**ДӘРІС №4. Тақырыбы: Ғарыштық аппараттың ұйытқымаған қозғалысының теңдеуі.**

Дәрістің мақсаты: ғарыштық аппараттың ұйытқымаған қозғалысының теориялық негіздерін түсіндіру және оның математикалық моделін құру әдістерін меңгерту. Ньютонның екінші заңы мен бүкіләлемдік тартылыс заңын пайдалана отырып, ғарыш аппаратының орталық гравитациялық өрістегі қозғалыс теңдеуін шығару және оның физикалық мағынасын түсіндіру.

Дәріс жоспары:

1. Ғарыштық аппараттың қозғалысы туралы жалпы түсінік.
2. Ұйытқымаған қозғалыстың негізгі шарттары.
3. Ньютонның екінші заңы және қозғалыс теңдеуі.
4. Гравитациялық параметр.
5. Ұйытқымаған қозғалыстың сақталу заңдары.
6. Ғарыш аппаратының орбитасының түрлері.
7. Ұйытқымаған қозғалыстың полярлық координаталардағы теңдеулері.
8. Орбитаның теңдеуі.
9. Кеплер заңдары және ұйытқымаған қозғалыс.
10. Бастапқы шарттар және орбитаны анықтау.
11. Ұйытқымаған және ұйытқулы қозғалыс.
12. Қорытынды.

**Кіріспе**

Ғарыштық аппараттың қозғалысын зерттеу — астронавтика мен ғарыштық ұшу динамикасының негізгі міндеттерінің бірі. Ғарыш аппаратының траекториясын есептеу, орбитасын анықтау және оның кеңістіктегі орнын болжау үшін оның қозғалыс теңдеулерін құру қажет.

Ғарыштық аппараттың қозғалысын зерттеген кезде нақты жағдайда оған көптеген күштер әсер ететінін ескеру керек. Оларға Жердің тартылыс күші, Ай мен Күннің тартылысы, атмосфералық кедергі, Күн сәулесінің қысымы және басқа да әсерлер жатады. Алайда бастапқы теориялық есептеулерде есепті жеңілдету үшін ғарыш аппаратына тек негізгі тартушы дененің — мысалы, Жердің — гравитациялық әсері ғана әсер етеді деп қарастырылады.

Осындай идеалдандырылған қозғалыс **ұйытқымаған қозғалыс** деп аталады. Ұйытқымаған қозғалыс кезінде ғарыш аппаратының қозғалысы екі дене есебі немесе Кеплер есебі арқылы сипатталады. Бұл модель орбиталық қозғалыстың негізгі заңдылықтарын түсінуге және нақты орбиталарды есептеудің бастапқы негізін құруға мүмкіндік береді.

**1. Ұйытқымаған қозғалыс туралы түсінік**

**Ұйытқымаған қозғалыс** — ғарыш аппаратының бір ғана негізгі тартушы дененің орталық гравитациялық өрісінде қозғалысы.

Мысалы, Жерді айналып жүрген жасанды жер серігін қарастырғанда бірінші жуықтауда оған тек Жердің тартылыс күші әсер етеді деп есептеуге болады. Бұл жағдайда атмосфералық кедергі, Күн мен Айдың тартылысы және басқа да әлсіз әсерлер есепке алынбайды.

Ұйытқымаған қозғалыстың негізгі болжамдары:

- Жер немесе негізгі тартушы дене сфералық симметриялы деп қарастырылады;
- ғарыш аппаратының массасы негізгі дененің массасынан өте аз;
- аппаратқа тек негізгі дененің тартылыс күші әсер етеді;
- атмосфералық кедергі ескерілмейді;
- Күн сәулесінің қысымы және басқа пертурбациялық әсерлер ескерілмейді.

Бұл қарапайым модель ғарыш аппаратының қозғалысын математикалық түрде дәл және салыстырмалы түрде оңай сипаттауға мүмкіндік береді.

## 2. Ньютонның екінші заңы және қозғалыс теңдеуі

Ғарыш аппаратының қозғалысының негізгі теңдеуі Ньютонның екінші заңына негізделеді:

$$\mathbf{m\,d^2r/dt^2 = F.}$$

Мұндағы: $m$ — ғарыш аппаратының массасы;
$\mathbf{r}$ — аппараттың радиус-векторы;
$F$ — аппаратқа әсер ететін күш;
$t$ — уақыт.

Ұйытқымаған қозғалыста негізгі күш — гравитациялық тартылыс күші. Ньютонның бүкіләлемдік тартылыс заңына сәйкес:

$$\mathbf{F = -GMm/r^2 \cdot e_r,}$$

мұндағы: $G$ — гравитациялық тұрақты;
$M$ — Жердің массасы;
$r$ — Жер центрінен ғарыш аппаратына дейінгі қашықтық;
$\mathbf{e_r}$ — радиал бағыттағы бірлік вектор.

Минус таңбасы тартылыс күшінің Жер центріне қарай бағытталғанын көрсетеді.

Ньютонның екінші заңына қойсақ:

$$\mathbf{m\,d^2r/dt^2 = -GMm/r^3 \cdot r.}$$

Ғарыш аппаратының массасы теңдеудің екі жағында да қысқаратындықтан:

$$\mathbf{d^2r/dt^2 = -GM/r^3 \cdot r.}$$

Жердің гравитациялық параметрін

$$\mathbf{\mu = GM}$$

деп белгілесек, ұйытқымаған қозғалыстың негізгі векторлық теңдеуі:

$$\mathbf{d^2r/dt^2 = -\mu\, r/r^3.}$$

Бұл — ғарыштық аппараттың орталық гравитациялық өрістегі ұйытқымаған қозғалысының негізгі теңдеуі.

## 3. Қозғалыс теңдеуінің физикалық мағынасы

Алынған теңдеудің физикалық мағынасы өте маңызды. Ғарыш аппаратының үдеуі әрқашан Жердің центріне қарай бағытталған және оның шамасы Жер центріне дейінгі қашықтықтың квадратына кері пропорционал.

Үдеу шамасы:

$$\mathbf{a = \mu/r^2.}$$

Яғни аппарат Жерден алыстаған сайын оған әсер ететін гравитациялық үдеу азаяды.
Бұл теңдеу ғарыш аппаратының кеңістіктегі қозғалысын толық сипаттайды. Егер бастапқы уақыт мезетіндегі аппараттың орны және жылдамдығы белгілі болса, онда оның кейінгі қозғалысын теориялық түрде анықтауға болады.
Бастапқы шарттар:
$\mathbf{r(t_0) = r_0}$,
$\mathbf{v(t_0) = v_0}$.
Осы бастапқы параметрлер мен қозғалыс теңдеуі арқылы аппараттың болашақтағы траекториясын есептеуге болады.

## 4. Ұйытқымаған қозғалыстың интегралдары

Ұйытқымаған қозғалыстың маңызды қасиеттерінің бірі — бірнеше физикалық шаманың сақталуы.

### 4.1. Бұрыштық импульс моментінің сақталуы

Гравитациялық күш орталық күш болғандықтан, оның моменті Жер центріне қатысты нөлге тең:
$\mathbf{M = r \times F = 0}$.
Сондықтан бұрыштық импульс моменті сақталады:
$\mathbf{h = r \times v = const}$.
Мұндағы:
$h$ — меншікті бұрыштық импульс моменті;
$\mathbf{r}$ — радиус-вектор;
$\mathbf{v}$ — аппараттың жылдамдық векторы.
Бұл заң ғарыш аппаратының қозғалысы белгілі бір тұрақты жазықтықта өтетінін көрсетеді.
Демек, ұйытқымаған қозғалыстың траекториясы үш өлшемді кеңістікте кез келген бағытта өзгеріп кетпейді, ол тұрақты орбиталық жазықтықта орналасады.

### 4.2. Механикалық энергияның сақталуы

Ұйытқымаған қозғалыста гравитациялық өріс консервативті болғандықтан, аппараттың толық механикалық энергиясы сақталады.
Меншікті механикалық энергия:
$\mathbf{\varepsilon = v^2/2 - \mu/r = const}$.
Мұндағы:
$v^2/2$ — меншікті кинетикалық энергия;
$-\mu/r$ — меншікті потенциалдық энергия.
Бұл теңдеу орбитаның түрін анықтауда маңызды рөл атқарады.
Егер:
$\mathbf{\varepsilon < 0}$ болса — орбита тұйық, яғни эллипстік;
$\mathbf{\varepsilon = 0}$ болса — параболалық шекаралық траектория;
$\mathbf{\varepsilon > 0}$ болса — гиперболалық ашық траектория.

## 5. Ұйытқымаған қозғалыстың орбитасы

Ғарыш аппаратының ұйытқымаған қозғалыс траекториясы Кеплер заңдарына сәйкес конустық қималардың бірін құрайды.

Олар:

- шеңбер;
- эллипс;
- парабола;
- гипербола.

Жерді айналатын жасанды спутниктердің көпшілігі үшін энергия теріс болғандықтан, олардың орбиталары эллипстік немесе оның жеке жағдайы ретінде шеңберлік болып табылады.

Орбитаның пішінін сипаттайтын маңызды параметр — **эксцентриситет** (*e*).

- $e = 0$ — шеңбер;
- $0 < e < 1$ — эллипс;
- $e = 1$ — парабола;
- $e > 1$ — гипербола.

Эксцентриситет аппараттың траекториясының қаншалықты созылыңқы екенін сипаттайды.

## 6. Полярлық координаталардағы қозғалыс

Ұйытқымаған қозғалысты полярлық координаталар арқылы да сипаттауға болады.

Аппараттың орны екі негізгі шамамен беріледі:

- $r$ — Жер центрінен қашықтық;
- $\theta$ — орбиталық жазықтықтағы бұрыштық координата.

Радиал бағыттағы қозғалыс теңдеуі:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\mu/r^2.$$

Ал көлденең бағыттағы теңдеу:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Екінші теңдеуді интегралдасақ:

$$r^2\dot{\theta} = h = \text{const}.$$

Бұл өрнек бұрыштық импульс моментінің сақталу заңын көрсетеді.

Осыдан аппараттың перигей маңында жылдам қозғалатынын, ал апогей маңында баяулайтынын түсіндіруге болады.

## 7. Орбитаның теңдеуі

Ұйытқымаған қозғалыс үшін орбитаның полярлық теңдеуі:

$$r = p/(1 + e\cos\theta),$$

мұндағы: $p$ — орбитаның фокустық параметрі;
$e$ — эксцентриситет; $\theta$ — шын аномалия.

Фокустық параметр: $p = h^2/\mu$.

Бұл теңдеу ғарыш аппаратының траекториясын сипаттайтын негізгі теңдеулердің бірі.

Ол арқылы орбитаның геометриялық пішінін анықтауға болады. Эксцентриситеттің мәніне байланысты жоғарыда көрсетілген шеңберлік, эллипстік, параболалық және гиперболалық траекториялар алынады.

## 8. Кеплердің заңдары және ұйытқымаған қозғалыс

Ұйытқымаған қозғалыс Кеплердің үш заңымен тікелей байланысты.

**Бірінші заң:** ғарыш аппаратының орбитасы — фокусында Жер орналасқан конустық қима.

**Екінші заң:** радиус-вектор тең уақыт аралықтарында тең аудандар сызады.

Бұл заң бұрыштық импульс моментінің сақталуынан туындайды.

**Үшінші заң:** орбиталық периодтың квадраты орбитаның үлкен жарты осінің кубына пропорционал:

$$T^2 = (4\pi^2/\mu)a^3.$$

Мұндағы: $T$ — орбиталық период; $a$ — эллипстің үлкен жарты осі.

Бұл теңдеу әртүрлі биіктіктегі спутниктердің айналу периодтарын анықтауда қолданылады.

## 9. Ұйытқымаған қозғалыстың бастапқы шарттары

Ғарыш аппаратының қозғалысын анықтау үшін бастапқы жағдайларды білу қажет. Олар әдетте:

- бастапқы радиус-вектор;
- бастапқы жылдамдық векторы;
- бастапқы уақыт

арқылы беріледі.

Мысалы:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0,$$

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0.$$

Осы екі вектор аппараттың бастапқы күйін толық анықтауға мүмкіндік береді.

Бастапқы жылдамдықтың шамасы мен бағытын өзгерту арқылы әртүрлі орбиталар алуға болады. Сондықтан ғарыш аппаратын орбитаға шығару кезінде жылдамдықтың дәл мәнін және бағытын қамтамасыз ету өте маңызды.

## 10. Ұйытқымаған және ұйытқулы қозғалыстың айырмашылығы

Ұйытқымаған қозғалыс — идеалдандырылған модель. Нақты ғарыш аппаратының қозғалысына қосымша күштер әсер етеді.

Ұйытқулы қозғалысқа әсер ететін негізгі факторлар:

- Жердің нақты гравитациялық өрісі;
- Жердің атмосфералық кедергісі;
- Күннің тартылыс күші;
- Айдың тартылыс күші;
- Күн сәулесінің қысымы;
- басқа да әлсіз әсерлер.

Сондықтан нақты аппараттың орбитасы уақыт өте өзгереді. Ұйытқымаған қозғалыстың теңдеуі осы өзгерістерді зерттеудің бастапқы математикалық моделі болып табылады.
Ұйытқулы қозғалыс теңдеуін жалпы түрде:
$\mathbf{d^2r/dt^2 = -\mu r/r^3 + a_p}$
деп жазуға болады.
Мұндағы $a_p$ — барлық қосымша немесе ұйытқушы үдеулердің қосындысы.

## 11. Ұйытқымаған қозғалыс теңдеуінің практикалық маңызы

Ұйытқымаған қозғалыс теңдеуі ғарыштық баллистиканың көптеген есептерінің негізін құрайды. Ол арқылы:

- ғарыш аппаратының бастапқы орбитасын анықтауға;
- орбиталық жылдамдықты есептеуге;
- ұшу уақытын анықтауға;
- перигей мен апогейді табуға;
- орбитаның пішінін анықтауға;
- аппараттың белгілі бір уақыттағы орнын болжауға

болады.
Сонымен қатар бұл модель күрделі компьютерлік орбиталық модельдердің бастапқы жуықтауы ретінде қолданылады.
Ғарыш аппаратын жобалау және оның қозғалысын басқару кезінде алдымен ұйытқымаған орбита есептеледі, кейін оған әсер ететін қосымша факторлар енгізіледі.

## Қорытынды

Ғарыштық аппараттың ұйытқымаған қозғалысы — орталық гравитациялық өрістегі идеалдандырылған қозғалыс. Оның негізгі математикалық моделі Ньютонның екінші заңы мен бүкіләлемдік тартылыс заңына негізделеді.
Ұйытқымаған қозғалыстың негізгі теңдеуі:
$\mathbf{d^2r/dt^2 = -\mu r/r^3.}$
Бұл теңдеу аппараттың үдеуінің Жер центріне бағытталғанын және оның шамасы Жер центріне дейінгі қашықтықтың квадратына кері пропорционал екенін көрсетеді.
Ұйытқымаған қозғалыста бұрыштық импульс моменті мен механикалық энергия сақталады. Осы заңдардың негізінде Кеплер заңдары шығады және ғарыш аппаратының траекториясы шеңбер, эллипс, парабола немесе гипербудың толық моделін бермегенімен, орбиталық қозғалысты зерттеудің ең маңызды бастапқы негізі болып табылады. Нақты есептерде Жердің гравитациялық өрісінің ерекшеліктері, атмосфералық кедергі, Күн мен Айдың тартылысы және басқа да ұйытқушы әсерлер қосола түрінде анықталады.
Ұйытқымаған қозғалыс нақты ғарыштық ұшудың толық моделін бермегенімен, орбиталық қозғалысты зерттеудің ең маңызды бастапқы негізі болып табылады. Нақты есептерде Жердің гравитациялық өрісінің

ерекшеліктері, атмосфералық кедергі, Күн мен Айдың тартылысы және басқа да ұйытқушы әсерлер қосымша ескеріледі.
Осылайша, ұйытқымаған қозғалыстың теңдеуін меңгеру ғарыштық аппараттардың орбиталарын есептеу, талдау және басқару үшін қажетті негізгі теориялық білім болып табылады.

**Бақылау сұрақтары**

1. Ұйытқымаған қозғалыс дегеніміз не?
2. Ұйытқымаған қозғалысты қарастырғанда қандай негізгі болжамдар қабылданады?
3. Ғарыш аппаратының ұйытқымаған қозғалысы қандай физикалық заңдарға негізделеді?
4. Ньютонның екінші заңын ғарыш аппаратының қозғалысына қалай қолдануға болады?
5. Бүкіләлемдік тартылыс заңы қалай тұжырымдалады?
6. Ғарыш аппаратының ұйытқымаған қозғалысының негізгі векторлық теңдеуін жазыңыз.
7. Қозғалыс теңдеуіндегі радиус-вектордың физикалық мағынасы қандай?
8. Гравитациялық параметр дегеніміз не?
9. Гравитациялық үдеу аппараттың Жерден қашықтығына қалай тәуелді?
10. Ұйытқымаған қозғалыста қандай физикалық шамалар сақталады?
11. Бұрыштық импульс моментінің сақталу заңы нені білдіреді?
12. Механикалық энергияның сақталу заңын түсіндіріңіз.
13. Ғарыш аппаратының толық механикалық энергиясы орбитаның түрін қалай анықтайды?
14. Эксцентриситет дегеніміз не?
15. Шеңберлік және эллипстік орбиталардың айырмашылығы қандай?
16. Параболалық және гиперболалық траекториялар қандай жағдайда пайда болады?
17. Ұйытқымаған қозғалыстың полярлық координаталардағы теңдеулерін атаңыз.
18. Орбитаның полярлық теңдеуі қандай түрде жазылады?
19. Фокустық параметр дегеніміз не?
20. Кеплердің бірінші заңын түсіндіріңіз.
21. Кеплердің екінші заңы нені сипаттайды?
22. Кеплердің үшінші заңы қандай шамалардың арасындағы байланысты көрсетеді?
23. Ғарыш аппаратының орбиталық периоды қандай параметрлерге тәуелді?
24. Ғарыш аппаратының бастапқы қозғалыс күйін анықтау үшін қандай мәліметтер қажет?
25. Бастапқы жылдамдықтың шамасы мен бағыты орбитаның пішініне қалай әсер етеді?
26. Ұйытқымаған қозғалыс пен ұйытқулы қозғалыстың айырмашылығы қандай?

27. Ғарыш аппаратына әсер ететін негізгі ұйытқушы күштерді атаңыз.
28. Атмосфералық кедергі ғарыш аппаратының орбитасына қалай әсер етеді?
29. Күн мен Айдың тартылысы ғарыш аппаратының қозғалысына қалай ықпал етеді?
30. Ұйытқымаған қозғалыстың теңдеуін білу ғарыштық баллистикада не үшін қажет?