ДӘРІС №5. Тақырыбы: Ұйытқымаған қозғалыс теңдеулерінің бірінші интегралдары.

Дәрістің мақсаты: студенттерге ұйытқымаған қозғалыс теңдеулерінің бірінші интегралдары туралы теориялық түсінік қалыптастыру және олардың ғарыштық аппараттардың орбиталық қозғалысын зерттеудегі маңызын түсіндіру.

Дәріс жоспары:

1. Бірінші интеграл туралы жалпы түсінік.
2. Ұйытқымаған қозғалыстың негізгі теңдеуі.
3. Бұрыштық импульс моментінің бірінші интегралы.
4. Кеплердің екінші заңы.
5. Механикалық энергияның бірінші интегралы.
6. Энергия интегралы және орбита түрлері.
7. Вис-вива теңдеуі.
8. Эксцентриситет векторы.
9. Бірінші интегралдар және орбита теңдеуі.
10. Бірінші интегралдардың практикалық маңызы.
11. Ұйытқымаған және ұйытқулы қозғалыс.
12. Қорытынды.

Кіріспе

Ғарыштық аппараттардың қозғалысын зерттеу ғарыштық баллистиканың негізгі міндеттерінің бірі болып табылады. Ғарыш аппаратының орбитасын, жылдамдығын, кеңістіктегі орнын және қозғалыс уақытын анықтау үшін оның қозғалыс теңдеулерін шешу қажет. Алдыңғы тақырыпта қарастырылғандай, ұйытқымаған қозғалыс кезінде ғарыш аппаратына негізгі тартушы дененің, мысалы Жердің, орталық гравитациялық күші әсер етеді деп қабылданады. Бұл жағдайда қозғалыс теңдеуі: $\mathbf{d^2r/dt^2 = -\mu r/r^3}$ түрінде жазылады. Мұндағы **r** — ғарыш аппаратының радиус-векторы, *r* — оның модулі, ал $\boldsymbol{\mu = GM}$ — негізгі тартушы дененің гравитациялық параметрі. Екінші ретті дифференциалдық теңдеуді тікелей шешудің орнына оның **бірінші интегралдарын** пайдалану өте тиімді. Бірінші интегралдар қозғалыстың белгілі бір сақталатын шамаларын көрсетеді және орбитаның негізгі қасиеттерін анықтауға мүмкіндік береді. Ұйытқымаған қозғалыстың негізгі бірінші интегралдарына **бұрыштық импульс моментінің интегралы, энергия интегралы және Лаплас–Рунге–Ленц векторының интегралы** жатады. Бұл шамалар ғарыш аппаратының қозғалысын талдауда маңызды рөл атқарады.

1. Бірінші интеграл ұғымы

Дифференциалдық теңдеудің **бірінші интегралы** деп қозғалыс барысында тұрақты болып қалатын және бастапқы шарттар арқылы анықталатын шаманы айтамыз. Мысалы, егер белгілі бір шама үшін

$\mathbf{dC/dt = 0}$

болса, онда **C = const** болады. Бұл шаманың қозғалыс кезінде өзгермейтінін білдіреді. Бірінші интегралдарды пайдалану қозғалыс теңдеулерінің ретін төмендетуге мүмкіндік береді. Мысалы, екінші ретті қозғалыс теңдеуінен жылдамдық пен координаталарды байланыстыратын бірінші ретті қатынас алуға болады.

Ұйытқымаған қозғалыстың бірінші интегралдары физикалық сақталу заңдарымен тікелей байланысты:

- бұрыштық импульс моментінің сақталуы;
- механикалық энергияның сақталуы;
- орбитаның бағытын сипаттайтын интеграл.

2. Бұрыштық импульс моментінің бірінші интегралы

Ұйытқымаған қозғалыс кезінде ғарыш аппаратына әсер ететін гравитациялық күш орталық күш болып табылады. Оның бағыты әрқашан негізгі дененің центріне бағытталған. Қозғалыс теңдеуін: $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\mathbf{r}/r^3$ түрінде қарастырайық.

Оны радиус-векторға векторлық көбейтіндіге көбейтеміз: $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$.

Себебі $\mathbf{r}$ және $\ddot{\mathbf{r}}$ векторлары бір бағытта орналасқан. Ал $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$ болғандықтан: $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$. Осыдан: $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{const}$ аламыз.

Мұндағы $\mathbf{h}$ — ғарыш аппаратының бірлік массасына келтірілген бұрыштық импульс моменті, ал $\mathbf{v}$ — оның жылдамдық векторы. Бұл — ұйытқымаған қозғалыстың бірінші маңызды интегралы. Оның физикалық мағынасы: ғарыш аппаратының бұрыштық импульс моменті қозғалыс кезінде тұрақты болады. Бұл заңнан ғарыш аппаратының қозғалысы белгілі бір тұрақты жазықтықта өтетіні шығады. Яғни орбитаның жазықтығы кеңістікте өзгермейді.

3. Аудандар заңы

Бұрыштық импульс моментінің сақталуынан Кеплердің екінші заңы шығады.

Ғарыш аппаратының аз уақыт ішінде радиус-векторы сызатын аудан:

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$. Уақыт бойынша туынды алсақ: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$.

Ал бұрыштық импульс моментінің модулі:

$h = r^2\dot{\theta}$. Сондықтан: $\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = const$. Демек, ғарыш аппаратының радиус-векторы тең уақыт аралықтарында тең аудандар сызады. Бұл — **Кеплердің екінші заңы**. Осы заң бойынша аппарат Жерге жақындаған кезде жылдамырақ, ал Жерден алыстаған кезде баяуырақ қозғалады.

4. Механикалық энергияның бірінші интегралы

Ұйытқымаған қозғалыстың екінші негізгі бірінші интегралы — механикалық энергияның сақталу заңы. Қозғалыс теңдеуін жылдамдық векторына скаляр көбейтіндімен көбейтеміз: $\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$. Сол жақты:

$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v^2/2)$ түрінде жазуға болады. Ал: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r\dot{r}$. Сондықтан:

$\frac{d}{dt}(v^2/2) = -\frac{\mu}{r^2}\dot{r}$. Гравитациялық потенциалдың туындысын пайдалансақ:

$\frac{d}{dt}(\mu/r) = -\frac{\mu}{r^2}\dot{r}$.

Осыдан: $\frac{d}{dt}(v^2/2 - \mu/r) = 0$.

Демек: **ε = v²/2 - μ/r = const.**
Бұл — **меншікті механикалық энергияның бірінші интегралы**.
Мұндағы:

- **v²/2** — бірлік массаға келтірілген кинетикалық энергия;
- **-μ/r** — бірлік массаға келтірілген гравитациялық потенциалдық энергия;
- **ε** — меншікті орбиталық энергия.

Бұл интеграл ғарыш аппаратының орбитасының түрін анықтауда өте маңызды.

5. Энергия интегралы және орбитаның түрі
Меншікті механикалық энергияның мәніне қарай ғарыш аппаратының траекториясы анықталады. **ε < 0.** Егер механикалық энергия теріс болса, ғарыш аппаратының қозғалысы тұйық орбита болады. Бұл жағдайда траектория — **эллипс**. Шеңберлік орбита эллипстің ерекше жағдайы болып табылады. **ε = 0.** Егер: **ε = 0.** болса, аппараттың траекториясы **парабола** болады. Бұл жағдайда аппарат негізгі тартушы денеден шексіз алыстағанда оның жылдамдығы нөлге ұмтылады. **ε > 0.** Егер: **ε > 0.** болса, ғарыш аппаратының траекториясы **гипербола** болады. Бұл жағдайда аппарат негізгі дененің тартылыс өрісінен шығып, шексіз алыстаған кезде де белгілі бір қалдық жылдамдыққа ие болады. Осылайша, энергия интегралы орбитаның физикалық сипатын анықтайтын негізгі параметрлердің бірі болып табылады.

6. Вис-вива теңдеуі
Энергияның бірінші интегралынан ғарыштық баллистикада кеңінен қолданылатын **вис-вива теңдеуін** алуға болады. Эллипстік орбита үшін меншікті энергия: **ε = -μ/(2a),** мұндағы *a* — орбитаның үлкен жарты осі.
Оны энергия интегралына қойсақ: **v²/2 - μ/r = -μ/(2a).** Осыдан:
v² = μ(2/r - 1/a). Демек: **v = √[μ(2/r - 1/a)].** Бұл — **вис-вива теңдеуі**.
Ол ғарыш аппаратының орбитаның кез келген нүктесіндегі жылдамдығын анықтауға мүмкіндік береді. Теңдеуден аппараттың жылдамдығы *r* қашықтығына және орбитаның үлкен жарты осіне тәуелді екенін көруге болады.

7. Лаплас–Рунге–Ленц векторы
Ұйытқымаған екі дене есебінде тағы бір маңызды сақталатын шама бар. Ол — **Лаплас–Рунге–Ленц векторы**. Ол орбитаның кеңістіктегі бағытын және оның эксцентриситетін сипаттауға мүмкіндік береді. Векторлық түрде оны:
e = (v × h)/μ - r/r. түрінде жазуға болады. Мұндағы: **e** — эксцентриситет векторы; **v** — жылдамдық векторы; **h** — меншікті бұрыштық импульс моменті; **r/r** — радиал бағыттағы бірлік вектор. Ұйытқымаған қозғалыста:
e = const. Эксцентриситет векторының бағыты орбитаның перицентріне қарай бағытталған. Ал оның модулі орбитаның эксцентриситетіне тең:
|e| = e.

Сондықтан бұл интеграл орбитаның пішінін ғана емес, оның кеңістіктегі бағдарын да анықтауға мүмкіндік береді.

8. Бірінші интегралдардан орбитаның теңдеуін алу

Бұрыштық импульс моменті мен энергия интегралдарын бірге пайдаланып, ғарыш аппаратының орбиталық қозғалысын анықтауға болады. Полярлық координаталарда: $\mathbf{h = r^2\dot{\theta}}$.

Ал радиал және бұрыштық қозғалысты байланыстыра отырып, орбитаның теңдеуін алуға болады: $\mathbf{r = p/(1 + e\cos\theta)}$. Мұндағы: p — фокустық параметр; $\mathbf{p = h^2/\mu}$. Бұл теңдеу конустық қиманың жалпы теңдеуі болып табылады.

Эксцентриситеттің мәніне қарай:

- $\mathbf{e = 0}$ — шеңбер;
- $\mathbf{0 < e < 1}$ — эллипс;
- $\mathbf{e = 1}$ — парабола;
- $\mathbf{e > 1}$ — гипербола.

Осылайша бірінші интегралдар ғарыш аппаратының нақты траекториясын сипаттайтын орбита теңдеуіне әкеледі.

9. Бірінші интегралдардың физикалық маңызы

Ұйытқымаған қозғалыстың бірінші интегралдары тек математикалық шамалар емес, олардың нақты физикалық мағынасы бар.

Бұрыштық импульс моменті орбитаның жазықтығын және қозғалыстың аудандық жылдамдығын сипаттайды.

Механикалық энергия орбитаның ашық немесе тұйық болуын және оның өлшемдерін анықтауға мүмкіндік береді.

Эксцентриситет векторы орбитаның пішіні мен перицентр бағытын сипаттайды.

Бірінші интегралдарды пайдалану арқылы күрделі дифференциалдық теңдеулерді толық шешпей-ақ, ғарыш аппаратының қозғалысының көптеген маңызды қасиеттерін анықтауға болады.

10. Бірінші интегралдардың практикалық қолданылуы

Бірінші интегралдар ғарыштық баллистиканың көптеген есептерінде пайдаланылады.

Олардың көмегімен:

- орбитаның түрін анықтауға;
- ғарыш аппаратының жылдамдығын есептеуге;
- перигей мен апогей параметрлерін анықтауға;
- орбиталық периодты есептеуге;
- орбитаның жазықтығын анықтауға;
- аппараттың траекториясын болжауға;
- ғарыштық маневрлердің нәтижесін бағалауға

болады.

Мысалы, белгілі бір нүктедегі аппараттың радиусы мен жылдамдығы белгілі болса, энергия интегралы арқылы оның орбитасының үлкен жарты осін

анықтауға болады. Ал радиус-вектор мен жылдамдық векторы белгілі болса, бұрыштық импульс моментін есептеп, орбитаның жазықтығын анықтауға мүмкіндік бар.

11. Нақты қозғалыстағы бірінші интегралдардың өзгеруі

Ұйытқымаған қозғалыстың бірінші интегралдары тек идеалдандырылған екі дене есебінде тұрақты болады. Нақты ғарыш аппараттарына қосымша күштер әсер етеді.

Оларға:

- Жердің атмосфералық кедергісі;
- Жердің сфералық емес гравитациялық өрісі;
- Күннің тартылыс күші;
- Айдың тартылыс күші;
- Күн сәулесінің қысымы;
- басқа да әлсіз күштер

жатады.

Бұл әсерлер болған жағдайда энергия мен бұрыштық импульс моменті жалпы жағдайда тұрақты болмайды. Олардың уақыт бойынша өзгеруі **ұйытқулы қозғалысты** сипаттайды.

Сондықтан бірінші интегралдар нақты орбиталарды есептеудің бастапқы эталоны ретінде қарастырылады. Ал нақты есептеулерде ұйытқушы әсерлер қосымша енгізіледі.

Қорытынды

Ұйытқымаған қозғалыс теңдеулерінің бірінші интегралдары ғарыштық аппараттардың орбиталық қозғалысын зерттеудің негізгі теориялық құралдарының бірі болып табылады.

Негізгі бірінші интегралдарға:

1. Бұрыштық импульс моменті:

$$\mathbf{h = r \times v = const.}$$

2. Меншікті механикалық энергия:

$$\varepsilon = v^2/2 - \mu/r = const.$$

3. Эксцентриситет векторы:

$$\mathbf{e = (v \times h)/\mu - r/r = const.}$$

жатады.

Осы интегралдар арқылы Кеплер заңдарын, орбитаның теңдеуін, аппараттың жылдамдығын және орбитаның түрін анықтауға болады.

Ұйытқымаған қозғалыстың бірінші интегралдарын білу ғарыштық аппараттардың қозғалысын талдау үшін ғана емес, сонымен қатар орбитаны есептеу, ғарыштық маневрлерді жоспарлау және нақты ұшу траекторияларын зерттеу үшін де маңызды.

Нақты ғарыштық қозғалыста қосымша күштер әсер ететіндіктен, бірінші интегралдардың тұрақтылығы бұзылады. Осыған байланысты ұйытқымаған қозғалыс моделі нақты ұйытқулы қозғалысты зерттеудің бастапқы теориялық негізі болып табылады.

Бақылау сұрақтары

1. Бірінші интеграл дегеніміз не?
2. Бірінші интегралдың физикалық мағынасы қандай?
3. Ұйытқымаған қозғалыстың негізгі бірінші интегралдарын атаңыз.
4. Ұйытқымаған қозғалыстың негізгі теңдеуі қалай жазылады?
5. Бұрыштық импульс моменті дегеніміз не?
6. Ұйытқымаған қозғалыста бұрыштық импульс моменті не себепті сақталады?
7. Бұрыштық импульс моментінің сақталуы орбитаның жазықтығына қалай әсер етеді?
8. Аудандық жылдамдық дегеніміз не?
9. Кеплердің екінші заңы бұрыштық импульс моментімен қалай байланысты?
10. Механикалық энергияның бірінші интегралы қалай жазылады?
11. Меншікті механикалық энергия дегеніміз не?
12. Кинетикалық және потенциалдық энергиялардың ғарыш аппаратының қозғалысындағы рөлі қандай?
13. Механикалық энергияның мәні орбитаның түрін қалай анықтайды?
14. Қандай жағдайда ғарыш аппараты эллипстік орбитада қозғалады?
15. Параболалық траектория қандай жағдайда пайда болады?
16. Гиперболалық траекторияның негізгі ерекшелігі қандай?
17. Вис-вива теңдеуі дегеніміз не?
18. Вис-вива теңдеуі арқылы қандай шаманы анықтауға болады?
19. Орбитаның үлкен жарты осі дегеніміз не?
20. Эксцентриситет дегеніміз не?
21. Эксцентриситет векторы нені сипаттайды?
22. Эксцентриситет векторының бағыты қандай бағытты көрсетеді?
23. Орбитаның полярлық теңдеуі қалай жазылады?
24. Фокустық параметр дегеніміз не?
25. Бірінші интегралдар арқылы орбитаның қандай параметрлерін анықтауға болады?
26. Ұйытқымаған қозғалыстың бірінші интегралдары нақты қозғалыста не себепті тұрақты болмайды?
27. Ғарыш аппаратының қозғалысына қандай ұйытқушы күштер әсер етеді?
28. Атмосфералық кедергі механикалық энергияға қалай әсер етеді?
29. Бірінші интегралдардың ғарыштық баллистикадағы практикалық маңызы қандай?
30. Ұйытқымаған қозғалыстың бірінші интегралдарын білу ғарыш аппараттарының орбиталарын есептеуде не үшін қажет?