы мүмкін. Мысал ретінде тікұшақтың пропеллерінің: өз осін айнала қозғалуын және тікұшақ корпусының осьпен бірге ілгерілмелі қозғалысын келтіруге болады.

Күрделі қозғалыстың үш түрін айыруға болады: 1) ілгерілмелі қозғалыстың жылдамдығы айналу осіне перпендикуляр; 2) ілгерілмелі қозғалыстың жылдамдығы айналу осіне параллель; 3) ілгерілмелі қозғалыстың жылдамдығы айналу осімен сүйір немесе доғал бұрыш жасайды. Аталған түрлерді жеке-жеке қарастырайық.

I. Қатты дене K, осы сәтте, $\vec{\omega}$ бұрыштық жылдамдығымен Oz осін айнала қозғалып, сонымен қоса $\vec{\omega}$ бұрыштық жылдамдығына перпендикуляр бағытта ілгерілмелі қозғалыста болсын. Ал оның ілгерілмелі қозғалыстағы жылдамдығы $\vec{v}$ шамасына тең болсын (*62-сурет*). Бұл кезде күрделі қозғалыс жазық болады, яғни уақыттың әр сәтінде, бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}$ шамасына тең болатын лездік осьті айнала қозғалысы болып табылады. Тұжырымдама дәлелді болу үшін жылдамдығы $\vec{v}$ шамасына тең дененің лездік-ілгерілмелі қозғалысын лездік айналудың жұбымен алмастырайық. Ол үшін $\vec{\omega}_1$ және $\vec{\omega}^*$ бұрыштық жылдамдықтары жұбының модулін ω шамасына тең етіп аламыз.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY



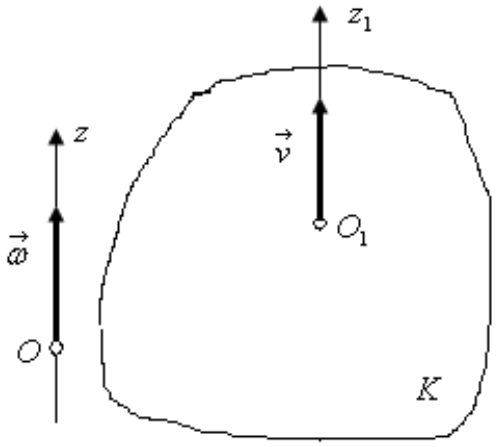
62-сурет

Бұрыштық жылдамдықтар жұбының моменті $\vec{v}$ болғандықтан, жұптың иіні $d = \frac{v}{\omega}$. Енді аталған жұпты ($\vec{\omega}_1$ $\vec{\omega}^*$), $\vec{\omega}_1$ векторы Oz осінің бойымен бағытталатындай етіп жылжытайық. Осы кезде, модульдері өзара тең, бірақ қарама-қарсы бағытталған бұрыштық жылдамдықтармен осы осьті айнала қозғалғанда, дене ешқандай қосымша қозғалыс алмайды. Сондықтан дене бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}^* = \vec{\omega}$, тек $O_1 z_1$ осін айнала қозғалысында болады.

Қорыта айтқанда, қатты дененің лездік-ілгерілмелі (жылдамдығы $\vec{v}$) және лездік айнала (бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}$ және $\vec{v} \perp \vec{\omega}$) қозғалыстарын өзара қоссақ, абсолют, яғни берілген оське параллель қозғалысты аламыз, одан $d = \frac{v}{\omega}$ қашықтықта орналасқан лездік осьті айнала қозғалысты аламыз. Бұл айнала қозғалыстың абсолют жылдамдығы, осы айнала қозғалыстың құраушысының бұрыштық жылдамдығына тең болады, яғни: $\vec{\omega}_{абс} = \vec{\omega}$.

II. Қатты дене K, осы сәтте, $\vec{\omega}$ бұрыштық жылдамдығымен Oz осін айнала қозғалып, сонымен қоса, $\vec{\omega}$ бұрыштық жылдамдығына параллель бағытта, жылдамдығы $\vec{v}$ шамасына тең ілгерілмелі қозғалыста болсын (*63-сурет*).

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY



63-сурет

Қозғалыстың мұндай түрі винттік (бұранда) қозғалыс деп аталады. Дененің айналу осі *бұранда осі* деп аталады. Егер $\vec{\omega}$ және $\vec{v}$ векторлары бағыттас болса, онда оң бұранда; ал бұл векторлар қарама-қарсы бағытталса, онда сол бұранда деп аталады. Келесі қатынас бұранданың параметрі деп аталады

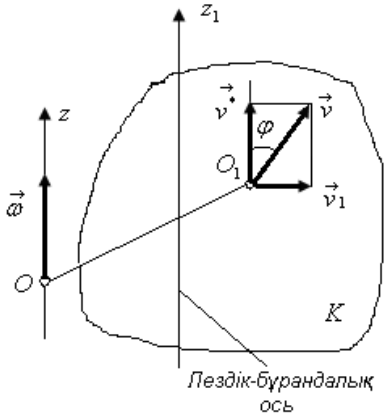
$$p = \frac{v}{\omega}. \tag{82}$$

Егер дененің қозғалысы кезінде $\vec{\omega}$ және $\vec{v}$ векторлары тұрақты күйде болса, онда бұранда қозғалысы *перманенті* қозғалыс деп аталады. Бұл кезде дененің кез келген нүктесі бұранда сызығымен қозғалады. Бұранда осінің бойымен жылжып келе жатқан дене $T = \frac{2\pi}{\omega}$ уақыт шамасында толық бір айналым жасап, h қашықтыққа орын ауыстырсын. Бұл қашықтық $h = 2\pi \cdot \frac{v}{\omega} = 2\pi \cdot p$ өрнегімен анықталып, *бұранда* (*винт*) *қадамы* деп аталады.

Сонымен, қатты дененің $\vec{v}$ жылдамдығымен лездік-ілгерілмелі қозғалысын және осьті $\vec{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен ($\vec{v}$ және $\vec{\omega}$ өзара параллель) лездік айналуын қосқанда лездік винттік қозғалыс пайда болады.

III. Қатты дене K, осы сәтте, $\vec{\omega}$ бұрыштық жылдамдығымен Oz осін айнала қозғалып, сонымен қоса, бұрыштық жылдамдықтың ($\vec{\omega}$) бағытымен сүйір немесе доғал бұрыш жасай отырып, жылдамдығы $\vec{v}$ шамасына тең ілгерілмелі қозғалыста болсын (*64-суретте* сүйір бұрыш көрсетілген).

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY



64-сурет

Қарастырылып отырған ілгерілмелі қозғалысты екі қозғалысқа жіктейміз. Олар:

– айналу осіне перпендикуляр бағыттағы қозғалыс, оның жылдамдығы: $\vec{v}$;

– айналу осіне параллель бағыттағы қозғалыс, оның жылдамдығы: $\vec{v}^*$.

Жоғарыда дәлелденгендей, дененің бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}$ шамасына тең айналу және жылдамдығы $\vec{v}_1$ $(\vec{v}_1 \perp \vec{\omega})$ шамасына тең ілгерілмелі қозғалыстарының жиыны, осы дененің бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}$ шамасына тең O_1z_1 лездік осін бір рет айналу қозғалысына эквивалент болады. Ал, O_1z_1 осі Oz осінен $d = \frac{v_1}{\omega}$ қашықтықта орналасқан. Жылдамдығы $\vec{v}^*$ шамасына тең ілгерілмелі қозғалыстың және бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}$ шамасына тең O_1z_1 осін айналу қозғалысының жиыны лездік-винтік қозғалысты береді.

Сондықтан дененің жылдамдығы $\vec{v}^*$ шамасына тең лездік-ілгерілмелі қозғалысын және бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}$ шамасына тең лездік айналу қозғалысын қосқанда, абсолют қозғалыс лездік-винттік қозғалыс болып табылады. Бұл кезде $\vec{\omega}$ және $\vec{v}$ бір-біріне перпендикуляр болмайды.

§6. Қатты дененің лездік ілгерілмелі және айналмалы қозғалыстарын қосудың жалпы түрі

Бұл мәселені шешу үшін Пуансо тәсілін қолдануға болады, ол үшін күштерді лездік айналудың бұрыштық жылдамдықтарымен, ал күштер

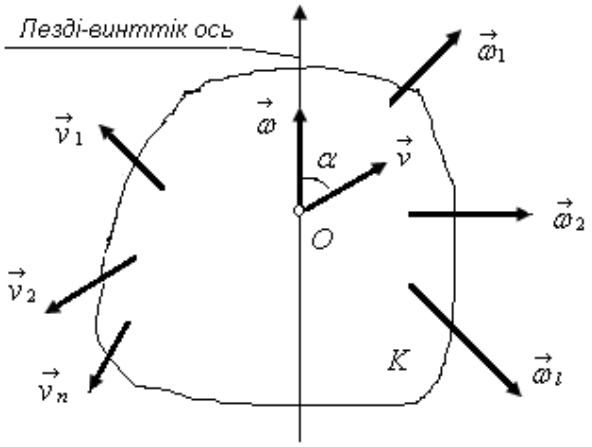
СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

моменттерін дененің лездік-ілгерілмелі қозғалысы құраушысының бұрыштық жылдамдықтарының моменттер жұбымен алмастырылады.

Қатты дене K осы сәтте, жылдамдықтары $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ шамаларына тең n ілгерілмелі қозғалыстарда және бұрыштық жылдамдықтары $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, ..., \vec{\omega}_l$ шамаларына тең l айналу қозғалыстарында болсын (*65-сурет*).

Келтірілу нүктесі ретінде кез келген O нүктесін алып, барлық жылдамдықтарды бір бұрыштық жылдамдыққа $\vec{\omega}$ және бір сызықтық жылдамдыққа $\vec{v}$ келтіреміз. Сонда:

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{l} \vec{\omega}_i , \quad \vec{v} = \sum_{S=1}^{n} \vec{v}_S + \sum_{i=1}^{l} \vec{M}_0(\vec{\omega}_i) . \tag{83}$$



65-сурет

Демек, жылдамдықтары $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ шамаларына тең лездік ілгерілмелі қозғалыстардың және бұрыштық жылдамдықтары $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, ..., \vec{\omega}_l$ шамаларына тең айналу қозғалыстардың жиыны бір лездік-ілгерілмелі қозғалысқа эквивалентті. Бұл лездік-ілгерілмелі қозғалыстың жылдамдығы $\vec{v} = \sum_{S=1}^{n} \vec{v}_S + \sum_{i=1}^{l} \vec{M}_0(\vec{\omega}_i)$ шамасына және O центрі арқылы өтетін лездік осін бір айналудағы бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{l} \vec{\omega}_i$ шамасына тең. Жылдамдықты $(\vec{v})$ екі құраушыларға $(\vec{v}^*, \vec{v}_1)$ жіктеп, өткен

САТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

параграфтағыдай лезді-винттік қозғалыс аламыз. Бұл кезде, $\vec{v}^{*}$ векторы $\vec{\omega}$ векторына параллель, ал $\vec{v}_1$ векторы $\vec{\omega}$ векторына перпендикуляр болып келеді. Сондықтан қатты дененің лездік қозғалыстарының саны қанша болса да, олардың жиыны, жалпылама алғанда, лездік-бұрандалық қозғалысқа эквивалент болады.

Қорыта айтқанда, қатты дененің бұрандалы қозғалысы ең жалпы қозғалыс болып табылады, ал ілгерілмелі қозғалысты, айналмалы қозғалысты, жазық және сфералық қозғалыстарды *бұрандалы қозғалыстың жекеленген түрлері* деп қарастыруға болады.

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY

СӘТБАЕВ УНИВЕРСИТЕТІ SATBAYEV UNIVERSITY