ДӘРІС №8. Тақырыбы: Ғарыштық аппараттың перицентрден кез келген нүктеге дейінгі ұшу уақыты. Кеплер теңдеуі.

Дәрістің мақсаты: студенттерге ғарыштық аппараттың эллипстік орбита бойымен қозғалысы кезінде перицентрден орбитаның кез келген нүктесіне дейінгі ұшу уақытын анықтау әдістерін түсіндіру және Кеплер теңдеуінің физикалық әрі математикалық мағынасын меңгерту.

Дәріс жоспары:

1. Орбиталық қозғалыста уақытты анықтау мәселесі.
2. Перицентр және апоцентр.
3. Шын аномалия.
4. Эксцентрлік аномалия.
5. Орташа аномалия.
6. Кеплер теңдеуі.
7. Перицентрден кез келген нүктеге дейінгі ұшу уақытын анықтау.
8. Перицентрден апоцентрге дейінгі ұшу уақыты.
9. Орбиталық период.
10. Кеплер теңдеуін сандық шешу.
11. Ғарыш аппаратының орбитадағы бірқалыпты емес қозғалысы.
12. Кеплер теңдеуінің практикалық қолданылуы.
13. Қорытынды.

Кіріспе

Ғарыштық аппараттың орбиталық қозғалысын зерттеу кезінде оның траекториясын ғана емес, белгілі бір орбиталық нүктеге қанша уақытта жететінін де анықтау маңызды. Әсіресе ғарыш аппаратының перицентрден орбитаның кез келген нүктесіне дейінгі ұшу уақытын есептеу орбиталық қозғалысты болжау, навигация және ғарыштық аппараттарды басқару есептерінде кеңінен қолданылады. йытқымаған қозғалыс жағдайында ғарыш аппараты орталық гравитациялық өрісте қозғалады және оның траекториясы конустық қималардың бірі — эллипс, парабола немесе гипербола болуы мүмкін. Уақыт бойынша қозғалысты сипаттау үшін орбитаның геометриялық параметрлерімен қатар арнайы аномалиялар енгізіледі.

Эллипстік орбитада бұл есепті шешуде **Кеплер теңдеуі** ерекше маңызды. Ол уақытты орташа аномалиямен байланыстырады. Ал орташа аномалия эксцентрлік аномалия арқылы анықталады.

1. Орбиталық қозғалыста уақытты анықтау мәселесі

Ғарыш аппаратының орбитадағы орнын анықтау үшін оның:

- орбита элементтері;
- бастапқы жағдайы;
- белгілі уақыттағы орны

туралы ақпарат қажет.

Орбитаның геометриялық теңдеуі аппараттың белгілі бір нүктедегі орнын анықтағанымен, ол аппараттың сол нүктеге **қанша уақытта** жететінін тікелей көрсетпейді.

Сондықтан орбиталық қозғалысты уақыт бойынша сипаттайтын қосымша теңдеу қажет.
Эллипстік орбитада бұл мақсатта үш түрлі аномалия қолданылады:

1. **Шын аномалия — ν**;
2. **Эксцентрлік аномалия — E**;
3. **Орташа аномалия — M**.

Олардың арасында белгілі математикалық байланыс бар.

2. Шын аномалия
Шын аномалия **ν** — перицентр бағыты мен ғарыш аппаратының ағымдағы радиус-векторы арасындағы бұрыш.
Перицентрде: **ν = 0°.** Апоцентрде: **ν = 180°.**
Шын аномалия аппараттың орбитадағы нақты геометриялық орнын сипаттайды.
Эллипстік орбитаның теңдеуі: $\mathbf{r = a(1 - e^2)/(1 + e\cos\nu).}$
Мұндағы:

- r — негізгі тартушы денеден аппаратқа дейінгі қашықтық;
- a — орбитаның үлкен жарты осі;
- e — эксцентриситет;
- ν — шын аномалия.

Алайда ν арқылы уақытты тікелей анықтау ыңғайсыз. Сондықтан эксцентрлік аномалия енгізіледі.

3. Эксцентрлік аномалия
Эксцентрлік аномалия **E** — эллипстік орбитадағы қозғалысты уақыт бойынша сипаттауға мүмкіндік беретін көмекші бұрыштық параметр.
Ол геометриялық түрде эллипске сырттай сызылған шеңбер арқылы анықталады. Шын аномалия мен эксцентрлік аномалия арасындағы байланыс: $\mathbf{\tan(\nu/2) = \sqrt{[(1 + e)/(1 - e)]}\tan(E/2).}$ Кері түрде:
$\mathbf{\tan(E/2) = \sqrt{[(1 - e)/(1 + e)]}\tan(\nu/2).}$ Сонымен қатар радиус пен эксцентрлік аномалия арасындағы байланыс: $\mathbf{r = a(1 - e\cos E).}$ Бұл теңдеу орбитадағы аппараттың қашықтығын эксцентрлік аномалия арқылы анықтауға мүмкіндік береді. Перицентрде: $\mathbf{E = 0.}$ Апоцентрде: $\mathbf{E = \pi.}$

4. Орташа аномалия
Уақытпен тікелей байланысты негізгі шама — **орташа аномалия M**.
Орташа аномалия:
$$\mathbf{M = n(t - \tau)}$$
түрінде анықталады.
Мұндағы:

- M — орташа аномалия;
- n — орташа қозғалыс;
- t — қарастырылып отырған уақыт;
- τ — перицентрден өту уақыты.

Орташа қозғалыс: $\mathbf{n = \sqrt{(\mu/a^3)}}$. Оны орбиталық период арқылы да жазуға болады: $\mathbf{n = 2\pi/T}$. Мұнда T — орбиталық период.

Орташа аномалия аппараттың орбитада бірқалыпты бұрыштық жылдамдықпен қозғалып жатқандай есептелетін шартты бұрыш болып табылады. Нақты жағдайда ғарыш аппараты орбитада бірқалыпты қозғалыс жасамайды. Ол перицентр маңында жылдамырақ, ал апоцентр маңында баяуырақ қозғалады. Сондықтан M нақты геометриялық бұрыш емес, уақытты есептеуге ыңғайлы математикалық параметр.

5. Кеплер теңдеуі

Орташа аномалия мен эксцентрлік аномалияның арасындағы негізгі байланыс **Кеплер теңдеуі** деп аталады:

$$\mathbf{M = E - e \sin E.}$$

Бұл теңдеу эллипстік орбитадағы қозғалыс уақытын анықтаудың негізгі теңдеулерінің бірі.

Перицентрден бастап есептегенде: $\mathbf{M = n(t - \tau).}$ Сондықтан:

$$\mathbf{n(t - \tau) = E - e \sin E.}$$

Осыдан ғарыш аппаратының перицентрден белгілі бір нүктеге дейін ұшу уақытын:

$$\mathbf{\Delta t = (E - e \sin E)/n}$$

формуласы бойынша анықтауға болады.

Ал $n = \sqrt{(\mu/a^3)}$ болғандықтан: $\mathbf{\Delta t = \sqrt{(a^3/\mu)}(E - e \sin E).}$

Бұл формула эллипстік орбитада перицентрден кез келген нүктеге дейінгі ұшу уақытын есептеудің негізгі өрнегі болып табылады.

6. Перицентрден берілген нүктеге дейінгі уақытты есептеу тәртібі

Есепті шешу үшін бірнеше кезең орындалады.

1-кезең. Орбита параметрлерін анықтау

Алдымен:

- үлкен жарты ось a;
- эксцентриситет e;
- гравитациялық параметр μ

анықталуы қажет.

2-кезең. Нүктенің шын аномалиясын анықтау

Аппараттың орбитадағы орны v арқылы берілсе, алдымен оның эксцентрлік аномалиясы есептеледі:

$$\mathbf{\tan(E/2) = \sqrt{[(1-e)/(1+e)]}\ \tan(v/2).}$$

3-кезең. Орташа аномалияны анықтау

Кеплер теңдеуі:

$$\mathbf{M = E - e \sin E}$$

бойынша M анықталады.

4-кезең. Орташа қозғалысты есептеу

$$\mathbf{n = \sqrt{(\mu/a^3)}.}$$

5-кезең. Ұшу уақытын анықтау

Перицентрден есептегенде:

Δt = M/n. Демек: **Δt = (E - e sinE)/n.** Осы алгоритм арқылы аппараттың перицентрден орбитаның кез келген нүктесіне дейінгі қозғалыс уақытын есептеуге болады.

7. Кеплер теңдеуінің физикалық мағынасы

Кеплер теңдеуі тек математикалық формула ғана емес, ғарыш аппаратының орбитадағы бірқалыпты емес қозғалысын сипаттайды. Аппарат перицентрге жақындағанда оның жылдамдығы жоғарылайды. Сондықтан ол орбитаның осы бөлігін қысқа уақытта өтеді. Апоцентр маңында аппараттың жылдамдығы төмендейді. Сол себепті ол орбитаның осы бөлігінде ұзағырақ уақыт өткізеді. Бұл құбылыс Кеплердің екінші заңымен байланысты:

Радиус-вектор тең уақыт аралығында тең аудандар сызады.

Яғни аппараттың радиус-векторы тең уақыт аралығында тең аудандарды сызады. Сондықтан аппараттың бұрыштық қозғалысы тұрақты емес, бірақ аудандық жылдамдығы тұрақты болады.

8. Перицентрден апоцентрге дейінгі ұшу уақыты

Апоцентрде: **E = π.** Кеплер теңдеуіне сәйкес: **M = π - e sinπ.** Ал: **sinπ = 0.**
Сондықтан: **M = π.** Осыдан: **Δt = π/n.** Ал: **n = 2π/T.** болғандықтан: **Δt = T/2.**
Демек, эллипстік орбитада ғарыш аппараты перицентрден апоцентрге дейін **орбиталық периодтың жартысына тең уақытта** ұшады.
Сол сияқты апоцентрден келесі перицентрге дейінгі уақыт та: **T/2** болады.

9. Перицентрден перицентрге дейінгі қозғалыс

Аппараттың бір перицентрден келесі перицентрге дейінгі толық ұшу уақыты орбиталық периодқа тең: $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}}$**.** Бұл Кеплердің үшінші заңының динамикалық түрде жазылған түрі. Орбитаның үлкен жарты осі артқан сайын период та артады: **T ∝ a^(3/2).** Яғни үлкен орбиталарда ғарыш аппараты бір айналымды ұзағырақ уақытта жасайды.

10. Кеплер теңдеуін шешудің ерекшелігі

Кеплер теңдеуі: **M = E - e sinE** теңдеуінің маңызды ерекшелігі — *E* шамасы теңдеудің екі жағында да кездеседі. Сондықтан жалпы жағдайда *E*-ні қарапайым алгебралық түрлендіру арқылы бірден табу мүмкін емес.
Оны сандық әдістермен анықтауға болады.
Мысалы, итерациялық әдіс қолданылуы мүмкін: $\mathbf{E_{k+1} = M + e\ sinE_k}$**.**
Бастапқы жуық мән ретінде: $\mathbf{E_0 = M}$ алуға болады.
Егер эксцентриситет үлкен болса немесе жоғары дәлдік қажет болса, Ньютон әдісі сияқты сандық әдістерді қолдануға болады.
Ньютон әдісі: $\mathbf{E_{k+1} = E_k - (E_k - e\ sinE_k - M)/(1 - e\ cosE_k)}$**.**
Бұл әдіс Кеплер теңдеуін жоғары дәлдікпен шешуге мүмкіндік береді.

11. Уақыт пен шын аномалия арасындағы байланыс

Практикалық есептерде көбінесе аппараттың шын аномалиясы *ν* белгілі болады, ал ұшу уақытын табу қажет.

Бұл жағдайда есептеу тізбегі: **ν → E → M → Δt** түрінде орындалады.
Яғни:

1. шын аномалиядан *E* анықталады;
2. *E* арқылы орташа аномалия *M* есептеледі;
3. *M* арқылы уақыт анықталады.

Негізгі формулалар:
tan(E/2) = √[(1-e)/(1+e)] tan(ν/2), M = E - e sinE, Δt = M/n, n = √(μ/a³).
Осы төрт өрнек эллипстік орбитадағы уақытты анықтаудың негізгі математикалық аппаратын құрайды.

12. Кеплер теңдеуінің ғарыштық баллистикадағы маңызы

Кеплер теңдеуі ғарыштық аппараттардың қозғалысын есептеуде кеңінен қолданылады.
Оның көмегімен:

- аппараттың белгілі уақыттағы орнын анықтауға;
- перицентрден белгілі нүктеге дейінгі ұшу уақытын есептеуге;
- апоцентрге жету уақытын анықтауға;
- орбиталық периодты есептеуге;
- спутниктің орбитадағы қозғалысын болжауға;
- орбиталық маневрлердің уақытын анықтауға;
- ғарыш аппараттарының навигациялық есептерін орындауға

болады.
Кеплер теңдеуі әсіресе екі дене есебінің шеңберінде өте маңызды. Нақты ғарыштық аппараттардың қозғалысында Жердің атмосфералық кедергісі, Жердің сфералық емес гравитациялық өрісі, Ай мен Күннің тартылысы сияқты ұйытқушы факторлар болғандықтан, есептеулерді нақтылау үшін қосымша әдістер қолданылады.

13. Қарапайым есептік мысалдың жалпы схемасы

Ғарыш аппараты эллипстік орбитада қозғалады делік. Оның үлкен жарты осі *a*, эксцентриситеті *e* және белгілі бір нүктедегі шын аномалиясы *ν* берілсін.
Перицентрден осы нүктеге дейінгі уақытты анықтау үшін:
1. Эксцентрлік аномалия:
tan(E/2) = √[(1-e)/(1+e)] tan(ν/2).
2. Орташа аномалия:
M = E - e sinE.
3. Орташа қозғалыс:
n = √(μ/a³).
4. Ұшу уақыты:
Δt = M/n.
Осылайша есептеу барысында геометриялық сипаттама — шын аномалия — уақыттық сипаттамаға, яғни ұшу уақытына түрлендіріледі.

Қорытынды

Ғарыштық аппараттың перицентрден кез келген нүктеге дейінгі ұшу уақытын анықтау эллипстік орбиталық қозғалыстың маңызды есептерінің бірі болып табылады. Бұл есепте үш негізгі аномалия қолданылады:

- **шынайы аномалия — ν;**
- **эксцентрлік аномалия — E;**
- **орташа аномалия — M.**

Олардың арасындағы негізгі байланыс: **M = E - e sinE** теңдеуімен, яғни **Кеплер теңдеуімен** беріледі. Перицентрден есептегендегі ұшу уақыты:
Δt = (E - e sinE)/n, мұндағы: **n = √(μ/a³).** Сондықтан:
Δt = √(a³/μ)(E - e sinE). Перицентрден апоцентрге дейінгі уақыт: **Δt = T/2,** ал толық орбиталық период: **T = 2π√(a³/μ).** Кеплер теңдеуі ғарыш аппаратының орбитадағы орнын уақытпен байланыстырып, оның қозғалысын болжауға мүмкіндік береді. Осы себепті ол ғарыштық баллистикада, орбиталарды есептеуде және ғарыш аппараттарының навигациясында негізгі теңдеулердің бірі болып саналады.

Бақылау сұрақтары

1. Перицентр дегеніміз не?
2. Апоцентр дегеніміз не?
3. Ғарыш аппаратының перицентрден кез келген нүктеге дейінгі ұшу уақытын анықтау не үшін қажет?
4. Шын аномалия дегеніміз не?
5. Перицентрде шын аномалия қандай мәнге ие?
6. Апоцентрде шын аномалия қандай мәнге ие?
7. Эксцентрлік аномалия дегеніміз не?
8. Эксцентрлік аномалияның физикалық мағынасы қандай?
9. Шын аномалия мен эксцентрлік аномалия арасында қандай байланыс бар?
10. Орташа аномалия дегеніміз не?
11. Орташа қозғалыс дегеніміз не?
12. Орташа қозғалыс қандай формуламен анықталады?
13. Кеплер теңдеуі қалай жазылады?
14. Кеплер теңдеуіндегі *M*, *E* және *e* шамалары нені білдіреді?
15. Кеплер теңдеуінің физикалық мағынасы қандай?
16. Перицентрден кез келген нүктеге дейінгі ұшу уақыты қандай формуламен анықталады?
17. Перицентрден апоцентрге дейінгі ұшу уақыты неге орбиталық периодтың жартысына тең?
18. Орбиталық период қандай формуламен анықталады?
19. Орбиталық период үлкен жарты оське қалай тәуелді?
20. Кеплердің үшінші заңы орбиталық қозғалыста қалай қолданылады?
21. Ғарыш аппараты перицентр маңында неге жылдамырақ қозғалады?
22. Апоцентр маңында аппараттың жылдамдығы неге төмендейді?

23. Кеплердің екінші заңы мен ұшу уақытының арасында қандай байланыс бар?
24. Кеплер теңдеуін неге қарапайым алгебралық әдіспен бірден шешу мүмкін емес?
25. Кеплер теңдеуін шешуде қандай сандық әдістер қолданылады?
26. Ньютон әдісінің Кеплер теңдеуін шешудегі мақсаты қандай?
27. Шын аномалия белгілі болған жағдайда ұшу уақытын анықтау қандай кезеңдерден тұрады?
28. Эксцентрлік аномалия арқылы радиус-векторды қалай анықтауға болады?
29. Перицентрден перицентрге дейінгі толық ұшу уақыты қалай аталады?
30. Кеплер теңдеуінің ғарыштық баллистикадағы практикалық маңызы қандай?