MCH5022 Механика материалов

Лектор: к.т.н.,доцент Исаметова Мадина Есдаулетовна

Лекция 5 Сдвиг.

лекция 5 Сдвиг

онятие о чистом сдвиге

акон Гука сдвиге

вязь между модулем сдвига и модулем упругости ри растяжении

двиговая деформация

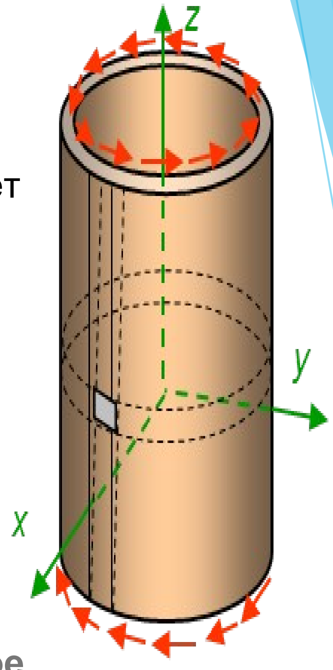
бобщенный закон Гука

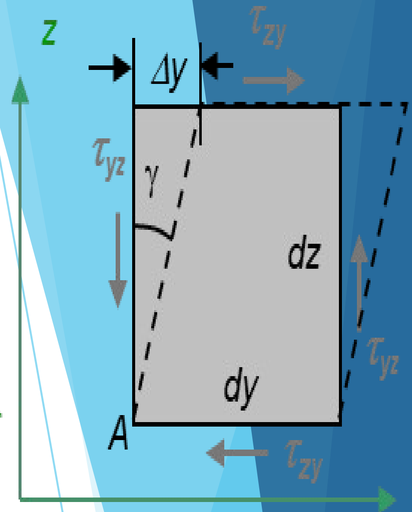
апряжено деформируемое состояние при сдвиге

Понятие о чистом сдвиге – Кроме деформации растяжения или сжатия материал нагруженного элемента конструкции может испытывать *деформацию сдвига*. Примером этому может служить напряженно-деформированное состояние элемента стенки балки в произвольном сечении, рассмотренное в предыдущей лекции. Там же было показано, что в опорных сечениях на нейтральной оси на гранях элемента отсутствуют нормальные напряжения, а касательные напряжения максимальны.

Другим примером, можно сказать классическим, является кручение тонкостенной трубы,

при котором любой элемент находится только под действием касательных напряжений.





Напряженно-деформированное состояние, характеризуемое тем, что на гранях элемента возникают только касательные напряжения, называют чистым сдвигом.

Касательное напряжение, при котором угол сдвига возрастает при постоянном напряжении называется *пределом текучести при сдвиге*.

До напряжения $\tau_{пц}$, называемого *пределом пропорциональности при сдвиге* справедлива линейная зависимость (**закон Гука при сдвиге**):

$$\boxed{\tau = G\gamma.}$$

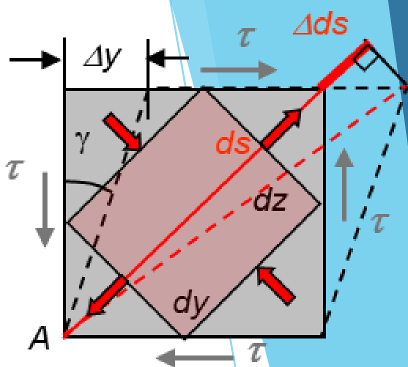
Здесь γ - относительный сдвиг:

$$\boxed{\gamma \approx tg\gamma = \frac{\Delta y}{dy}.}$$

G – модуль сдвига.

- **Закон Гука сдвиге –** Деформации чистого сдвига экспериментально изучаются путем кручения трубчатых образцов. Экспериментальная диаграмма сдвига, связывающая напряжения и угол сдвига, для пластичной стали имеет такой же характер изменения, как и диаграмма растяжения:

До напряжения $\tau_{пц}$, называемого *пределом пропорциональности при сдвиге* справедлива линейная зависимость (**закон Гука при сдвиге**): $\boxed{\tau = G\gamma.}$



Здесь γ - относительный сдвиг: $\boxed{\gamma \approx tg\gamma = \dfrac{\Delta y}{dy}.}$ G – модуль сдвига.

- **Связь между модулем сдвига и модулем упругости при растяжении –** Модуль сдвига и модуль упругости при растяжении являются физическими постоянными материала, характеризующими жесткость в каждом из этих двух видов деформации. Поскольку удлинение диагонали элемента, вызванное сдвигом, может быть получено также растяжением этого волокна под действием нормальных напряжений, эти константы должны быть связаны между собой некоторым соотношением:

$$\Delta ds = \Delta y \cos 45^0.$$

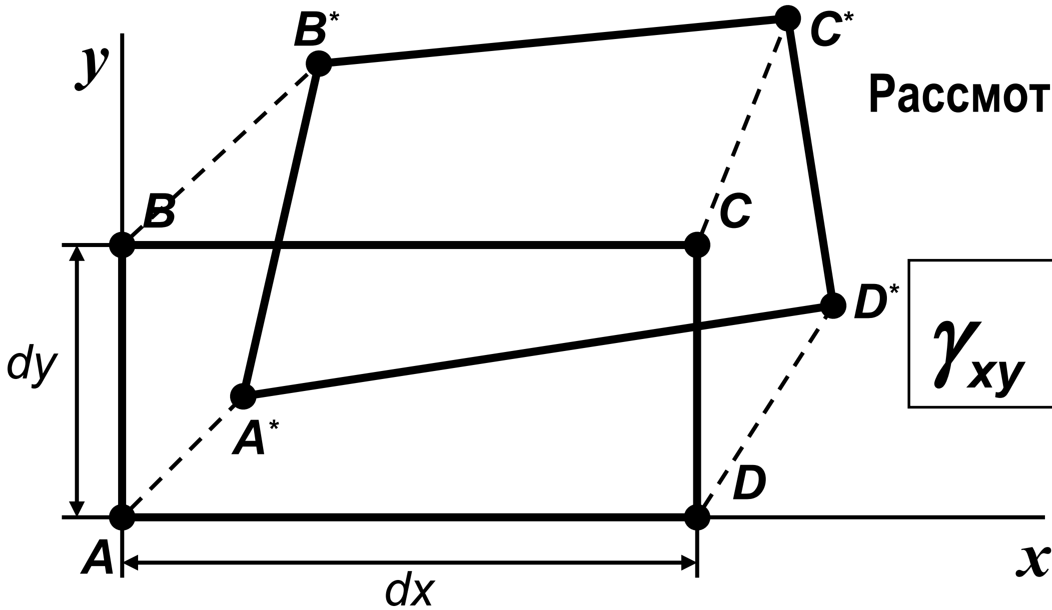
$$\Rightarrow \Delta ds = \gamma dy \cos 45^0. \Rightarrow \Delta ds = \gamma(ds\cos 45^0)\cos 45^0 = \gamma ds \cos^2 45^0. \Rightarrow \boxed{\Delta ds = \frac{\tau}{G} ds \cos^2 45^0 = \frac{\tau}{2G} ds.}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = \frac{1}{E}(\tau - \mu(-\tau)) = \frac{(1+\mu)\tau}{E}. \Rightarrow \boxed{\Delta ds = \frac{(1+\mu)\tau}{E} ds.} \Rightarrow \boxed{\frac{(1+\mu)}{E} = \frac{1}{2G}.}$$

Таким образом **существует соотношение между модулем сдвига и модулем упругости при растяжении** с участием коэффициента Пуассона. Любую из этих величин можно определить, если известны две другие.

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}.}$$

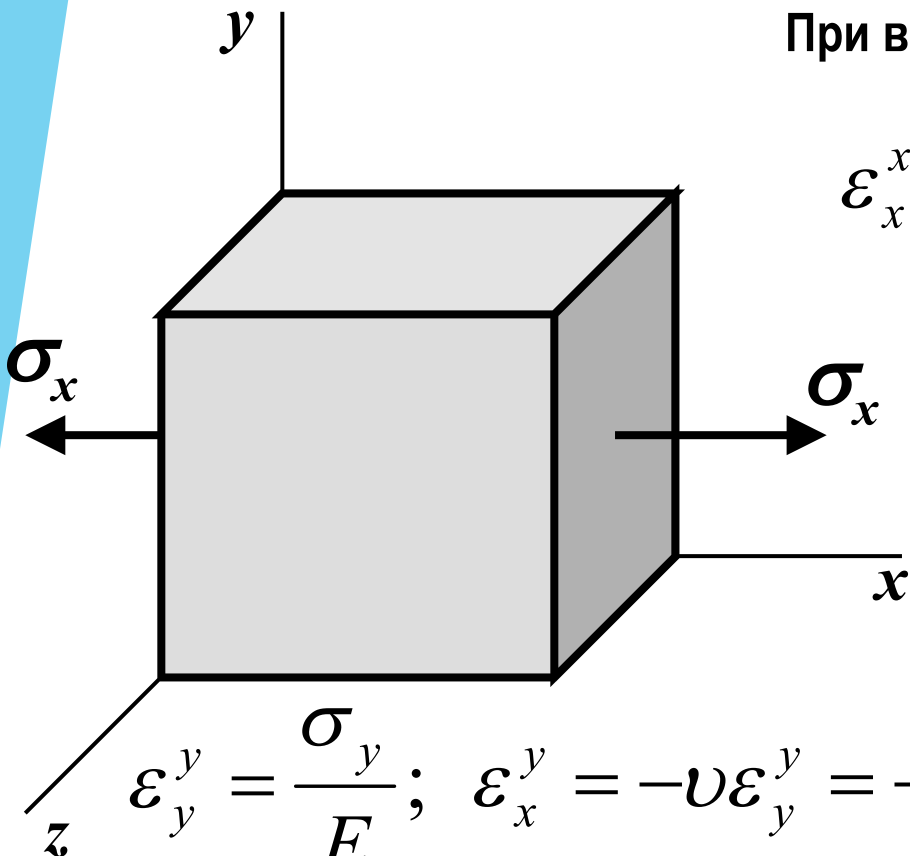
1. Сдвиговая деформация (угловая деформация)



Рассмотрим деформацию параллелепипеда

$$\gamma_{xy} = \angle BAD - \angle B^*A^*D^*$$

2. Обобщенный закон Гука



При воздействии σ_x:

$$\varepsilon_x^x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_y^x = -\upsilon\varepsilon_x^x = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z^x = -\upsilon\varepsilon_x^x = -\upsilon\frac{\sigma_x}{E}$$

Аналогично для других напряжений

$$\varepsilon_y^y = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_x^y = -\upsilon\varepsilon_y^y = -\upsilon\frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_z^y = -\upsilon\varepsilon_y^y = -\upsilon\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_z^z = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_x^z = -\upsilon\varepsilon_z^z = -\upsilon\frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_x^z = -\upsilon\varepsilon_z^z = -\upsilon\frac{\sigma_z}{E}$$

2. Обобщенный закон Гука

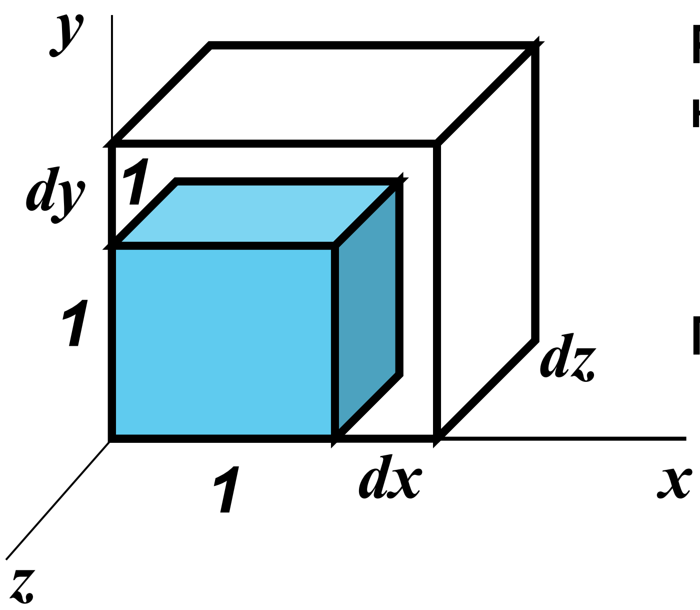
Используя принцип суперпозиции:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^x + \varepsilon_x^y + \varepsilon_x^z = \frac{\sigma_x}{E} + \left(-\upsilon\frac{\sigma_y}{E} - \upsilon\frac{\sigma_z}{E}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right]
\end{aligned}\right\}$$

Обобщенный закон Гука для изотропного тела

2. Объемный закон Гука



Рассмотрим изменение объема единичного кубика:

$$V_0 = 1$$

После деформации размеры кубика равны:

$$V_1 = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) =$$

$$= 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z$$

$$+ \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$$

Ввиду малости относительных деформаций ($10^{-3} \ldots 10^{-5}$)

$$V_1 = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \qquad \Delta V = \Delta V_1 - V_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

2. Объемный закон Гука

Используем обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_V = 1/E[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_z + \sigma_x + \sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)] =$$

$$(1 - 2\nu)/E\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\boxed{\varepsilon_V = (1 - 2\nu)/E\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}$$

Объемный закон Гука

Обозначим: $\sigma_0 = 1/3\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ **- среднее напряжение**

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{(1-2\nu)3}{E}\sigma_0}$$

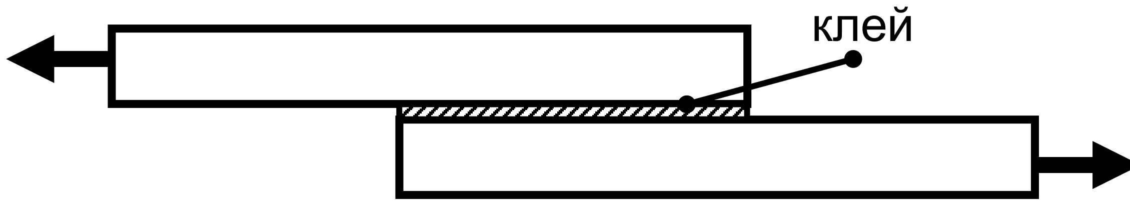
Тогда:

Обозначим: $\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ **- объемный модуль упругости**

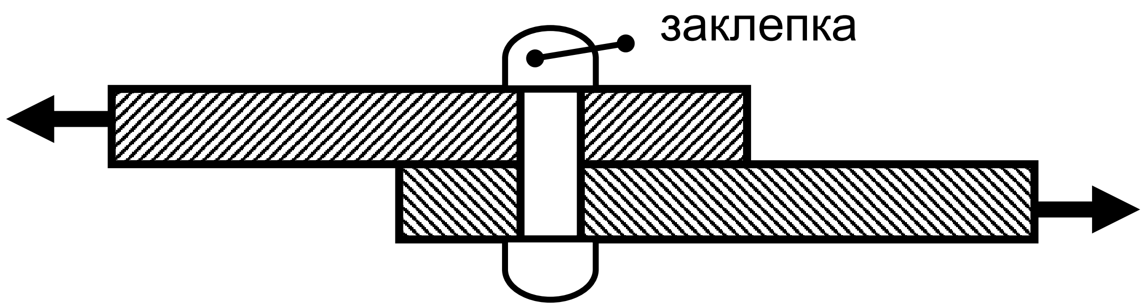
Видно, что $\nu_{пред} = 0.5$

3. Сдвиг

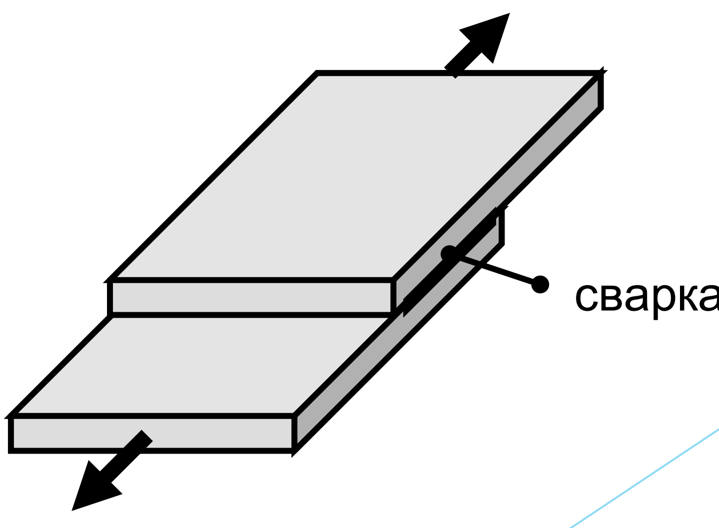
П



П

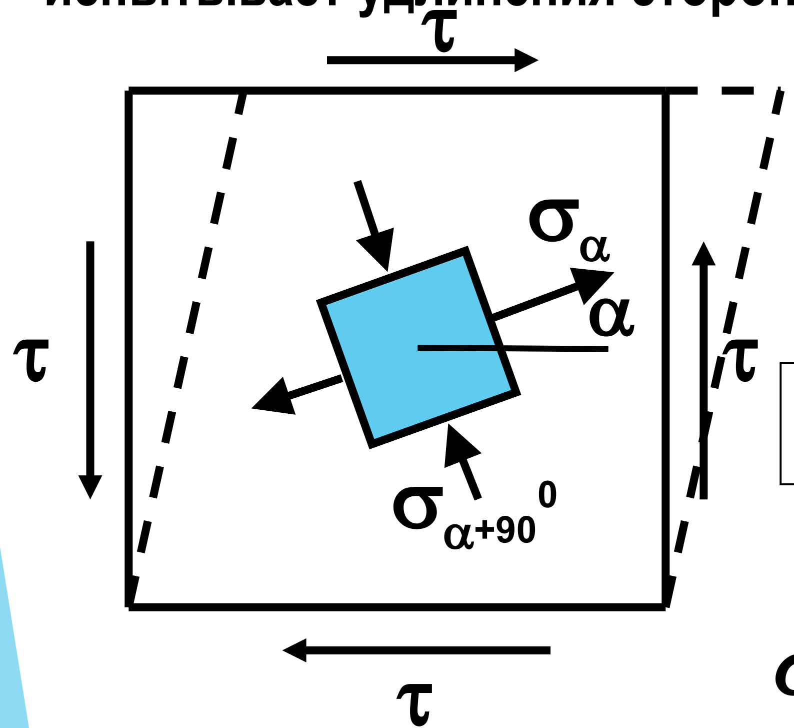


П



3. Сдвиг

Рассмотрим состояние т.н. чистого сдвига – прямоугольный элемент не испытывает удлинения сторон, на $\perp$ площадках действуют только τ



Ранее было получено:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{y1x1} = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha$$

В нашем случае на исходных площадках:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0, \ \tau_{yx} = -\tau$$

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha$$
$$\tau_{y1x1} = -\tau \cos 2\alpha \qquad (1)$$

$\sigma_\alpha = 0$ при $\alpha = 0, \pm n\pi/2$

Всегда $\sigma_\alpha = -\sigma_{\alpha+90}$

Закон «парности» нормальных напряжений при чистом сдвиге

3. Сдвиг

Ранее было получено:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \upsilon(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)\right] \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \upsilon(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

$$\boxed{\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3}$$

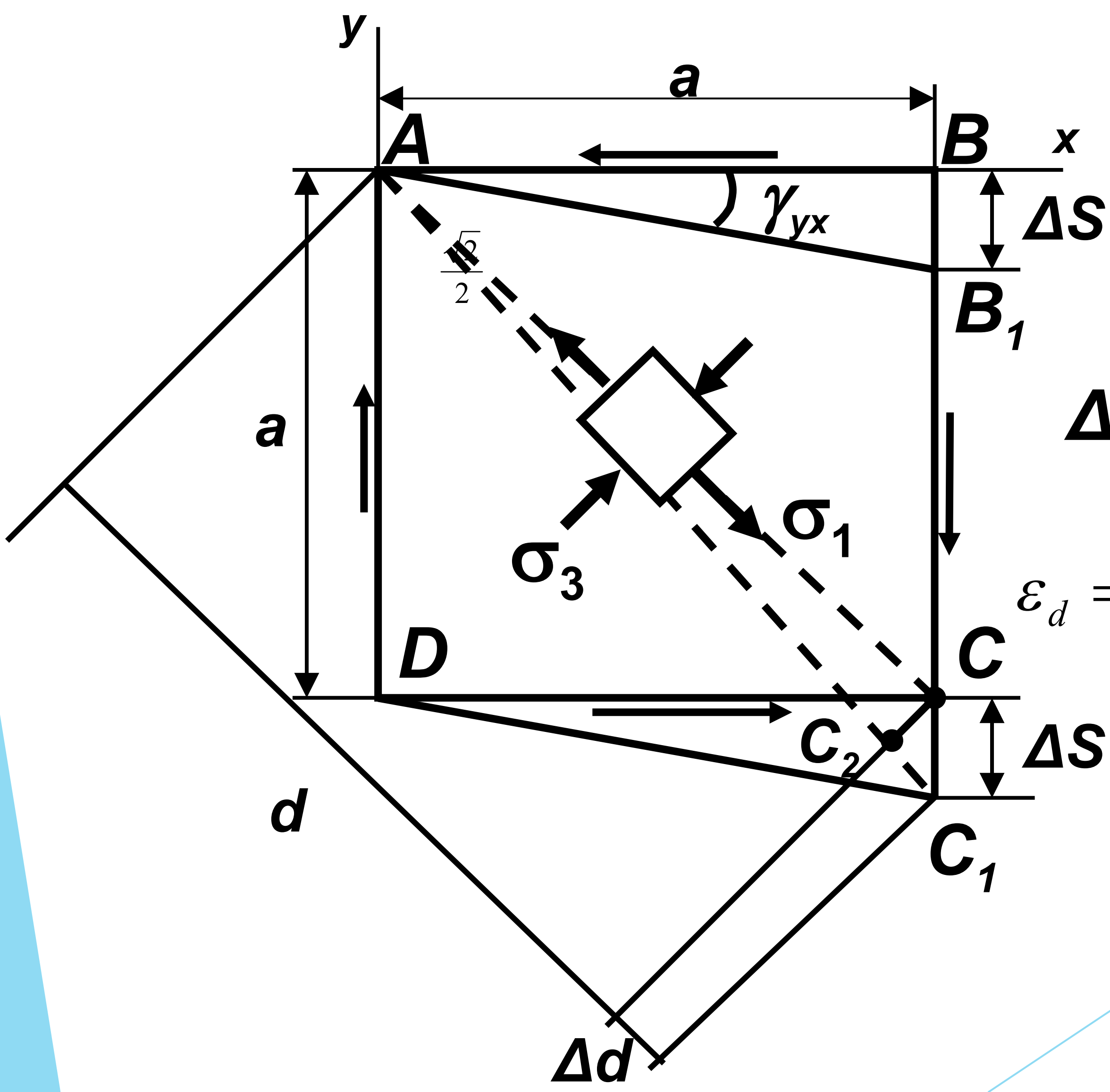
Из (1): $\sigma_{max} = \tau$ при $\alpha = 45^0$

$\sigma_{min} = -\tau$ при $\alpha = -45^0$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 = \tau,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = -\tau$$

3. Сдвиг

Рассмотрим деформацию элементарного квадрата:



$$\Delta d = C_2C_1 = \Delta S$$

$$\cos 45^0 = a\gamma$$

$$\Delta d = \varepsilon_d AC = \varepsilon_d a$$

$$\varepsilon_d = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \upsilon(\sigma_3)\right] = \frac{\tau}{E}\left[1 + \upsilon\right]$$

$$\tau = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma$$

3. Сдвиг

Рассмотрим аналогию:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

- модуль сдвига или «модуль упругости второго рода»

3. Сдвиг

Полная сводка уравнений для пространственного напряженного состояния:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

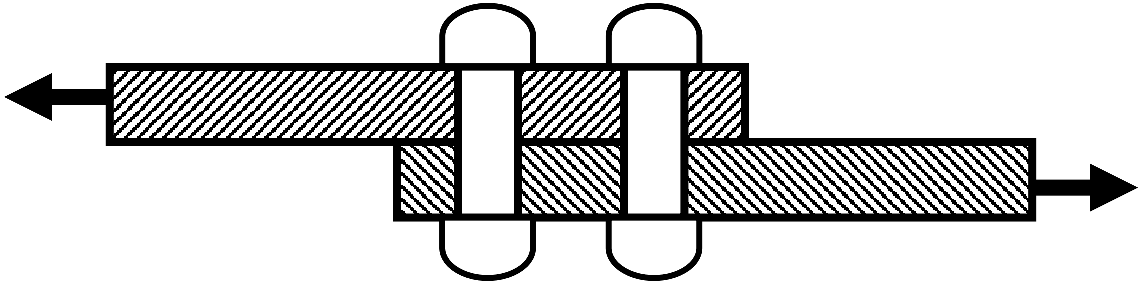
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

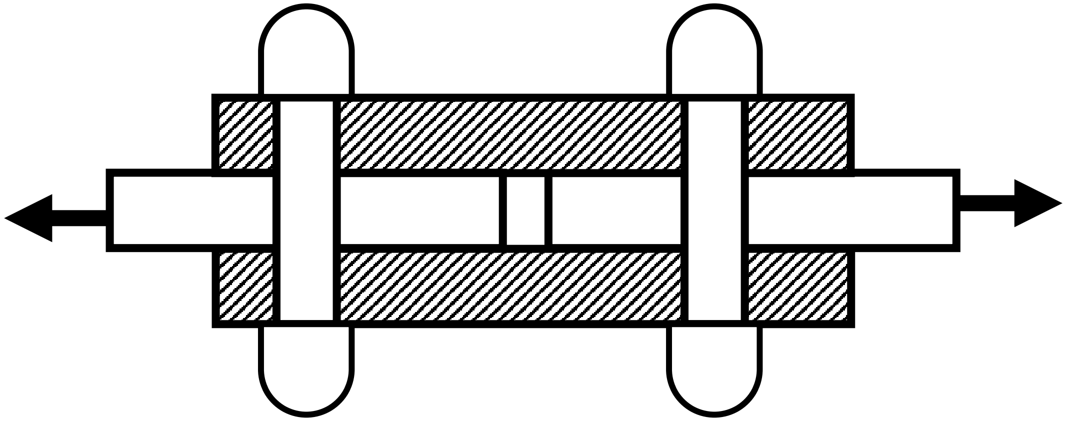
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

4. Расчет заклепочных соединений

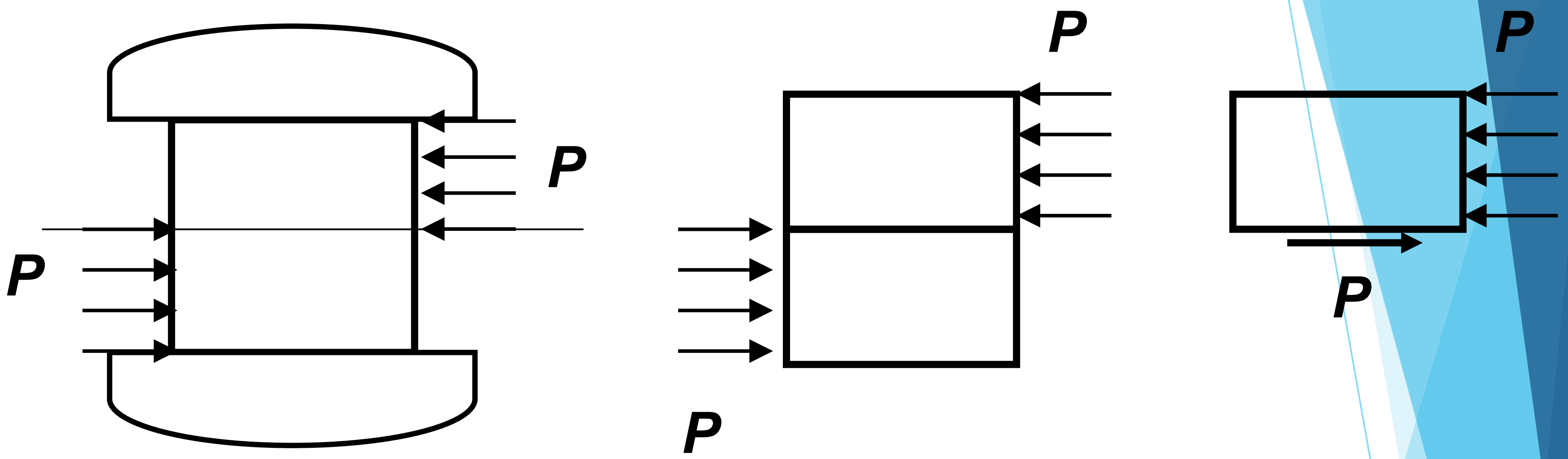


«Внахлест»



«Встык»

Рассмотрим работу одной заклепки. Срез заклепки.



$$\tau = \frac{P}{A_{cp}} = \frac{P}{n\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$\tau \leq R^{з}_{cp}$$

$$n_{cp} \geq \frac{4P}{\pi d^2 R^{з}_{cp}}$$

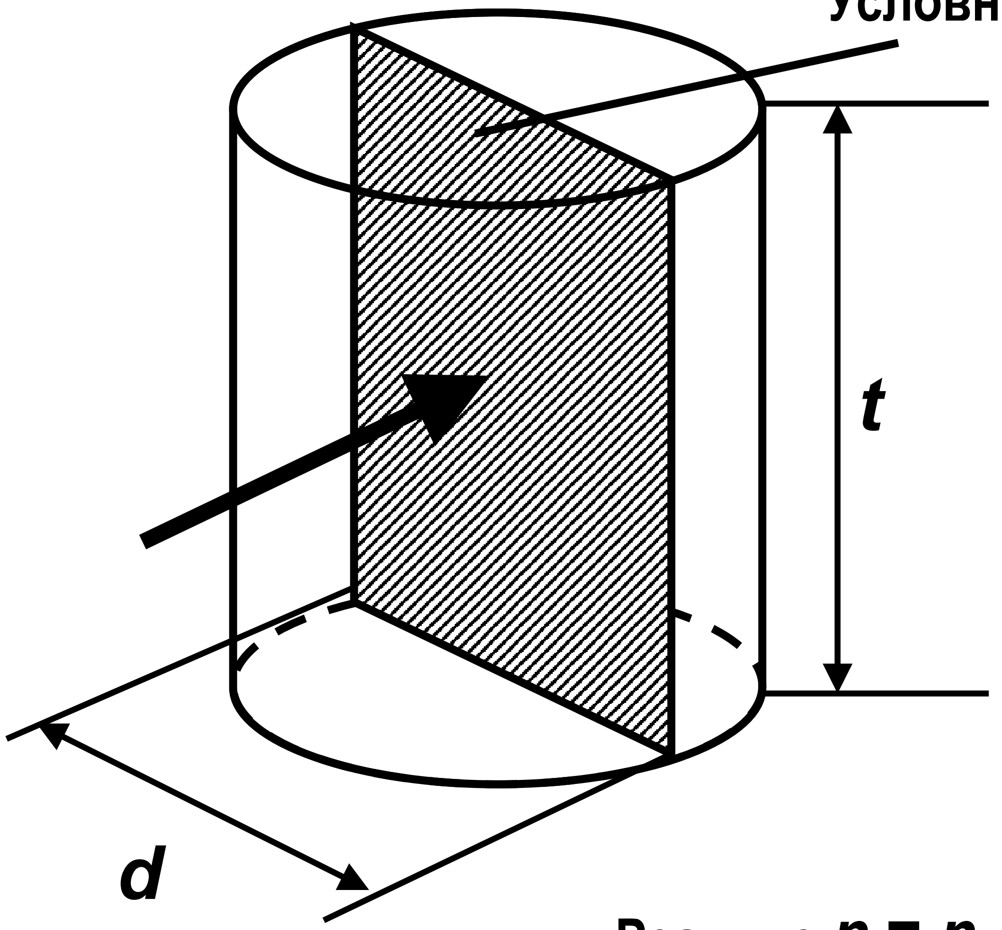
где *n* – количество заклепок,

d – диаметр заклепки

где $R^{з}_{cp}$ – расчетное сопротивление заклепки срезу

Смятие заклепки

Условная поверхность смятия

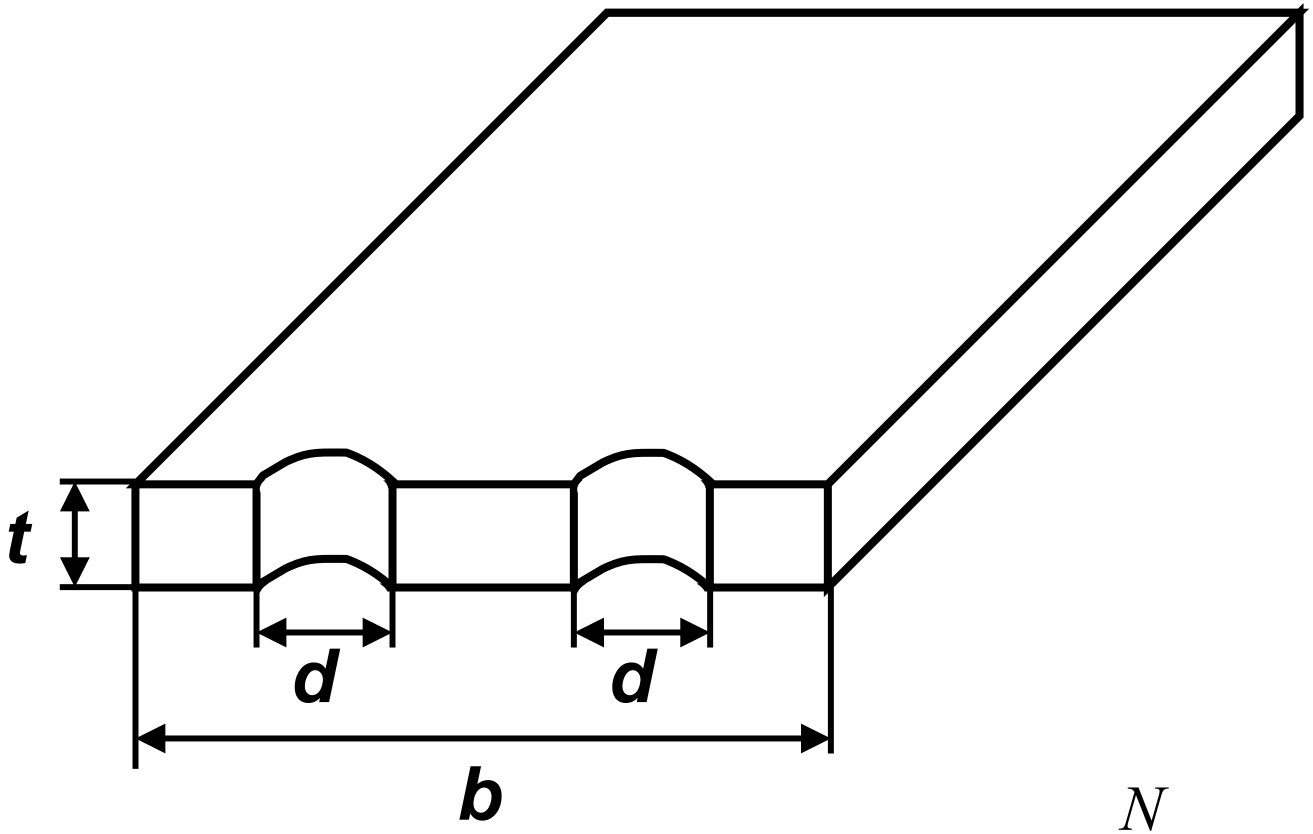


$$\sigma_{см} = \frac{P}{dtn} \le R^{з}_{см}$$

$$n_{см} \ge \frac{P}{dtR^{з}_{см}}$$

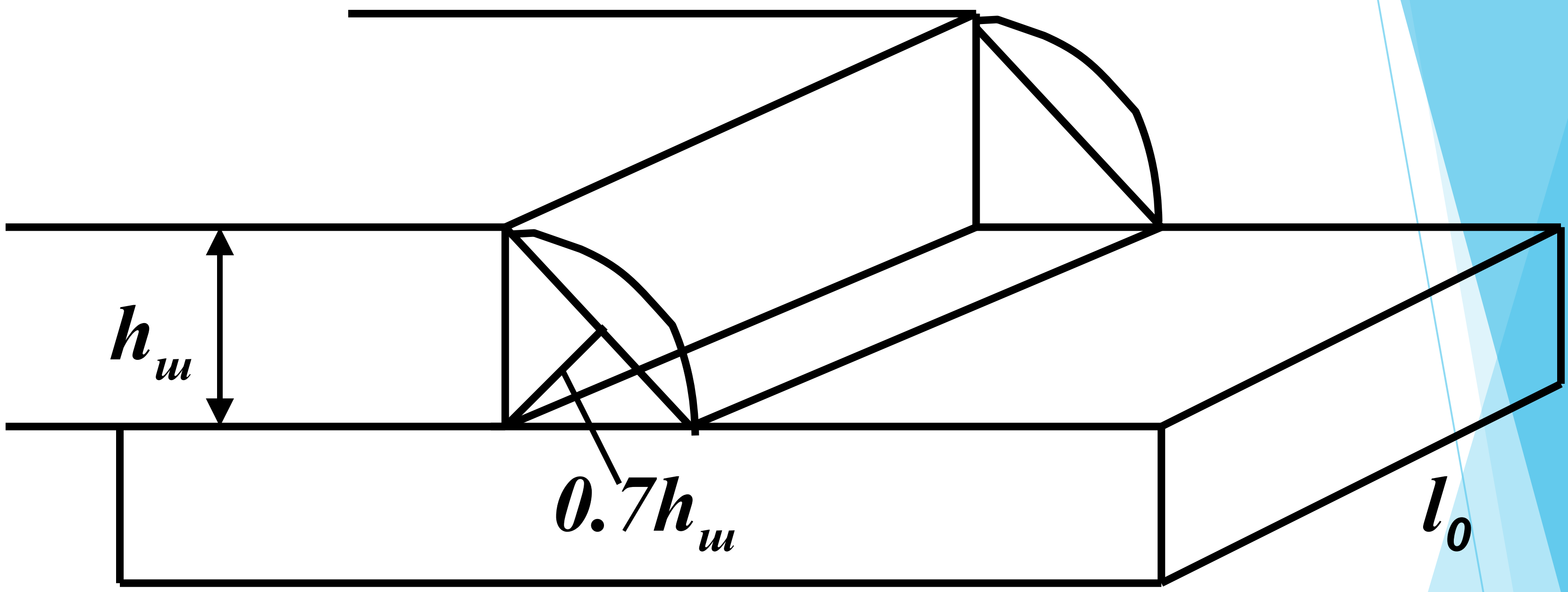
Реально $n = n_{max}\{n_{cp}, n_{см}\}$

Разрушение основного материала



$$\sigma = \frac{N}{A_{нетто}} = \frac{P}{t(b - md)} \le R$$

Сварка

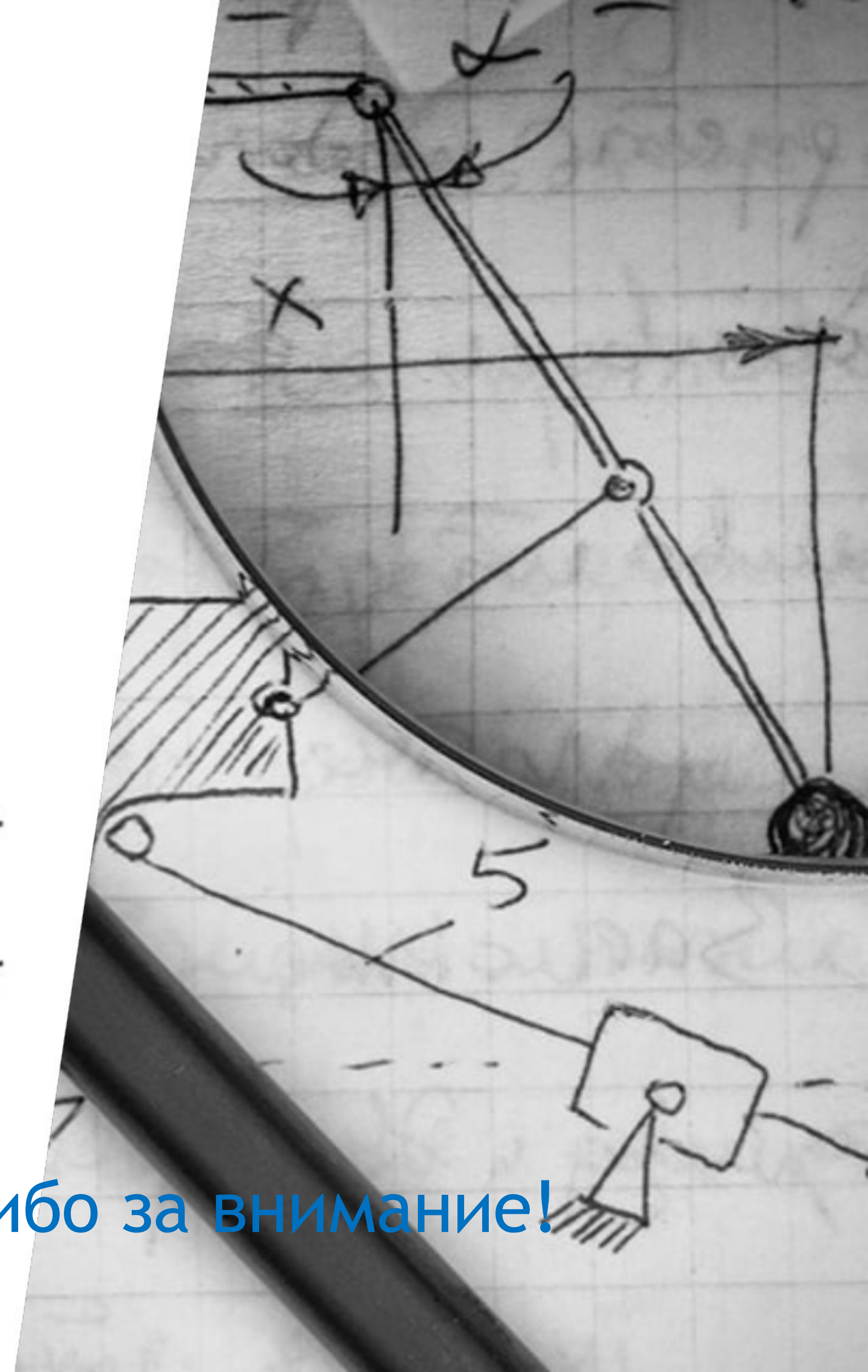


$$\tau = \frac{P}{A_ш} = \frac{P}{0.7hl_0}$$

Рекомендуемая литература

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1989.-622 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: изд. МГТУ, 1999. -591с.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов - М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997.-320 с.
5. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И Руководство к решению задач по сопротивлению материалов - М.: Высшая школа, 1999. -592 с.
6. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов -М: Высшая школа, 1985. -399 с.
7. Бондаренко А.Н. Электронный учебник по сопротивлению материалов. Москва. 2007 г.
8. Панков А.Д. Руководство по курсовому проектированию по сопротивлению материалов Расчет валов. г. Саров. 2008 г.
9. Панков А.Д. Вопросы для электронного тестирования по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2009 г.
10. Панков А.Д. Лабораторный практикум по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2010 г.
1. Шелофаст В.В. Основы проектирования машин. Изд –во АПМ., 2007 г.

SATBAYEV UNIVERSITY



Спасибо за внимание!