SATBAYEV UNIVERSITY

MCH5022 Механика материалов

Лектор: к.т.н.,доцент Исаметова Мадина Есдаулетовна

Лекция 10 Устойчивость равновесия деформированных систем.

Лекция 10
Устойчивость равновесия деформированных систем.

Формы равновесия тела

Определение устойчивости и потеря устойчивости

Критическая сила

Продольный изгиб

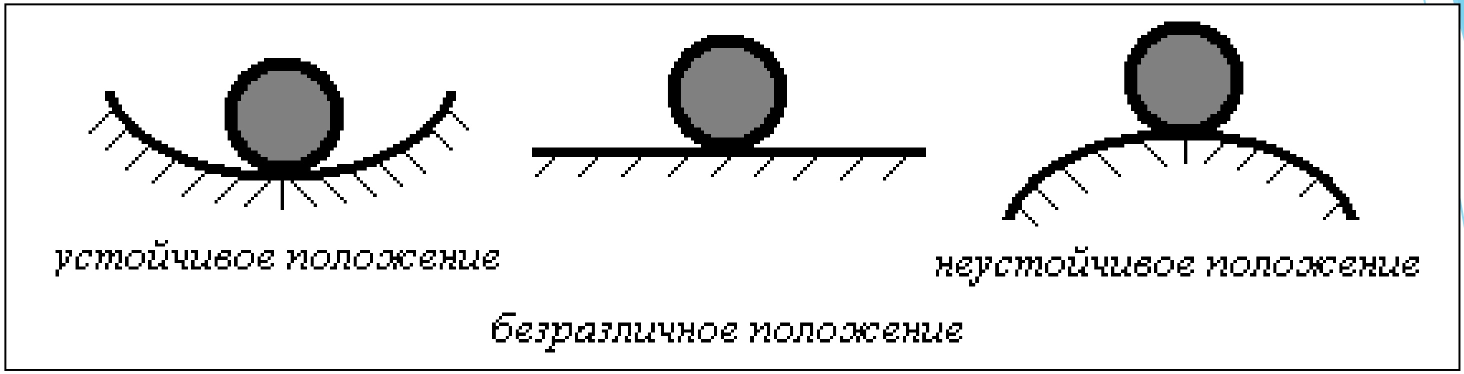
Коэффициенты приведения

Критические напряжения. Гибкость стержня

Пределы применимости формулы Эйлера

Формы равновесия тела

Формы равновесия рассмотрим на примере шарика на поверхности. В зависимости от формы поверхности, шарик может находиться в устойчивом, безразличном и неустойчивом положении.



Устойчивое положение шарика характерно тем, что при любом отклонении его от положения равновесия, он вернется к этому положению.

Безразличное положение – любое положение шарика на плоскости является устойчивым.

Неустойчивое положение: при расположении шарика на выпуклой поверхности любое малое отклонение от положения шарика на вершине приведет к большим перемещениям его и он не сможет вернуться к исходному положению.

Устойчивость и потеря устойчивости

В сопротивлении материалов изучаются инженерные методы расчета стержней на прочность, жесткость и устойчивость.

Первые две задачи были рассмотрены ранее (*расчеты на прочность при растяжении-сжатии, изгибе, кручении, при сложных видах нагружения*).

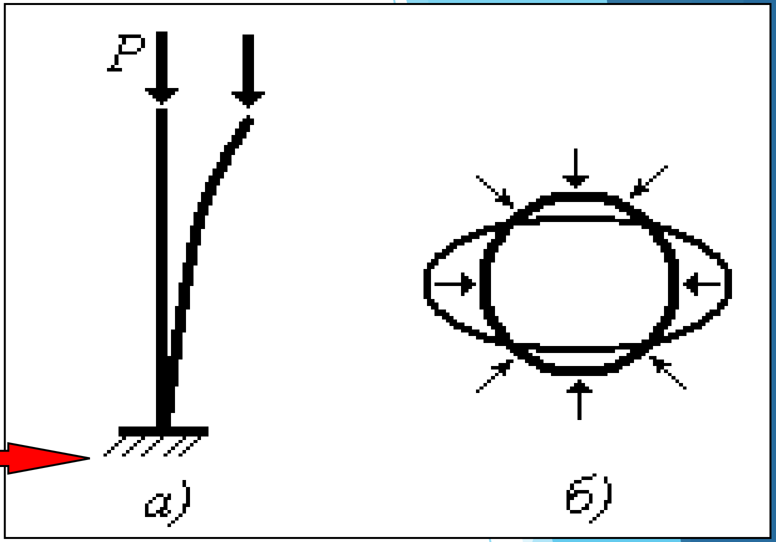
Устойчивость – свойство упругой системы сохранять свое состояние (например, первоначальную форму упругого равновесия) при внешних воздействиях.

Переход неустойчивой системы к новому состоянию – потеря устойчивости.

Возможны различные последствия в результате потери устойчивости:

а) переход системы к некоторому новому положению равновесия, что сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций и разрушением.

Примеры: центрально сжимаемый стержень (рис. *а*), всесторонне сжимаемая тонкостенная труба (рис. *б*);



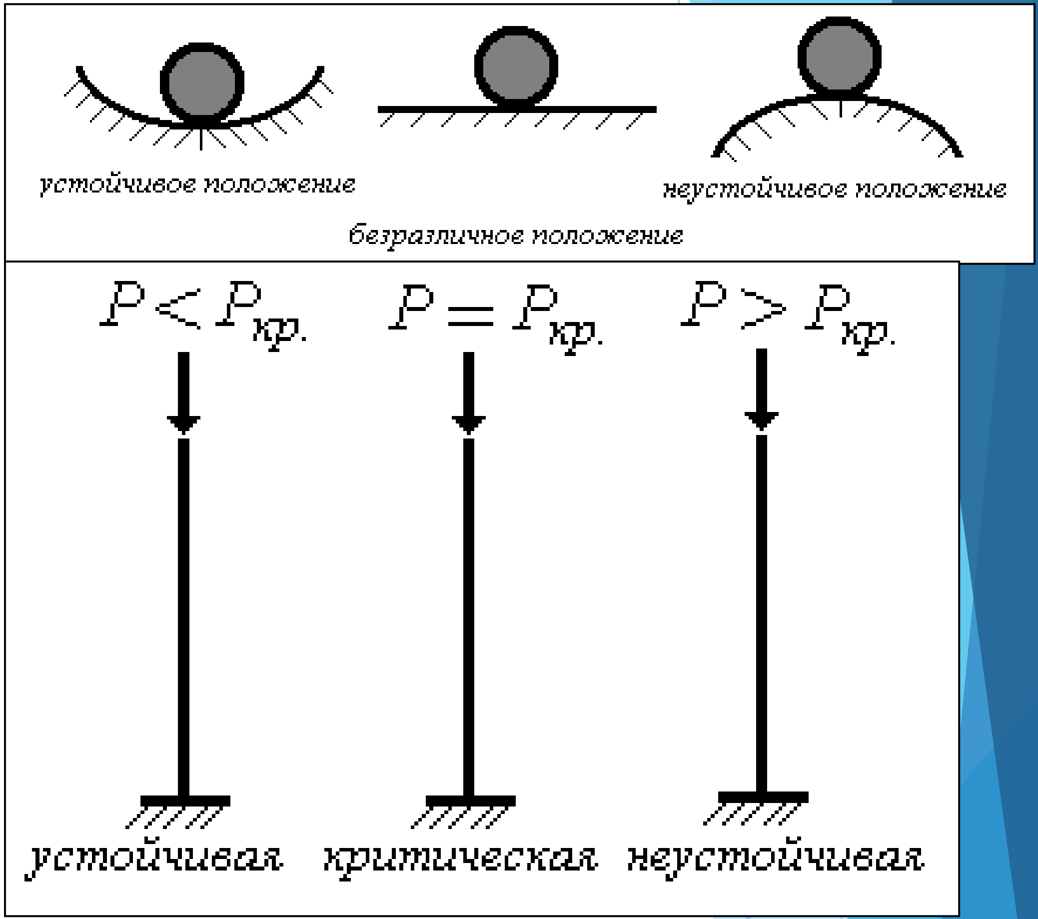
б) конструкция продолжает выполнять свои основные функции после потери ею устойчивости, например обшивка самолета или потеря устойчивости одним из стержней фермы;

в) система не обладает устойчивым равновесием и переходит в режим незатухающих колебаний.

Потеря устойчивости чаще всего наблюдается в легких, тонкостенных конструкциях. Для повышения запаса устойчивости таких конструкций необходимо увеличивать жесткость поперечных сечений ее элементов.

Простейшим примером элемента конструкции, для которой важным является фактор устойчивости, является **центрально сжимаемый стержень**.

По аналогии с шариком на поверхности, стержень под действием сжимающей силы также может отклоняться от положения упругого равновесия.

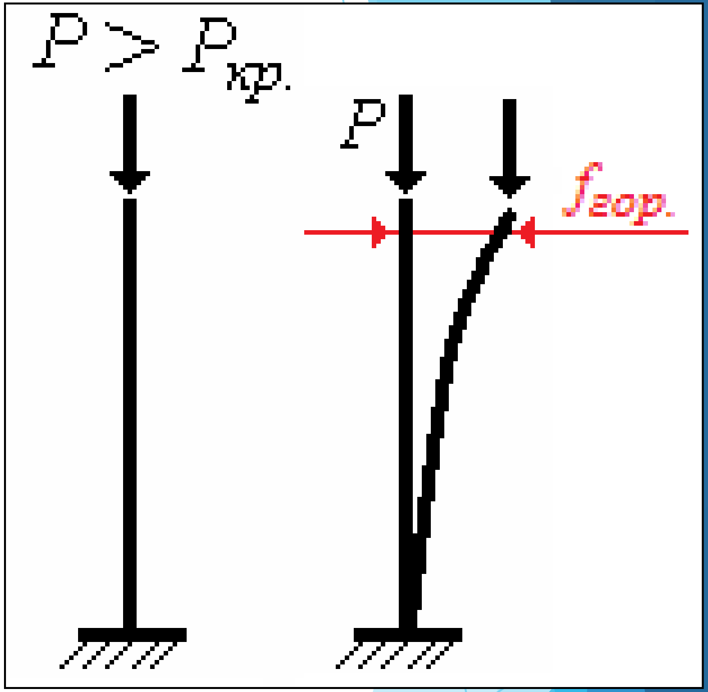


При этом стержень может находиться в одном из трех состояний – устойчивом, безразличном (так называемом критическом) и неустойчивом, что связано с величиной сжимающей силы.

Критическая сила

При анализе устойчивости упругой системы и, в частности, стержней определяются такие значения внешних сил, при которых устойчивое положение равновесия становится неустойчивым.

При достижении сжимающей силой определенного (**критического)** значения, ее незначительное увеличение приведет к значительному росту горизонтального перемещения поперечных сечений – т.е. к потере устойчивости.



ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ – неограниченный рост перемещений (прогибов) при незначительном увеличении сжимающей силы.

КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА – минимальная по величине сила, при которой стержень теряет устойчивость.

При этом стержень **обязательно** будет изгибаться **в плоскости минимальной жесткости**. Это легко продемонстрировать на примере обычной линейки: как бы мы не поворачивали ее поперечное сечение по отношению к сжимающей силе – линейка всегда будет изгибаться относительно оси, параллельной большей из сторон прямоугольника.
Следовательно, в расчетах будем определять осевой момент инерции относительно оси минимума – I_{min}.

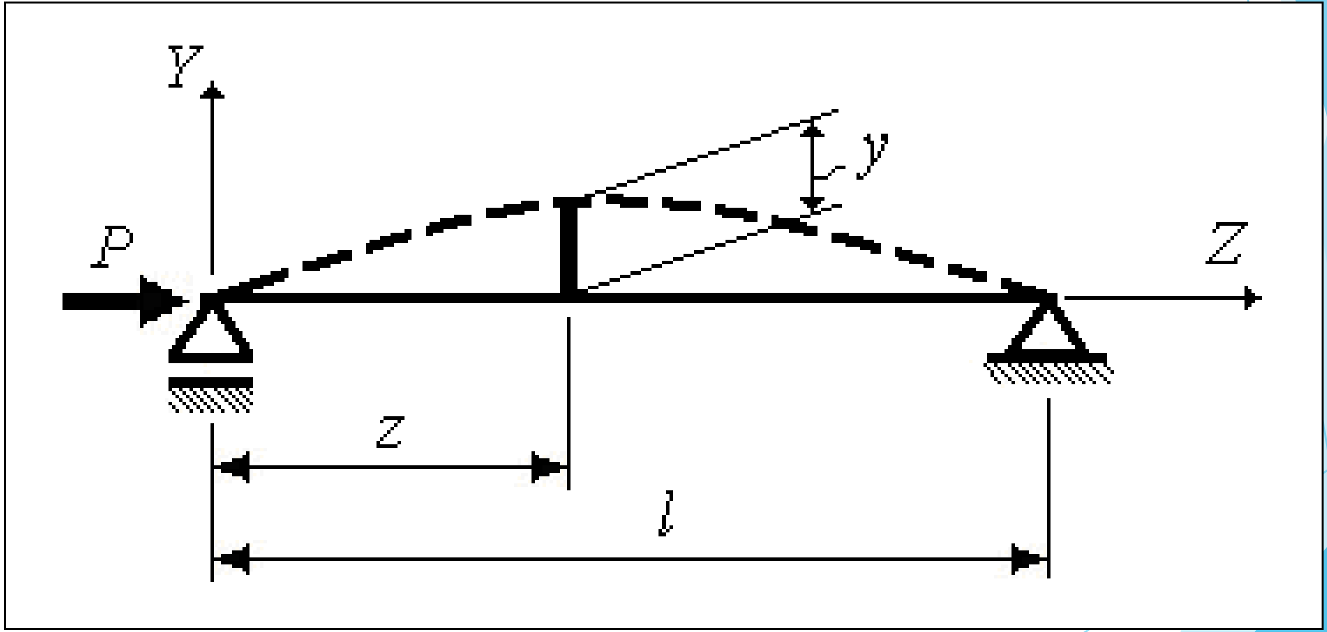
Отсюда можно сделать важный вывод:

при выборе формы и размеров сечения стержня необходимо стремиться к тому, чтобы по возможности оба момента инерции сечения были равны по величине.

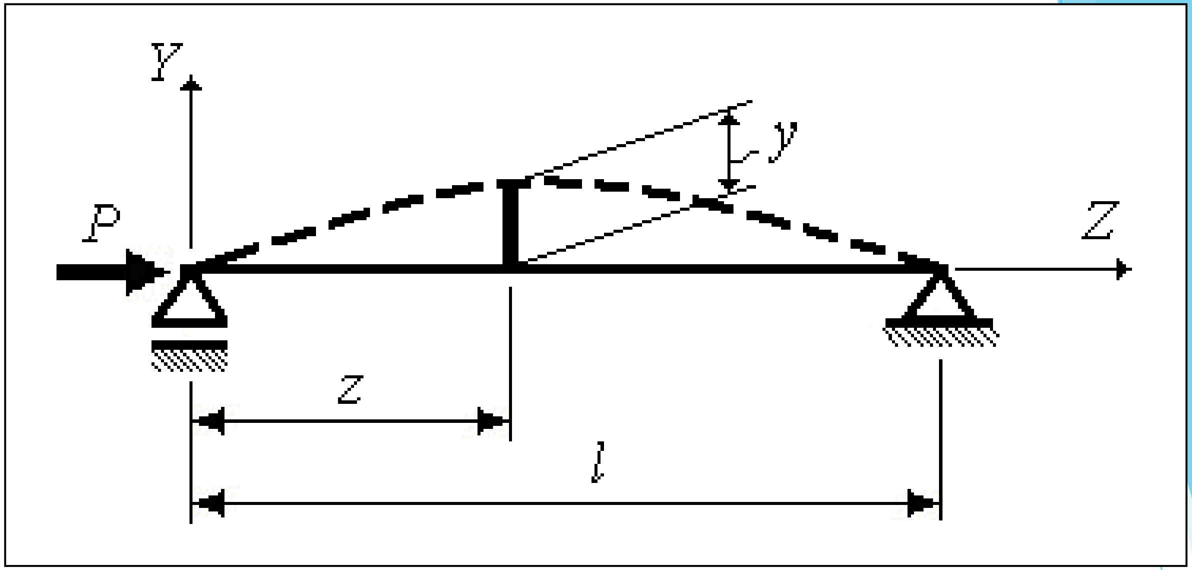
Продольный изгиб

Устойчивость сжатых стержней в упругой стадии. Формула Эйлера

Впервые задачу об упругом равновесии центрально сжатого стержня решил академик Российской академии наук Леонард Эйлер. Он рассмотрел равновесие стержня, сжимаемого центральными силами P.



*Определим условия, при которых возможно равновесие стержня с изогнутой осью **при малых прогибах**.*



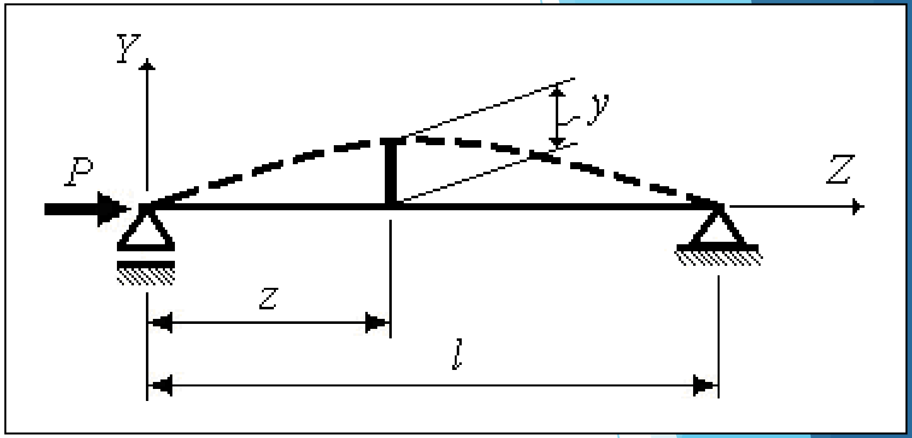
Под действием сжимающей силы определенной величины стержень изогнется и в его поперечных сечениях возникнет изгибающий момент $M = P\,y$.

Если под действием изгибающего момента **кривизна стержня уменьшается** (стержень распрямляется), то знак момента – **плюс**.

В данном случае кривизна стержня под действием сжимающей силы **увеличивается**, поэтому запишем: $M = -P\,y$.

Из теории изгиба известно приближенное **дифференциальное уравнение <u>упругой линии:</u>**

$$EIy'' = M = -P\,y$$



Обозначим
$$\frac{P}{EI_{\min}} = k^2$$

Получаем дифференциальное уравнение второго порядка

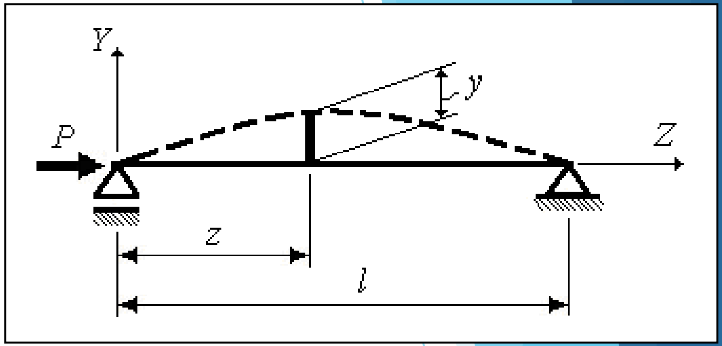
$$y'' + k^2 y = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz$$

Из граничных условий (на опорах):

при $z = 0$: прогиб на левой опоре $y = 0$. Следовательно, $C_2 = 0$;



при $z = \ell$: прогиб на правой опоре $y = 0$.

Следовательно $$C_1 \sin k\ell = 0.$$

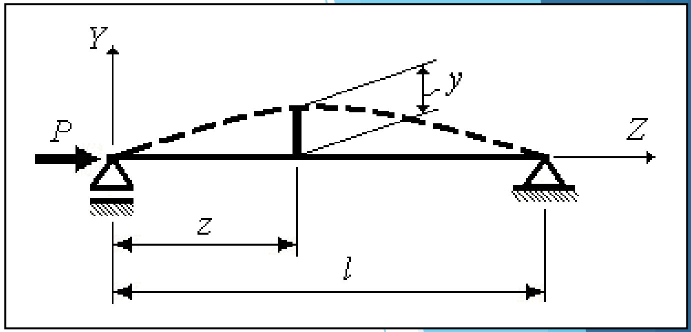
В случае, если $C_1 = 0$ стержень не изгибается. Поэтому $C_1 \neq 0$ и остается принять $\sin k\ell = 0$. Откуда $k\ell = \pi n$, где n – ряд простых чисел: $1, 2, 3, \ldots$

Стержень потеряет устойчивость, когда значение силы будет минимальным, т.е. принимаем $n=1$.

Следовательно $$k = \frac{\pi}{l}$$

Получаем формулу для определения **критической силы**

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2} \qquad (14.1)$$

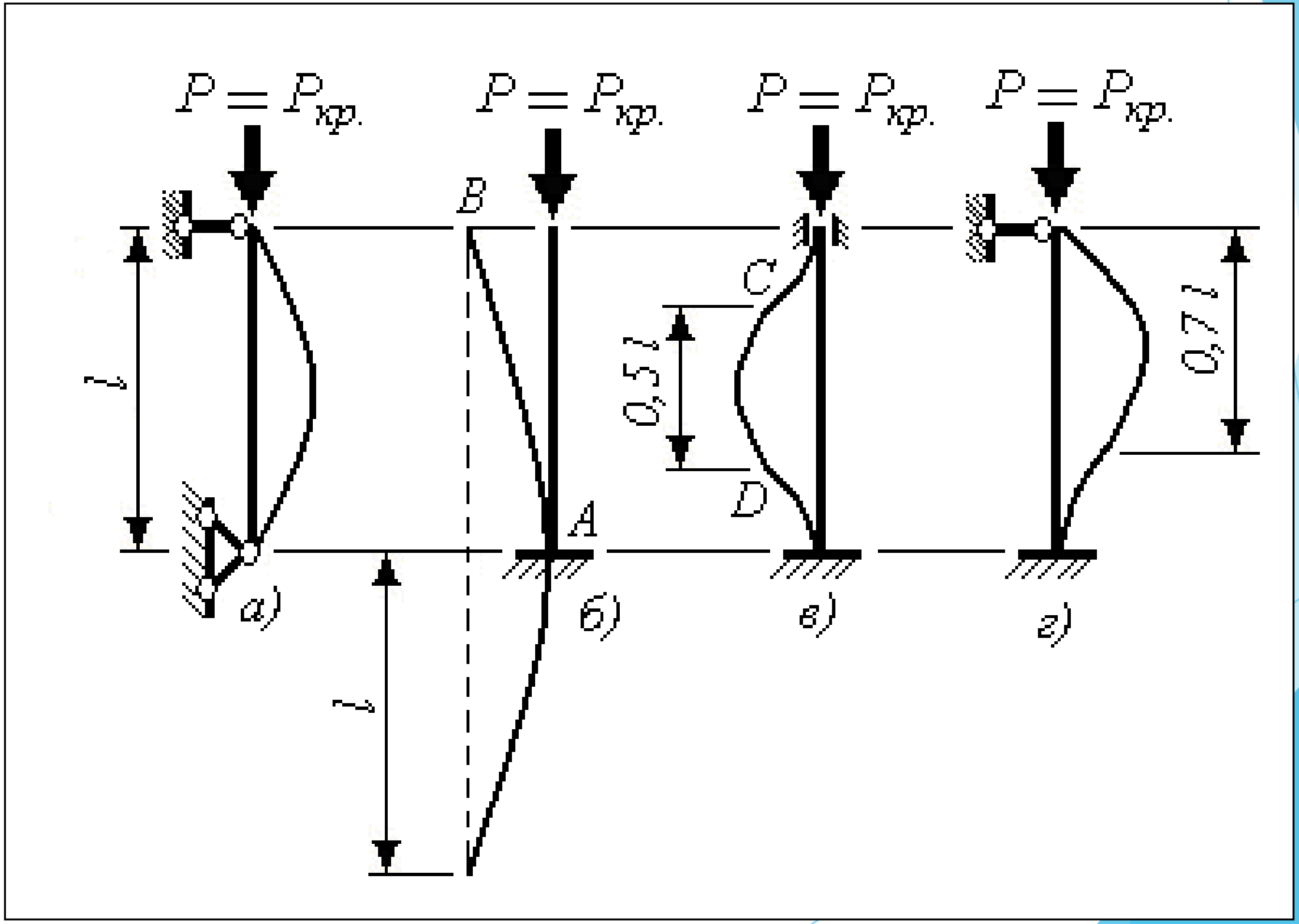


Влияние на величину критической силы вида опорных закреплений

Формула Эйлера (14.1) получена **путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси (упругой линии) стержня** при определённом способе закрепления его концов – концы стержня опирались на **шарнирные опоры**. Такой случай закрепления концов стержня называют ***основным.***

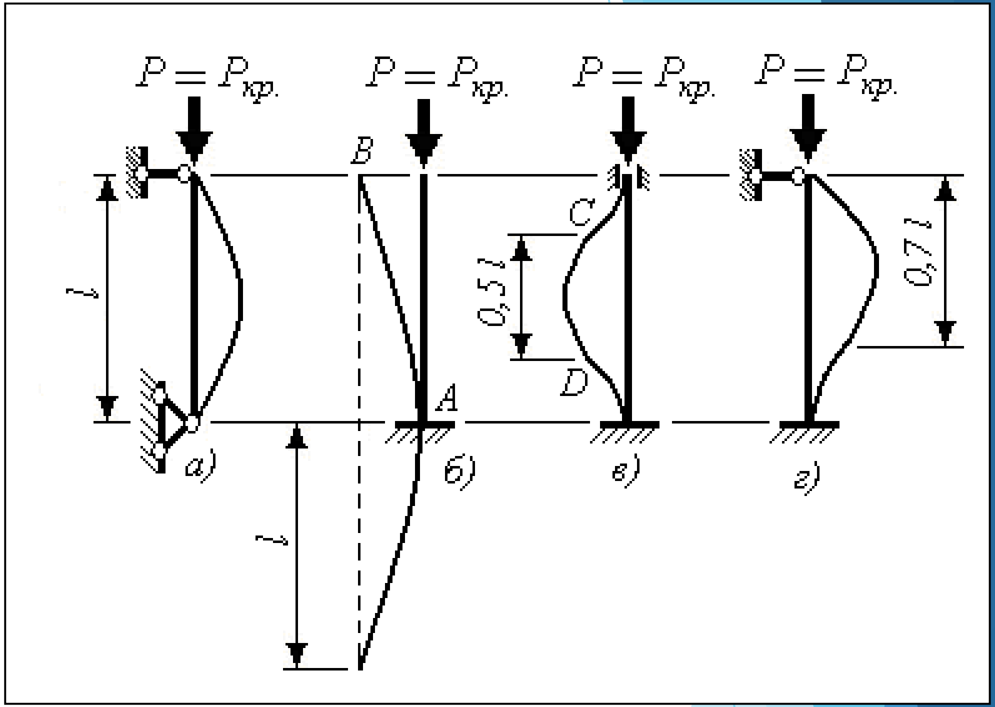
Найденное выражение для $P_{кр.}$ справедливо лишь для этого случая закрепления и будет изменяться при изменении условий закрепления концов стержня.

Если повторить весь ход рассуждений для других случаев закрепления, можно получить формулы другого вида. Покажем, что путем простых рассуждений можно получить формулы, в которых будут учитываться особенности закрепления концов стержня в сравнении с основным способом (рис. *а*).



Один конец стержня жестко закреплен, а второй свободен (рис. *б*).

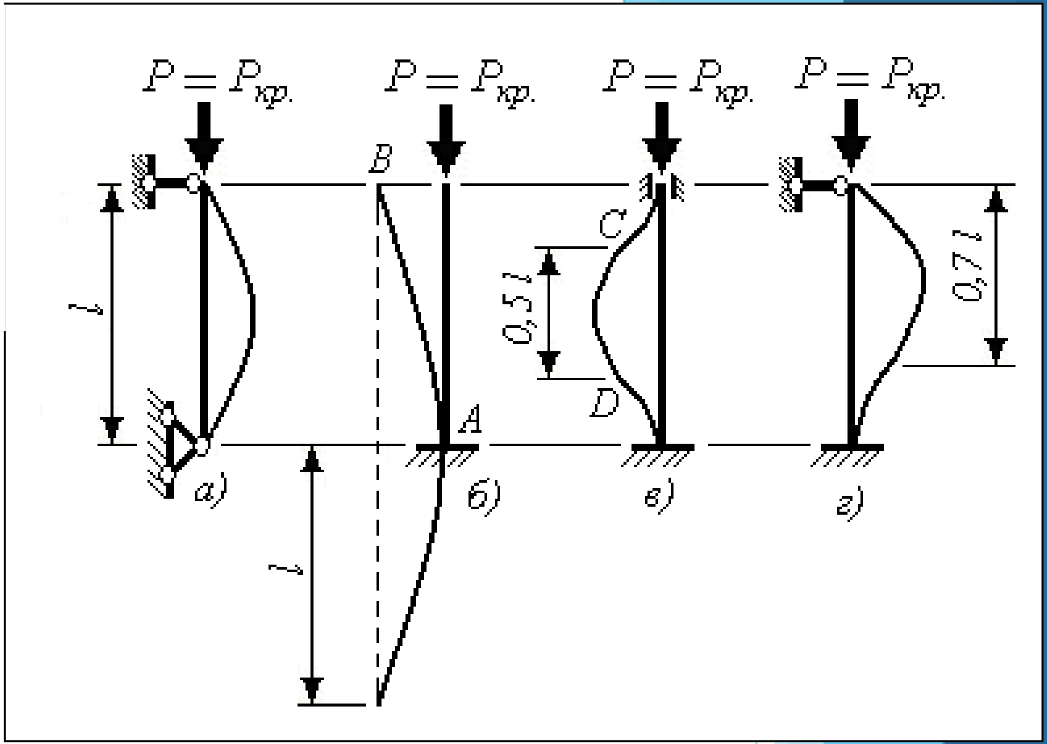
При достижении силой P значения критической силы, стержень потеряет устойчивость и изогнётся по дуге AB. Если мысленно продлить стержень на длину ℓ за закрепление, мы получим вторую полуволну.



Таким образом, на **двух длинах** стержня получим синусоиду – как в основном случае закрепления. Для этого случая критическая сила будет равна критической силе для основного случая при длине стержня 2ℓ.

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(2l)^2}$$

Рассмотрим случай, когда оба конца стержня **жестко закреплены** (рис. *в*).

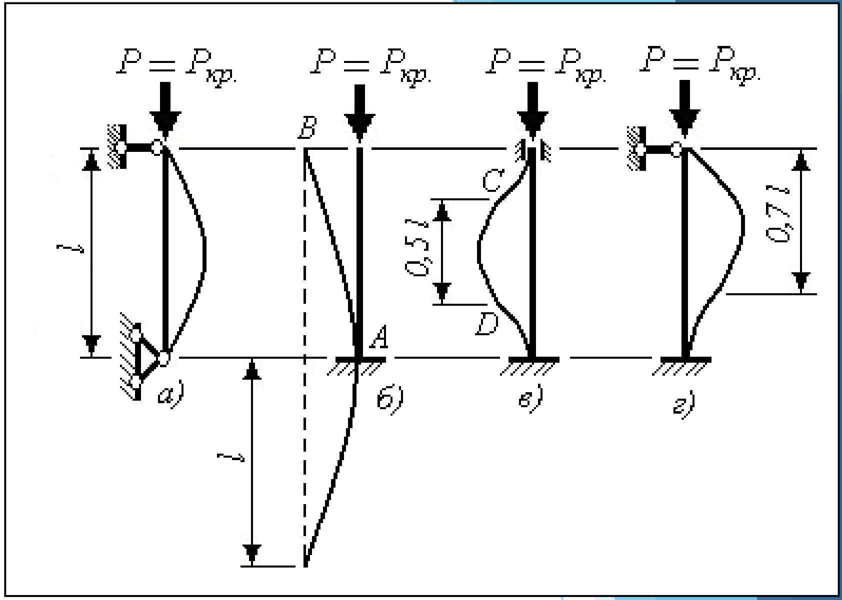


Видим, что в точках *C* и *D* кривая меняет кривизну, т.е. изгибающий момент в этих точках будет равен нулю (условно говоря в этих точках - шарниры). Стержень между точками *C* и *D* изгибается также, как и для основного случая – по синусоиде, т.е. при длине стержня *ℓ*/2.

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(0,5l)^2}$$

Аналогично для схемы с одной заделкой и одной шарнирно подвижной опорой (рис. *г*).

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(0,7\,l)^2}$$



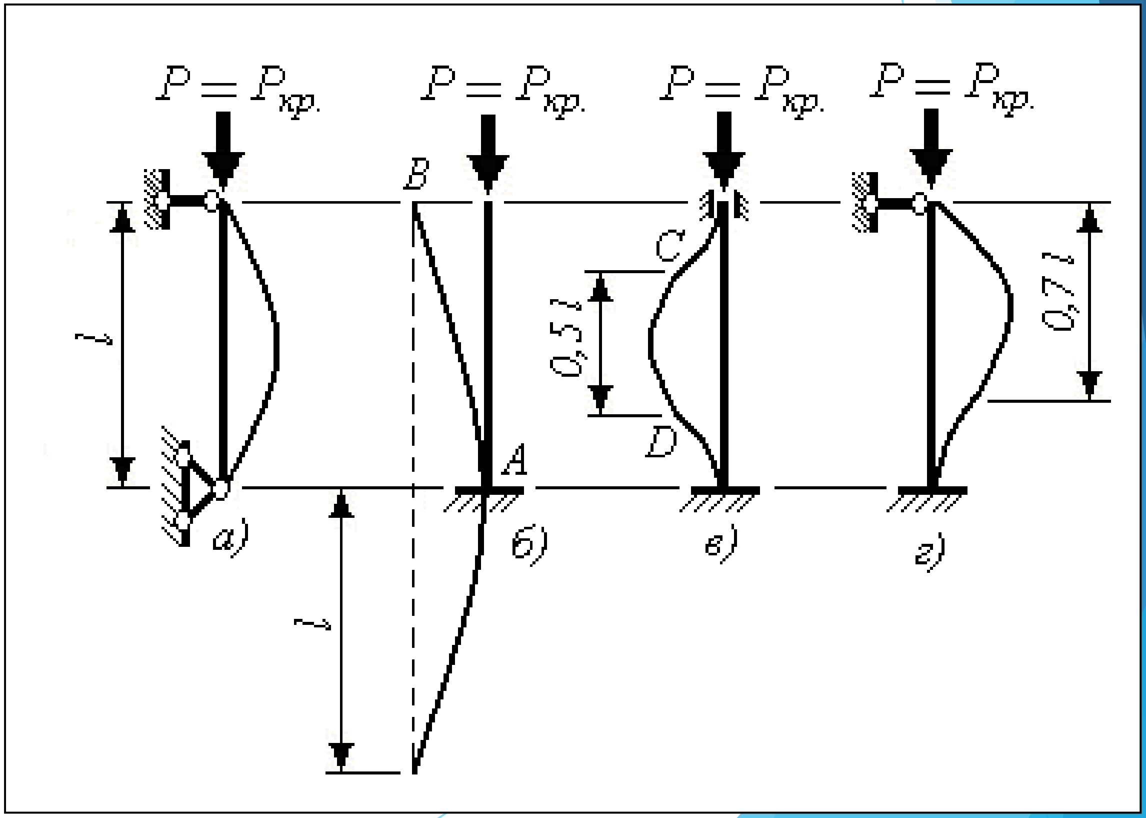
Все полученные формулы можно объединить в одну, заменив числа 1; 2; 0,5; 0,7 и т.д. – соответствующие виду закрепления концов, через μ – **коэффициент приведения длины**.

Полученная формула носит название **ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА**

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu\,l)^2} \quad (14.2)$$

Произведение $\mu\ell$ есть приведенная длина. Таким образом, формула Эйлера для критической силы может быть применена для любого случая закрепления концов, если в формулу вводить соответствующий схеме закрепления коэффициент μ.

$$P_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}$$



Критические напряжения. Гибкость стержня

Преобразуем формулу Эйлера с учетом того обстоятельства, что до момента потери устойчивости стержень будет воспринимать действие центрально приложенной сжимающей силы, т.е. работать при центральном сжатии.

Следовательно $$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Критическое напряжение $$\sigma_{кр.} = \frac{P_{кр.}}{F}.$$

Тогда $$\sigma_{кр.} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$ (12.3)

λ – гибкость стержня: $$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}};$$ (12.4)

квадрат минимального радиуса инерции: $$i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{F}.$$

Предельная гибкость

Формула Эйлера выведена на основе рассмотрения дифференциального уравнения **упругой линии** балки, то есть приведенные выше рассуждения справедливы только до напряжений, не превышающих значений **предела пропорциональности** материала стержня.

Следовательно, **формула Эйлера справедлива (применима**) при соблюдении условия:

$$\sigma_{кр.} \leq \sigma_{пц} \quad (14.5)$$

Подставим в неравенство значение критических напряжений (14.3):

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц} \quad (14.6)$$

Выразим из этого неравенства гибкость λ, обозначив ее $\lambda_{пред.}$:

ПРЕДЕЛЬНАЯ ГИБКОСТЬ материала стержня

$$\lambda_{пред.} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц.}}} \quad (14.7)$$

Пределы применимости формулы Эйлера

С учетом предыдущих рассуждений, формула Эйлера применима при условии:

$$\lambda \geq \lambda_{пред.} \qquad (14.8)$$

Это есть УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Предельная гибкость для широко распространенных материалов:

сталь Ст.3 ($\sigma_{пц}=200МПа$, $E=2\cdot10^5МПа$, $\pi^2\approx10$):

$$\lambda_{пред.} = \sqrt{\frac{10\times2\times10^5}{200}} = 100.$$

Чугун: $\lambda_{пред}=80$;

дерево: $\lambda_{пред}=110$;

сталь Ст.5: $\lambda_{пред}=85$.

Стержни, для которых выполняется неравенство (14.8) называют стержнями большой гибкости.

Обычно это тонкие и длинные стержни.

В формуле (14.6) заменим предел пропорциональности материала стержня на критическое напряжения и запишем ее в виде равенства:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц}$$

$$\sigma_{кр.} \lambda^2 = \pi^2 E.$$

Произведение критического напряжения на квадрат гибкости есть величина постоянная, а график зависимости имеет вид гиперболы.

Рекомендуемая литература

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1989.-622 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: изд. МГТУ, 1999. -591с.
4. Степин П.А. Сопротивление материалов - М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997.-320 с.
5. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И Руководство к решению задач по сопротивлению материалов - М.: Высшая школа, 1999. -592 с.
6. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов -М: Высшая школа, 1985. -399 с.
7. Бондаренко А.Н. Электронный учебник по сопротивлению материалов. Москва. 2007 г.
8. Панков А.Д. Руководство по курсовому проектированию по сопротивлению материалов Расчет валов. г. Саров. 2008 г.
9. Панков А.Д. Вопросы для электронного тестирования по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2009 г.
10. Панков А.Д. Лабораторный практикум по курсу “Сопротивление материалов”. г. Саров. 2010 г.
1. Шелофаст В.В. Основы проектирования машин. Изд –во АПМ., 2007 г.