

Курс лекций по дисциплине «Начертательная геометрия»



лектор

Каражанова Дарига Дюсеновна

Кандидат педагогических наук

ассоциированный профессор Satbayev University



Лекция 5

Позиционные задачи

К.п.н., ассоциированный профессор

Каражанова Дарига Дюсеновна

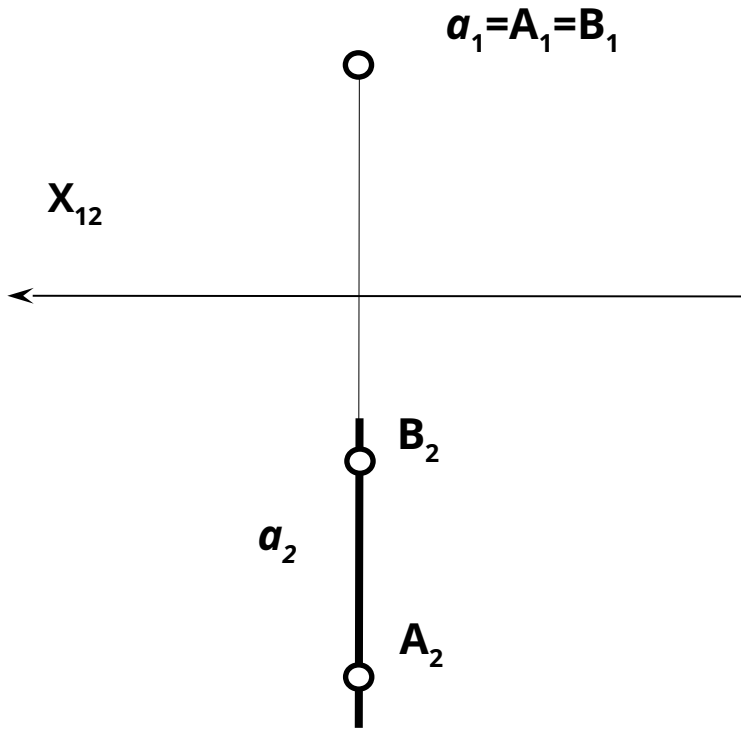
Задачи, в которых определяется взаимное
расположение **Основные позиционные задачи**

точек, прямых и плоскостей, называются
ПОЗИЦИОННЫМИ.

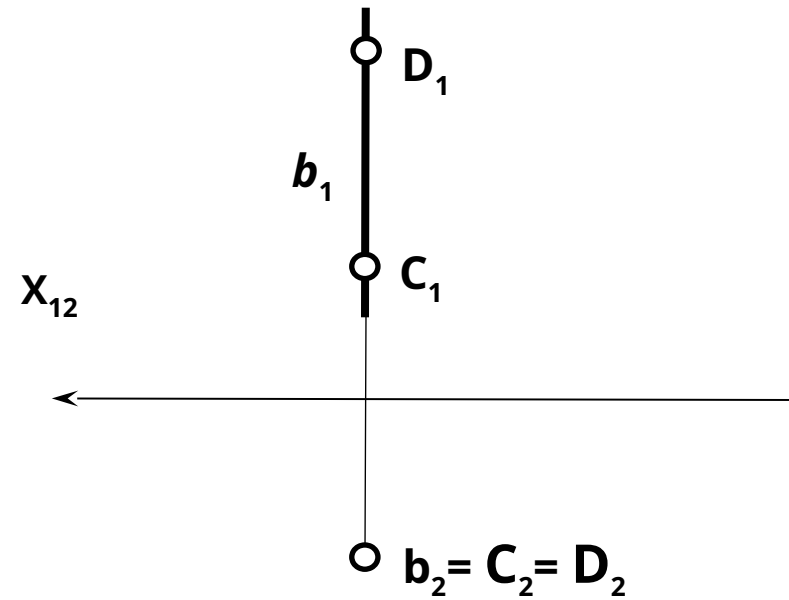
Всего определяют шесть позиционных задач:

1. Взаимное расположение точек;
2. Взаимное расположение точек и прямой;
3. Взаимное расположение двух прямых;
4. Взаимное расположение точек и плоскости;
5. Взаимное расположение прямой и плоскости;
6. Взаимное расположение плоскостей.

1. Взаимное расположение точек.



а) фронтально конкурирующие точки А и В



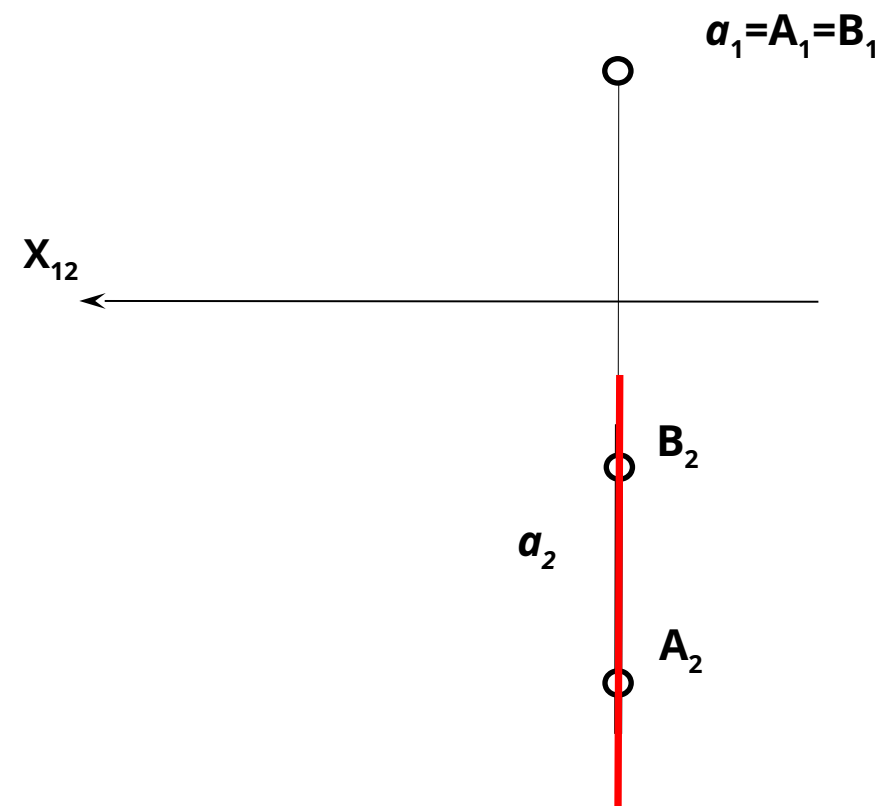
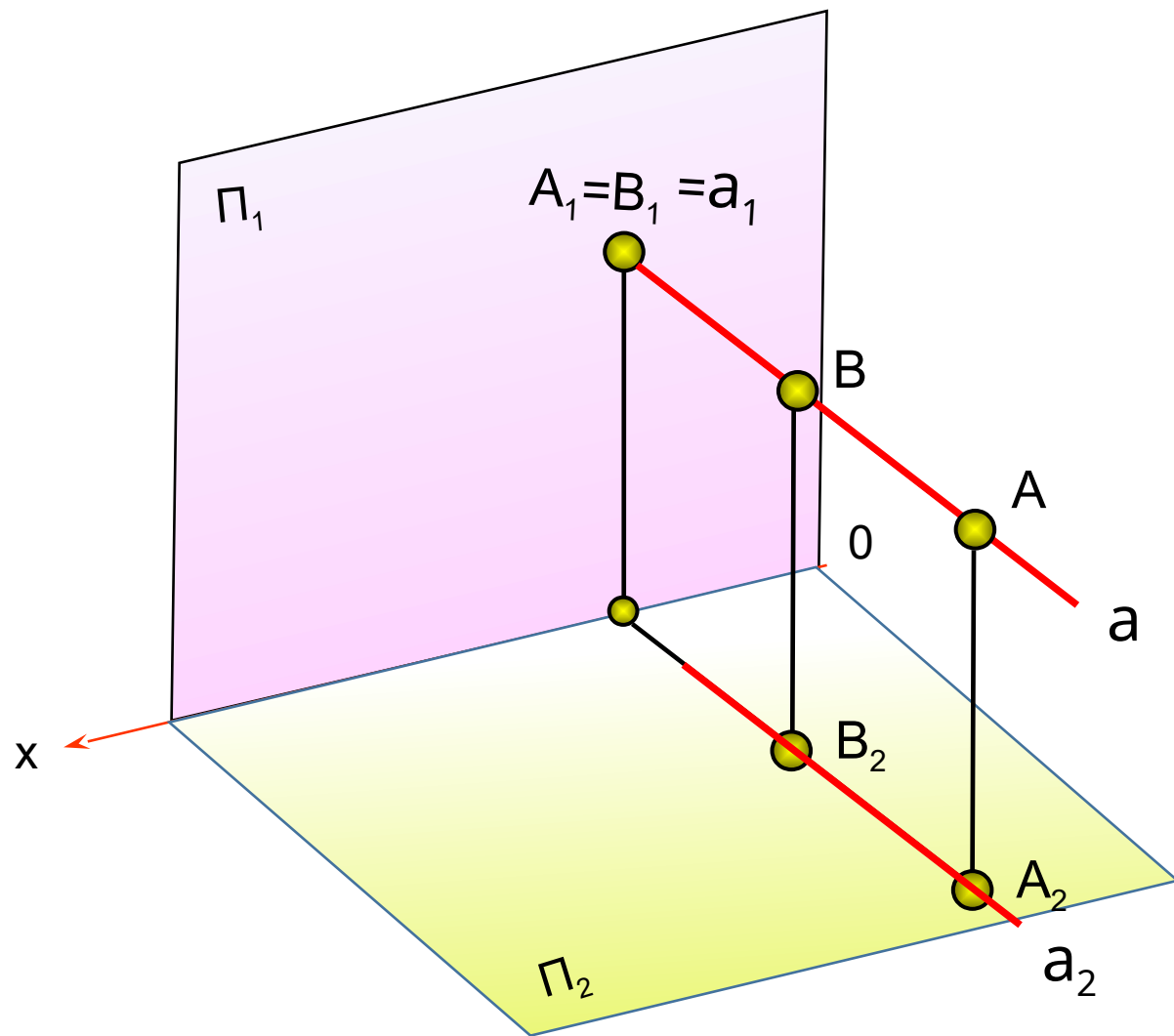
б) горизонтально конкурирующие точки С и D

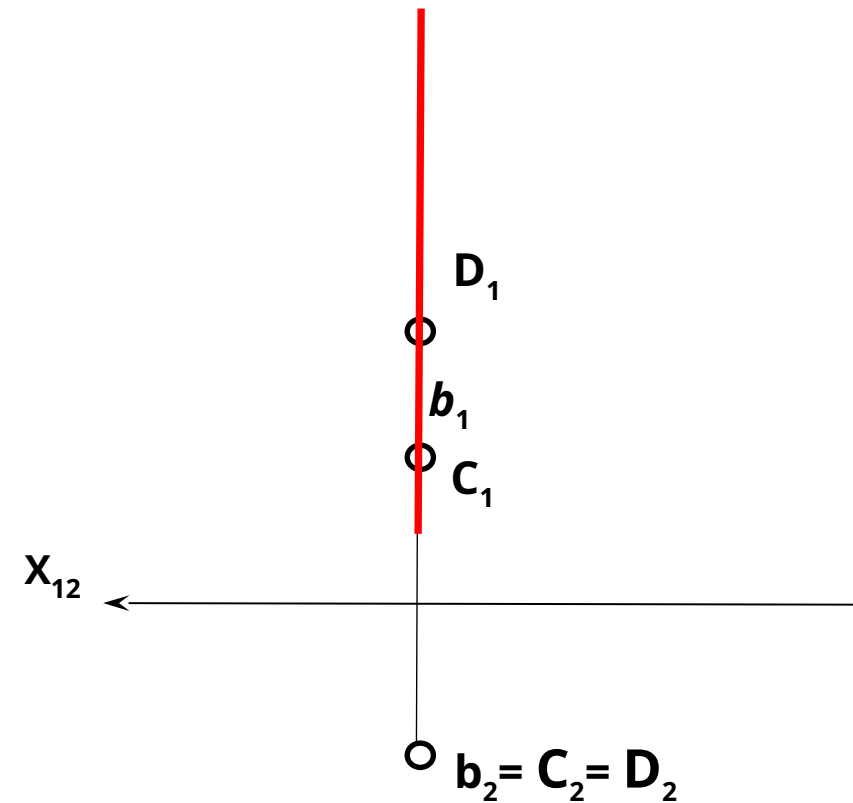
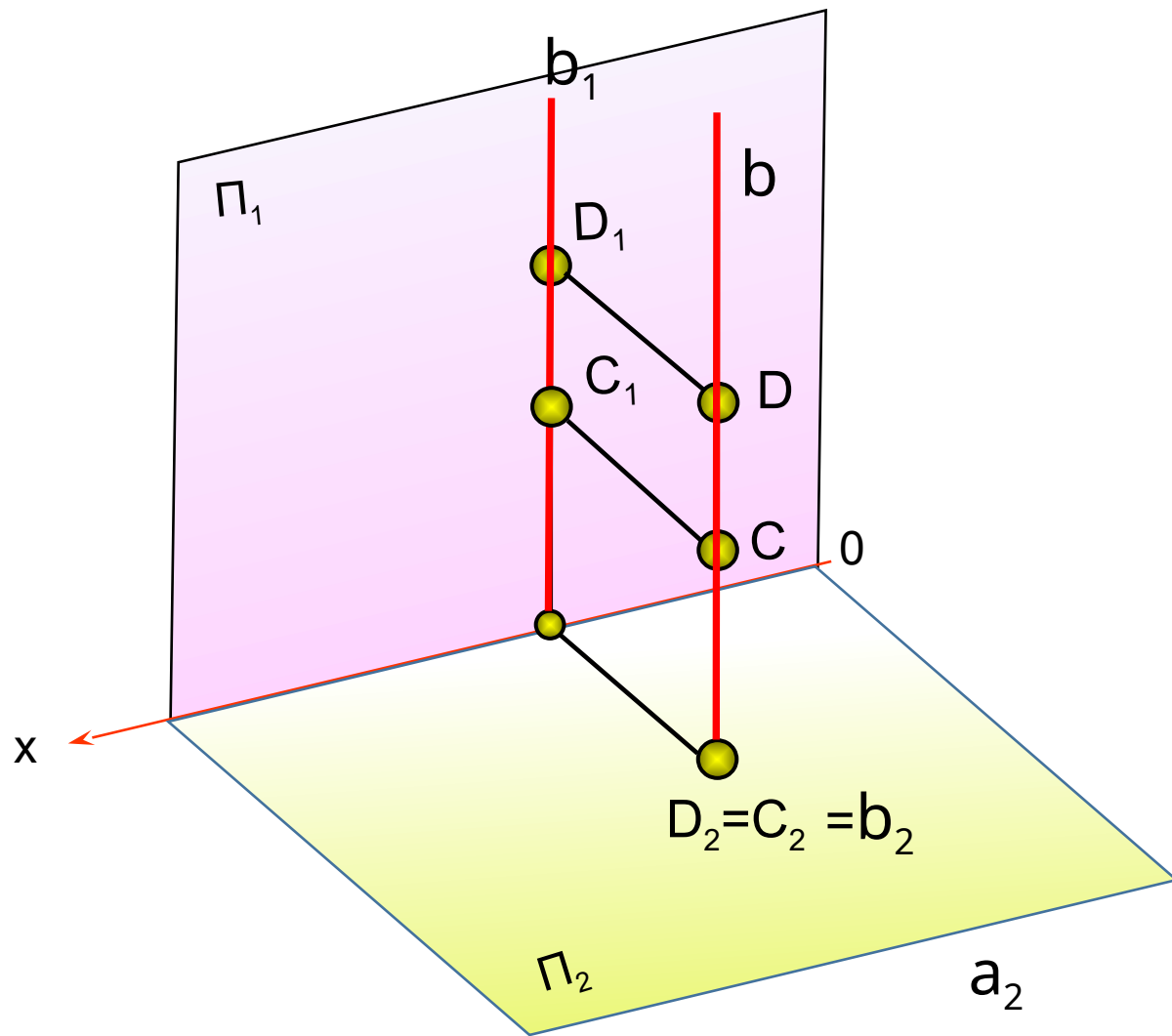
В начертательной геометрии интерес представляют точки, расположенные на проецирующих прямых, так называемые **конкурирующие** точки.

На рисунке а) показаны фронтально конкурирующие точки А и В; фронтальные проекции точек совпадают, прямая a является фронтально проецирующей (фронтальная проекция прямой вырождается в точку).

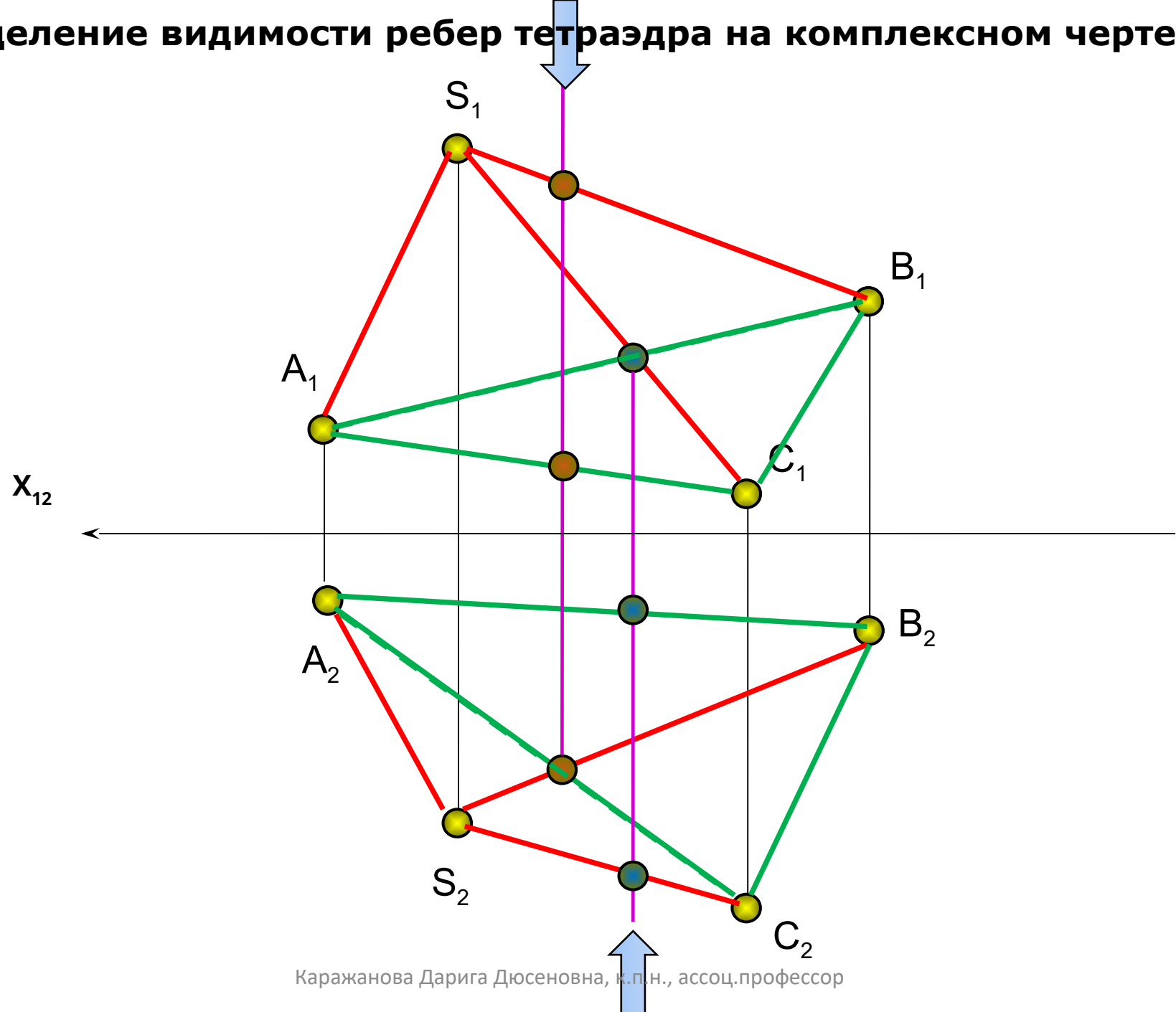
На рисунке б) показаны горизонтально конкурирующие точки С и D; горизонтальные проекции точек совпадают, прямая b является горизонтально проецирующей (горизонтальная проекция прямой вырождается в точку).

Конкурирующие точки применяют **при определении видимости** геометрических элементов на эпюре (Способ конкурирующих точек).





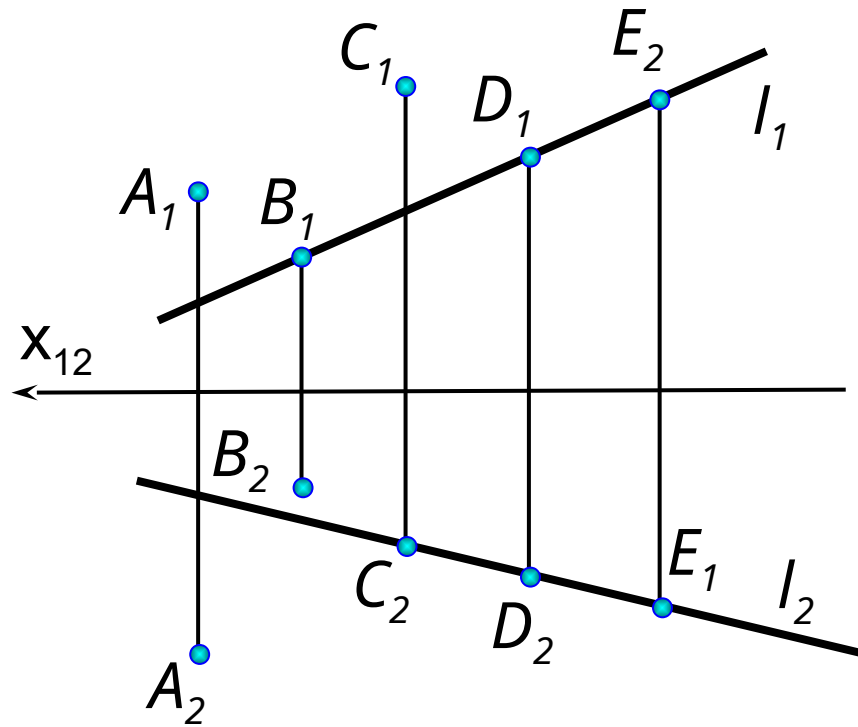
Определение видимости ребер тетраэдра на комплексном чертеже



Каражанова Дарига Дюсеновна, к.п.н., ассоц.профессор

2. Взаимное расположение точек и прямой.

Точка может принадлежать прямой, а также находиться вне ее. На рисунке показан пример взаимного положения точек A, B, C и прямой l . Точка B принадлежит прямой (т.к. обе проекции точки принадлежат проекциям прямой), Точки A и C не принадлежат прямой (т.к. одна из проекций точек не принадлежит проекции прямой):



$$D_1 \in l_1, D_2 \in l_2 \Rightarrow D \in l.$$

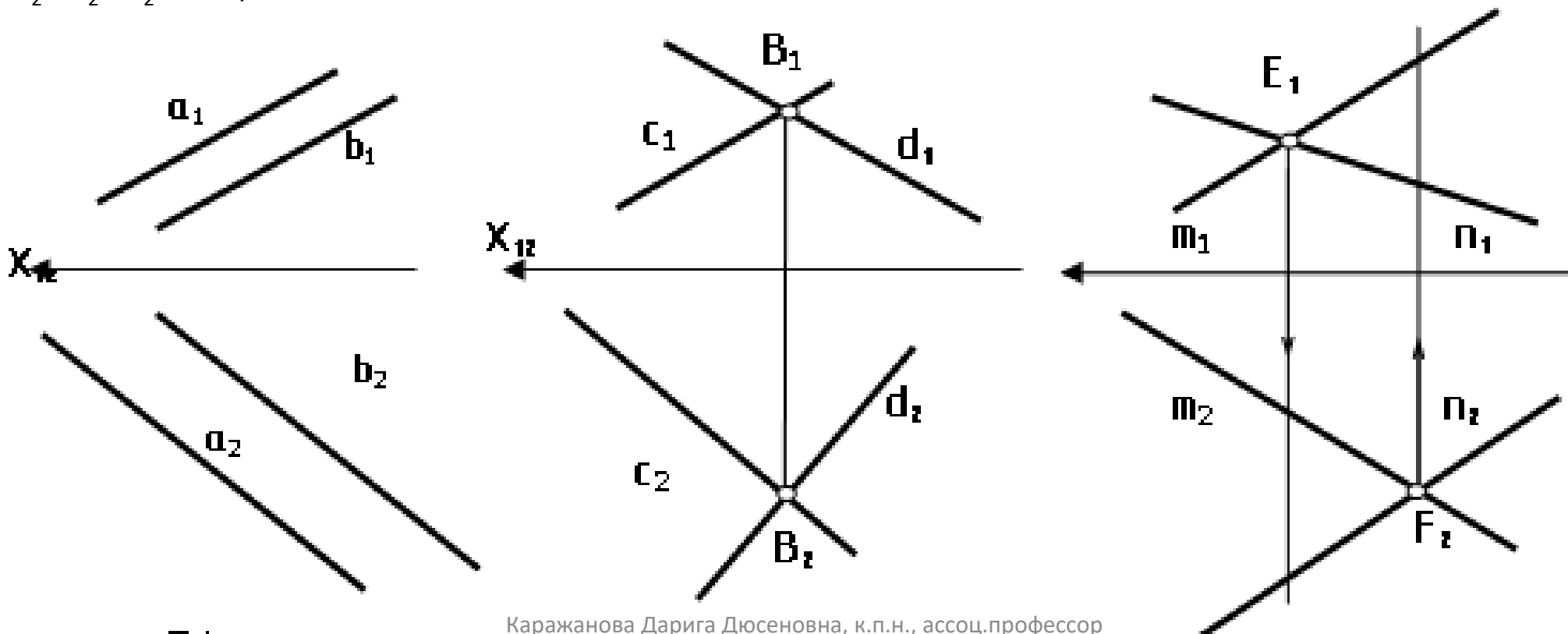
3. Взаимное расположение двух прямых.

а) Параллельные прямые. Если прямые a и b параллельны, то одноименные проекции этих прямых взаимно параллельны $a \parallel b \Rightarrow a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2$;

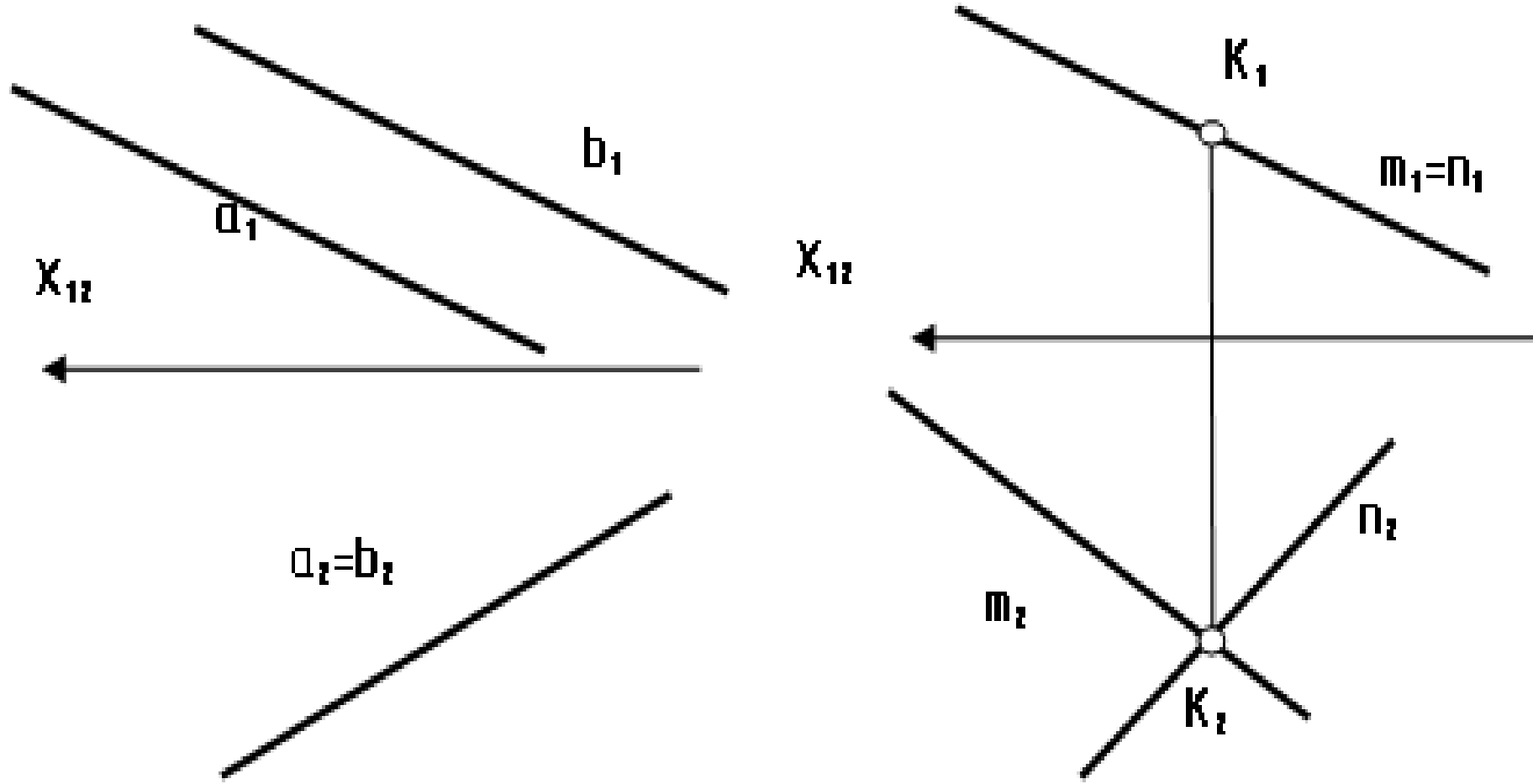
б) Пересекающиеся прямые. Если прямые c и d пересекаются, то на эпюре точки пересечения B_1 и B_2 одноименных проекций прямых должны располагаться на одной и той же вертикальной линии проекционной связи $c \cap d = B$;

в) Скрещивающиеся прямые. Если прямые m и n скрещивающиеся, то точки пересечения одноименных проекций прямых лежат на разных линиях проекционной связи

$$m_1 \cap n_1 = E_1, m_2 \cap n_2 = F_2 \quad m \cdot n;$$



г) Конкурирующие прямые. Если одна пара проекций двух проекций прямых совпадают, то такие прямые являются конкурирующими.

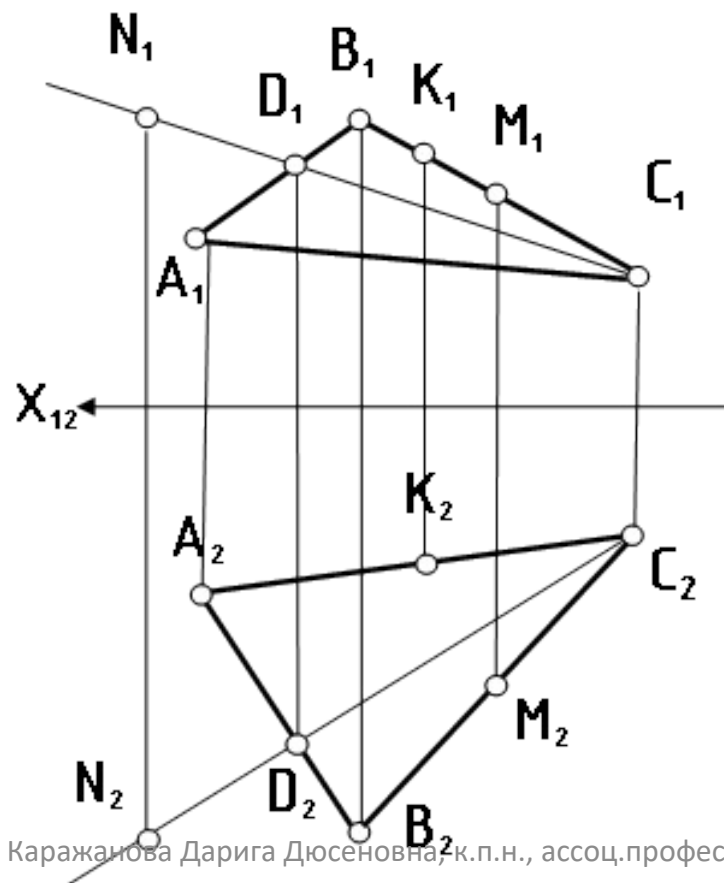


4. Взаимное расположение точек и плоскости. Точка может принадлежать плоскости и располагаться вне ее. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

Точка M принадлежит плоскости $\beta(\Delta ABC)$, так как ее проекции M_1 и M_2 принадлежат одноименным проекциям отрезка BC , точка N также принадлежит плоскости β , проекции этой точки принадлежат проекциям прямой $l(DC)$, лежащей в этой плоскости.

$M, N \in \beta(\Delta ABC)$

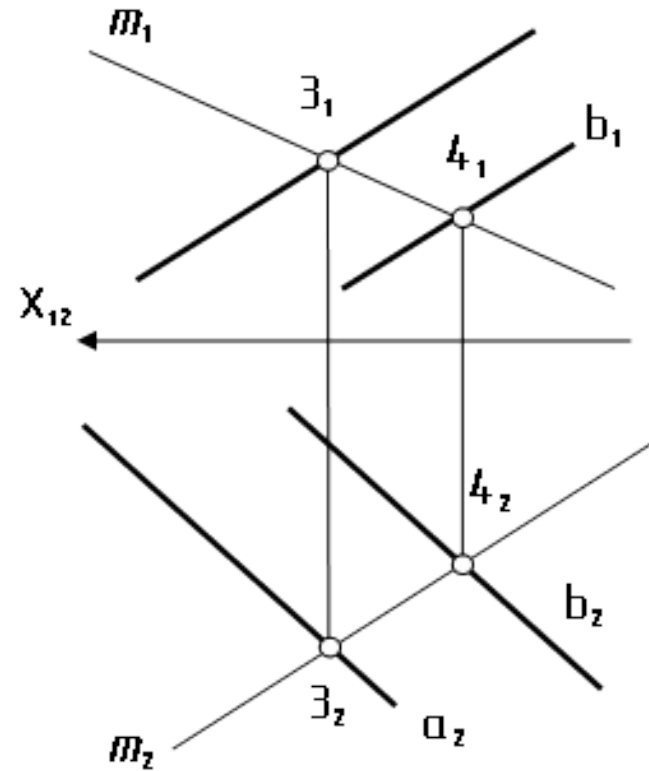
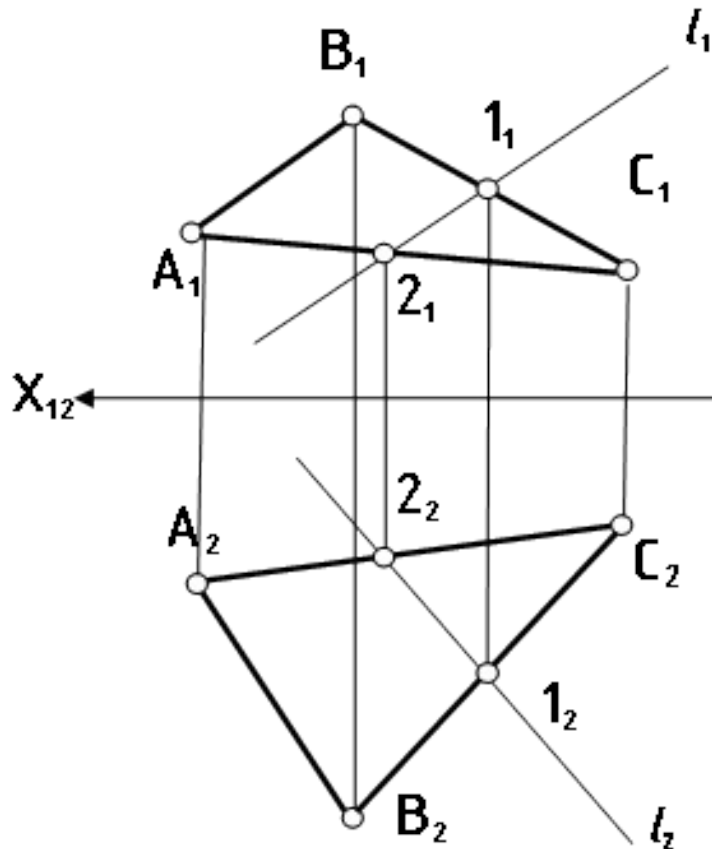
$K \notin \beta(\Delta ABC)$



5. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Возможны следующие отношения прямой и плоскости: прямая принадлежит плоскости, прямая параллельна плоскости, прямая пересекает плоскость.

а) **Прямая принадлежит плоскости.** Если две точки прямой принадлежат данной плоскости, то и сама прямая лежит в этой плоскости.



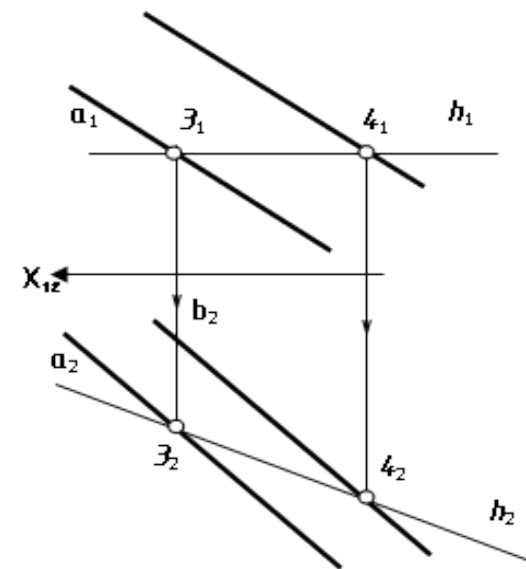
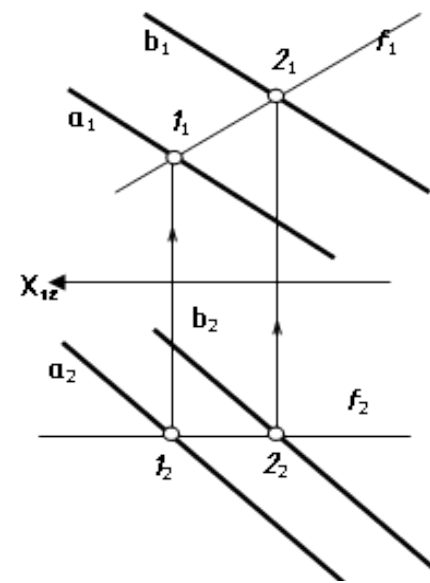
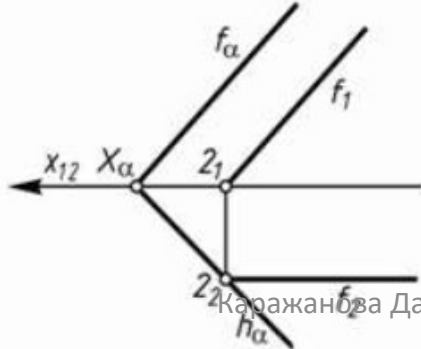
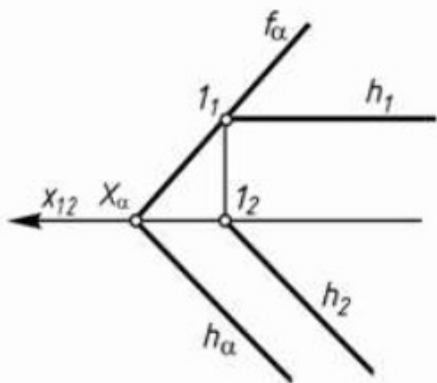
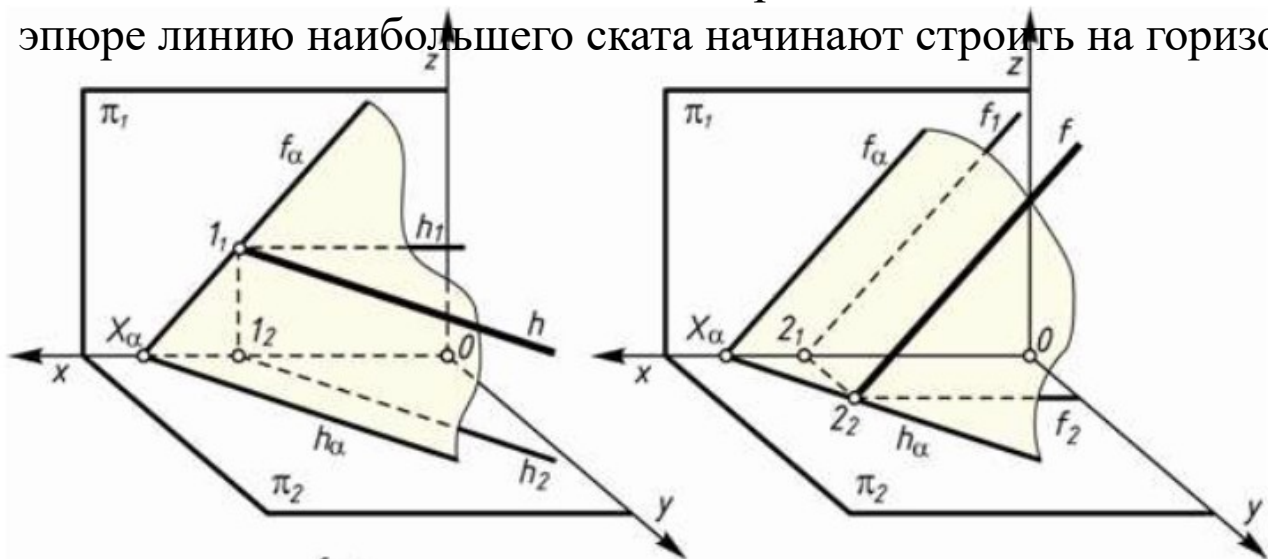
Из числа прямых, лежащих в плоскости, выделяются прямые особого положения:

Фронталью плоскости называется прямая f , лежащая в этой плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций π_1 .

Горизонталью плоскости называется прямая h , лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций π_2 .

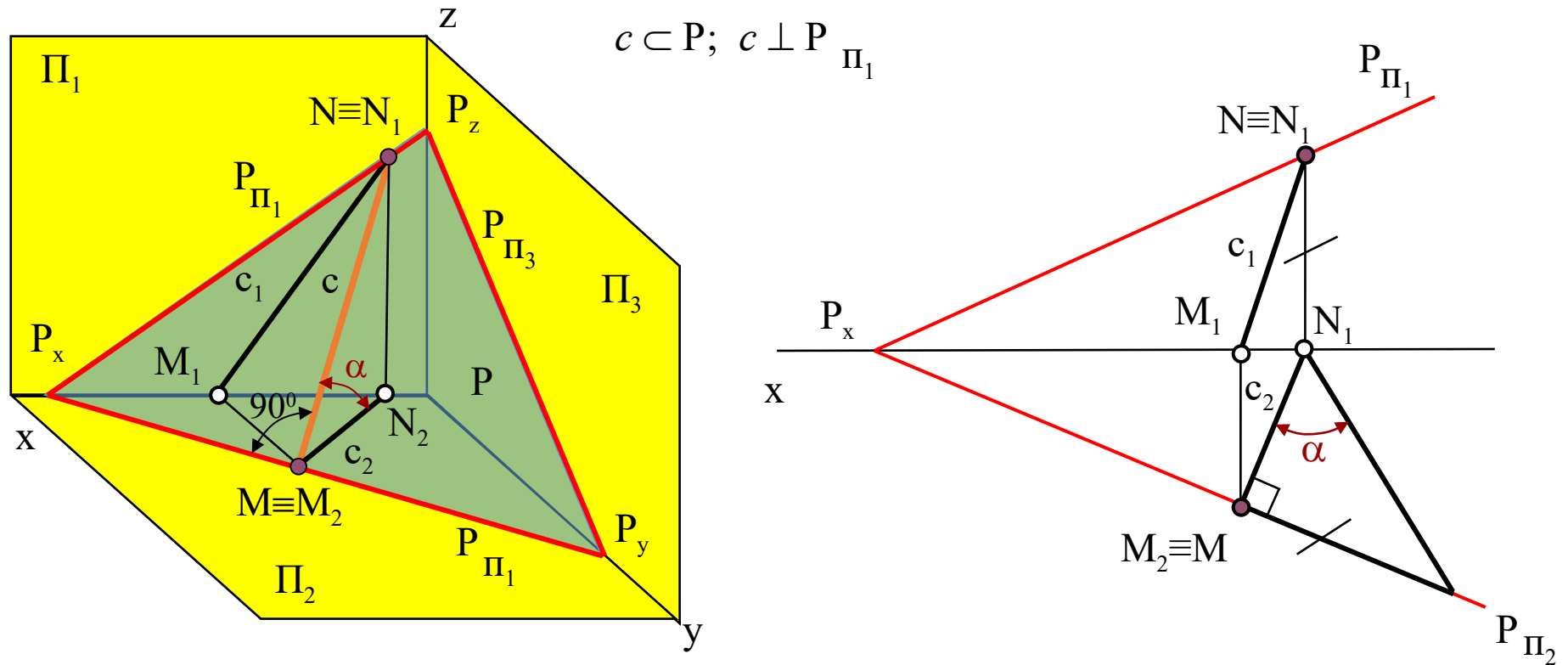
Профильная прямая плоскости – это прямая p лежащая в плоскости и параллельная профильной плоскости проекций π_3 .

Линия наибольшего ската – это прямая v , лежащая в плоскости и перпендикулярная к горизонталям плоскости. На эюре линию наибольшего ската начинают строить на горизонтальной проекции плоскости.

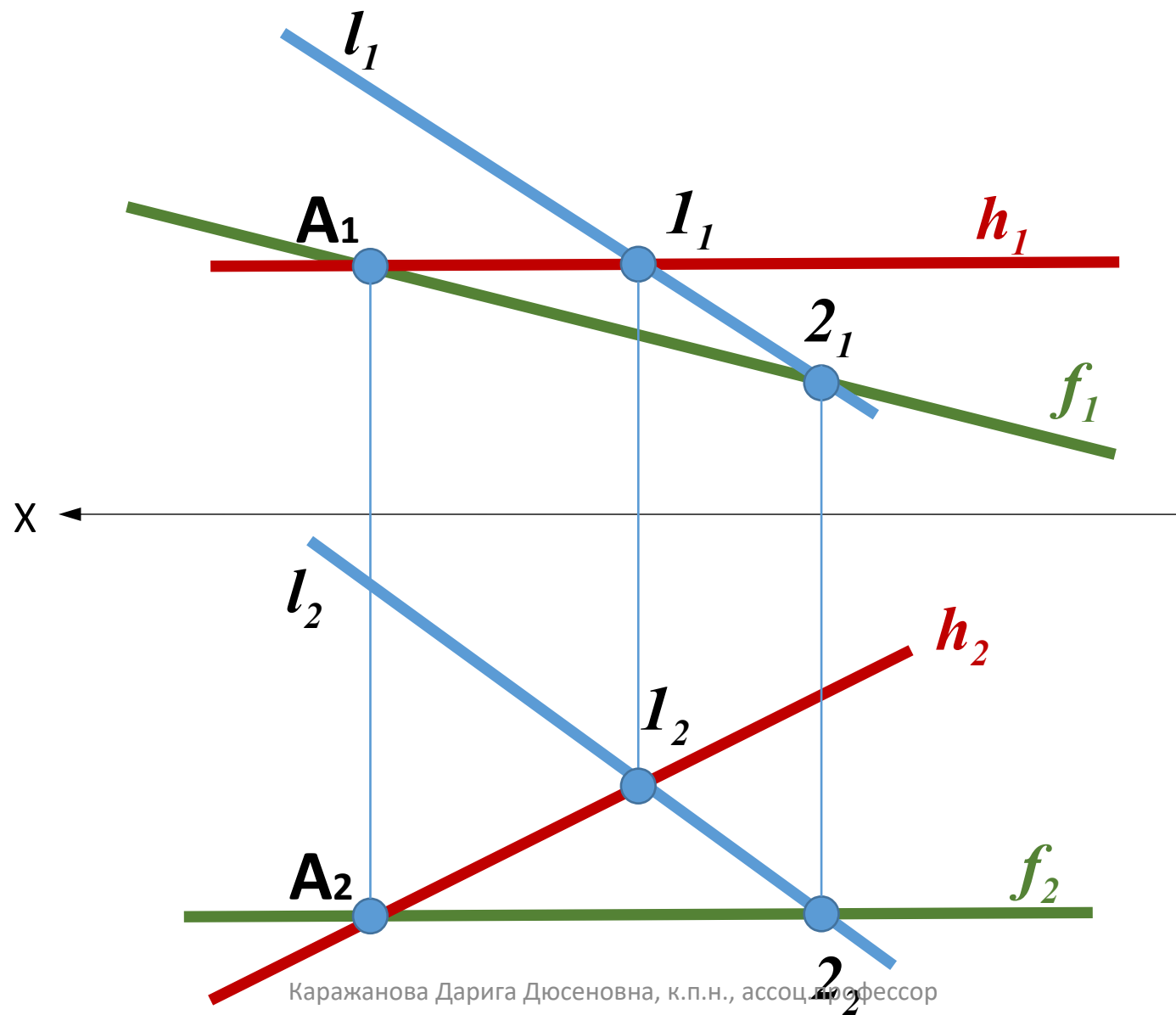


ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО СКАТА ПЛОСКОСТИ

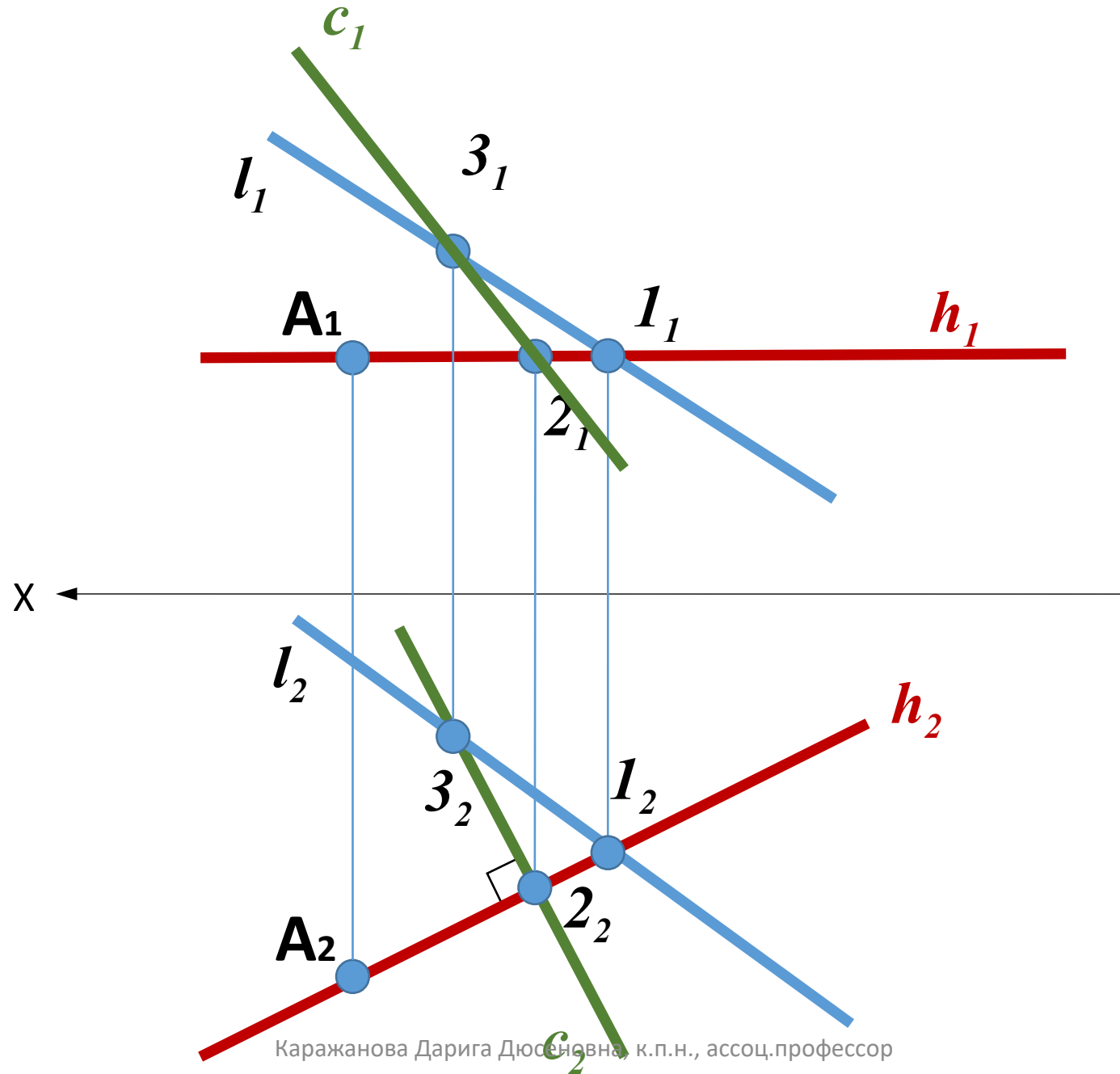
Линией наибольшего ската плоскости называется прямая, лежащая в данной плоскости и перпендикулярная всем горизонталям плоскости, в том числе и горизонтальному следу плоскости (нулевая горизонталь).



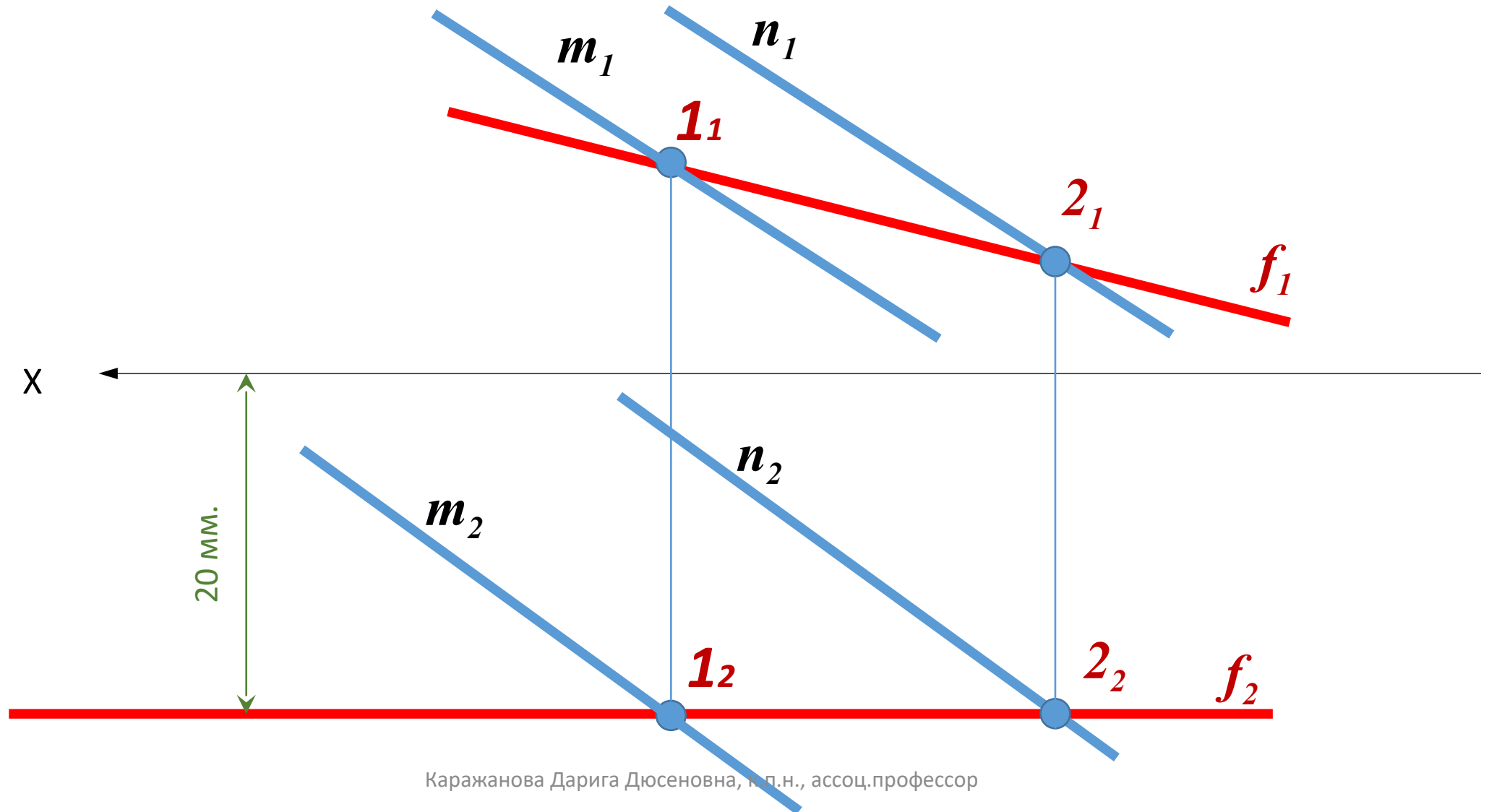
Задача. В плоскости, заданной точкой A и прямой l , построить фронталь и горизонталь



Задача. В плоскости, заданной точкой A и прямой l , линию наибольшего ската

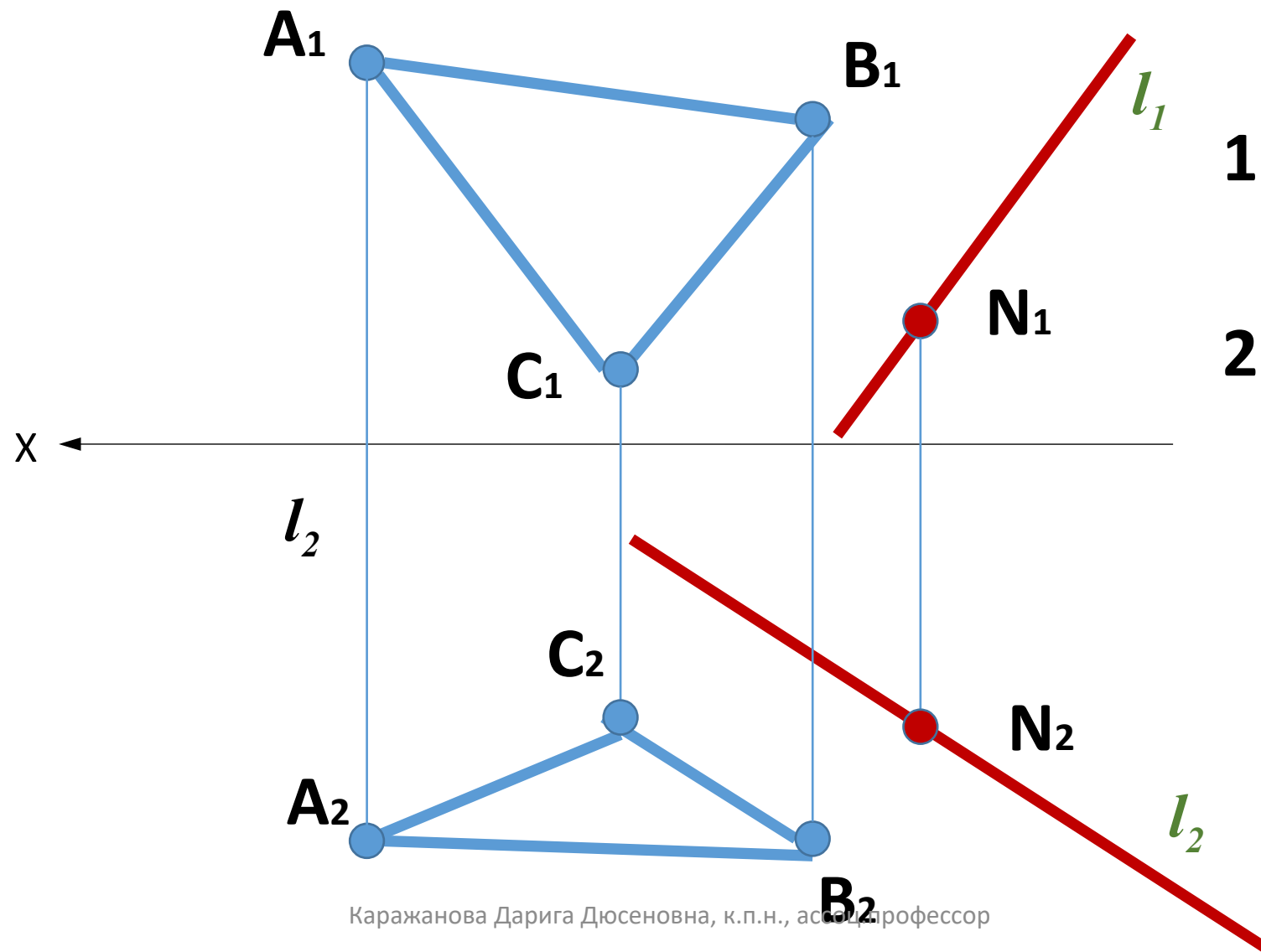


В плоскости, заданной параллельными прямыми m и n построить фронталь, расположенную на расстоянии 20мм от плоскости π_1 .



б) **Прямая параллельна плоскости.** Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача . Через точку N провести прямую, параллельную плоскости $\alpha(\triangle A, B, C)$

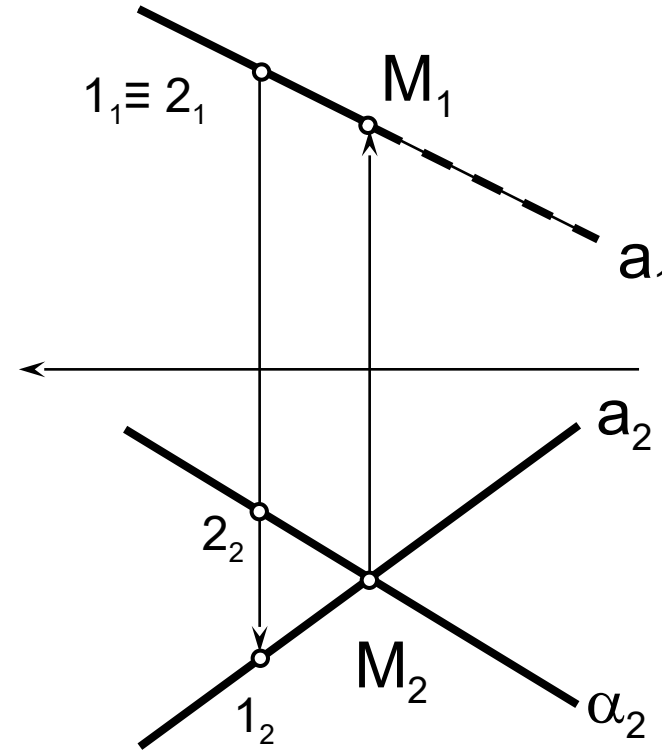
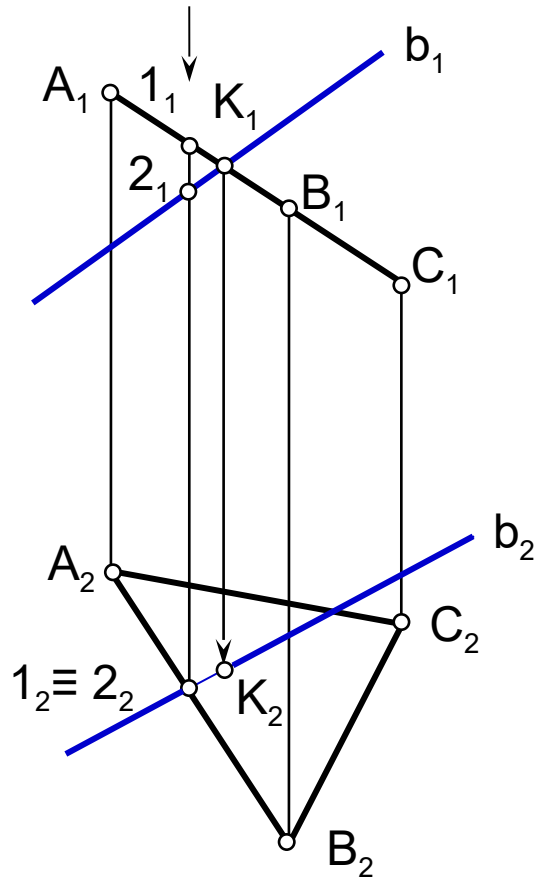


1. $N_1 \in l_1 \parallel (C_1B_1)$

2. $N_2 \in l_2 \parallel (C_2B_2)$

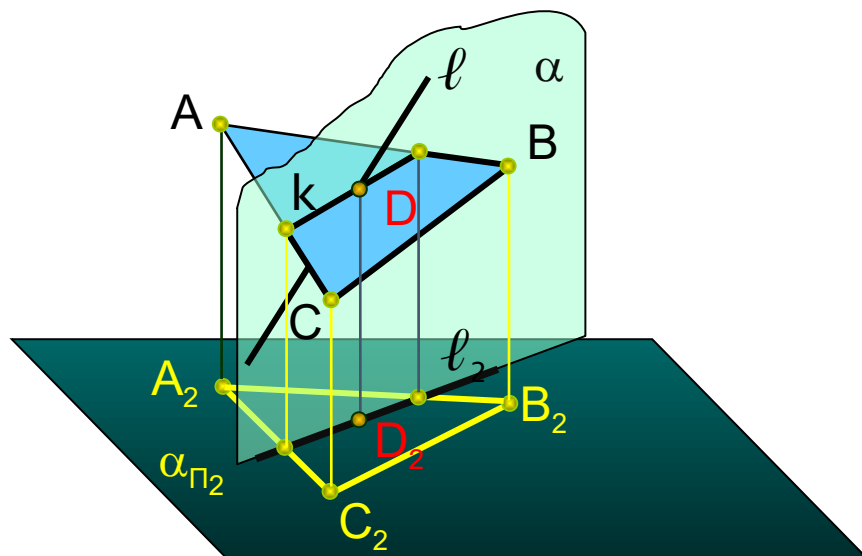
в) **Прямая пересекает плоскость.** Если прямая не параллельна плоскости, то она пересекается с ней.

Пересечение прямой общего положения с проецирующей плоскостью



(Плоскость задана следом)

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



$$\alpha_{\perp P_2} \equiv l_2$$

Алгоритм решения задачи:

1. Прямая заключается во
вспомогательную плоскость

$$l \subset \alpha \perp P_2$$

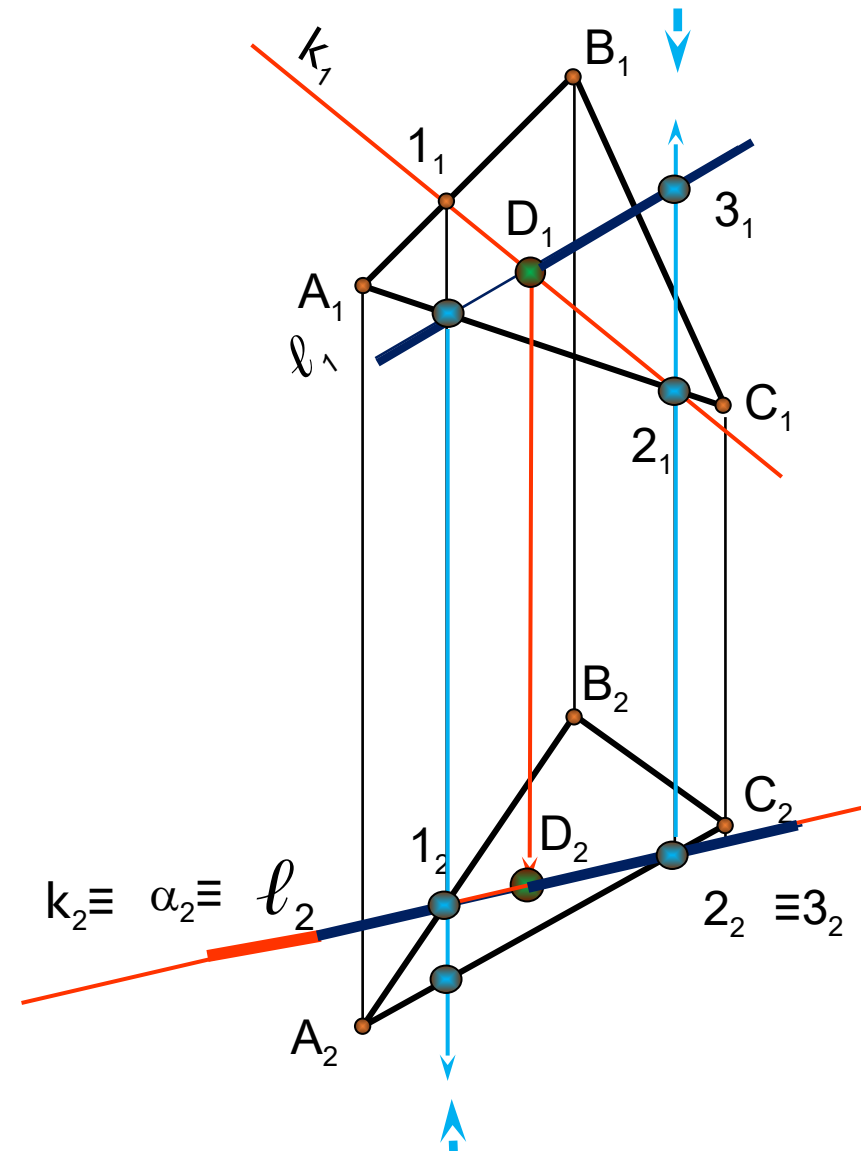
2. Определяется линия
пересечения заданной
плоскости со вспомогательной

$$\alpha \cap \beta = k$$

3. Отмечается искомая
точка на пересечении
данной прямой с линией
пересечения плоскостей

$$k \cap l = D$$

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



Задача

Найти точку пересечения прямой l с плоскостью (A, B, C)

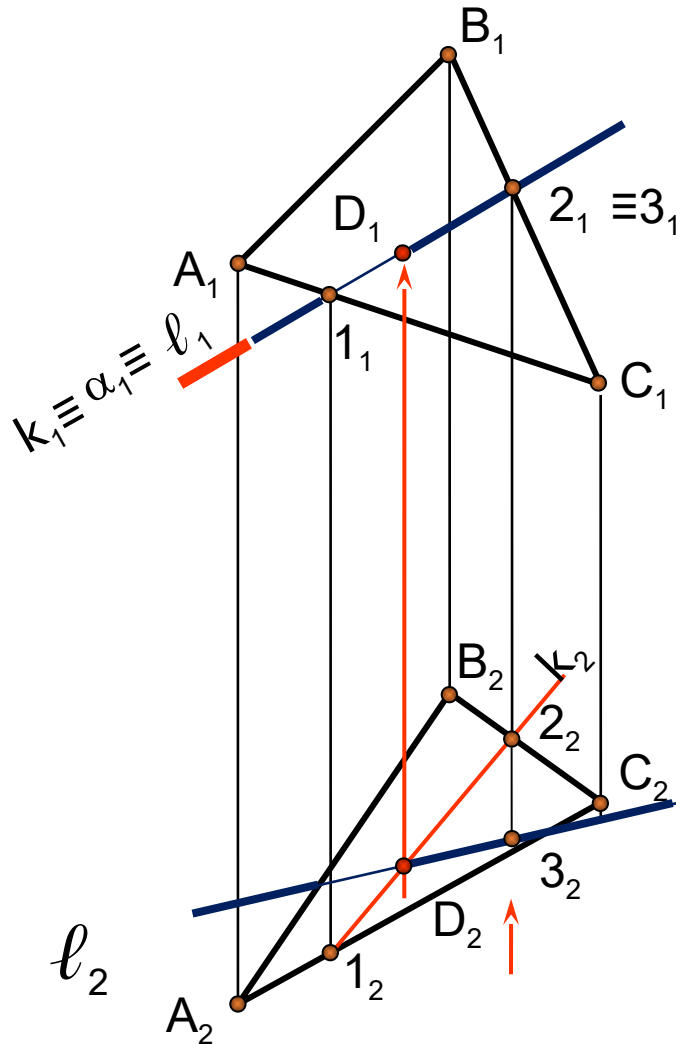
Через прямую l проводим фронтально-проецирующую плоскость α ;

$$\alpha_1 \subset l_1;$$

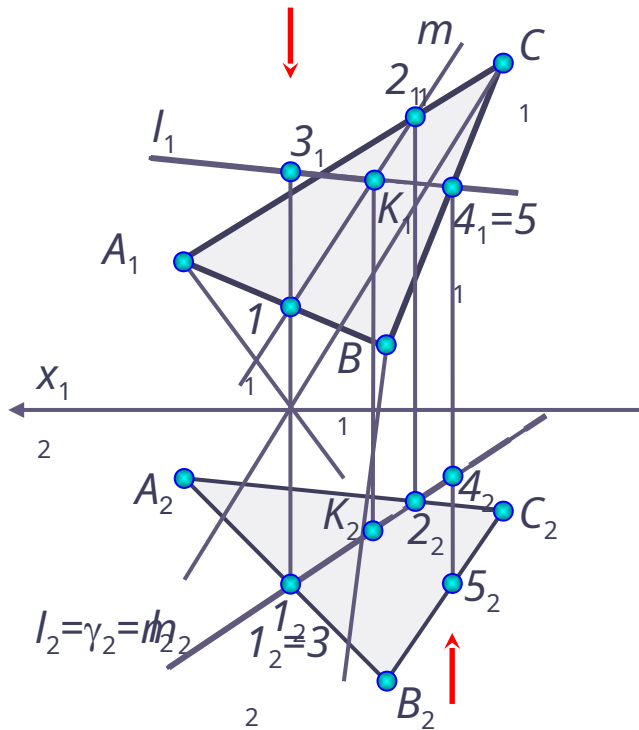
$$\alpha_1 \cap (A_1 B_1 C_1) = k_1;$$

$$k_2 \cap l_2 = D_2;$$

$$l \cap (ABC) = D$$



Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



$$l \in (AB), 3 \in l$$

Точки 1 и 3 – горизонтально-конкурирующие.
Точка 3 расположена выше, поэтому на горизонтальной проекции между K_2 и 2_2 прямая l будет невидимая

1. Через прямую l проводим горизонтально-проецирующую плоскость γ ;

2. Определяем линию пересечения вспомогательной плоскости γ с заданной плоскостью α : $m = (\alpha \cap \gamma)$.

Прямые m и l лежат в горизонтально-проецирующей плоскости γ , т.е. Являются горизонтально-конкурирующими, поэтому:
 $l_2 = \gamma_2 = m_2$.

$$m_2 \cap (A_2 B_2) = l_2. \quad m_2 \cap (A_2 C_2) = 2_2.$$

$$l_2 \uparrow l_1 \in (A_1 B_1). \quad 2_2 \uparrow 2_1 \in (A_1 C_1).$$

$$(l_1 \wedge 2_1) = m_1.$$

$$(m_1 \cap l_1) = K_1.$$

3. а) $m_1 = l_1 \Rightarrow l \in \alpha$;

$$K_1 \downarrow K_2 \in l_2.$$

б) $m_1 \parallel l_1 \Rightarrow l \parallel \alpha$;

в) $m_1 \cap l_1 \Rightarrow l \cap \alpha$.

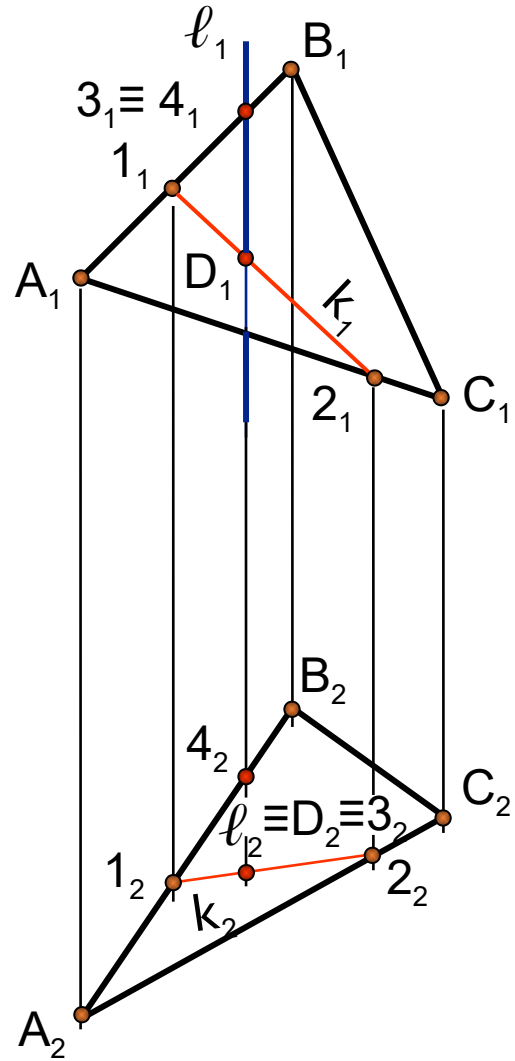
$$K = (l \cap \alpha).$$

$$4 \in l, 5 \in (BC)$$

Точки 4 и 5 – фронтально-конкурирующие.

Точка 5 расположена ближе, поэтому на фронтальной проекции между K_1 и 4_1 прямая l будет невидимая

Пересечение проецирующей прямой с плоскостью общего положения



$$l \perp \Pi_2$$

$$l \cap \alpha(ABC) = D$$

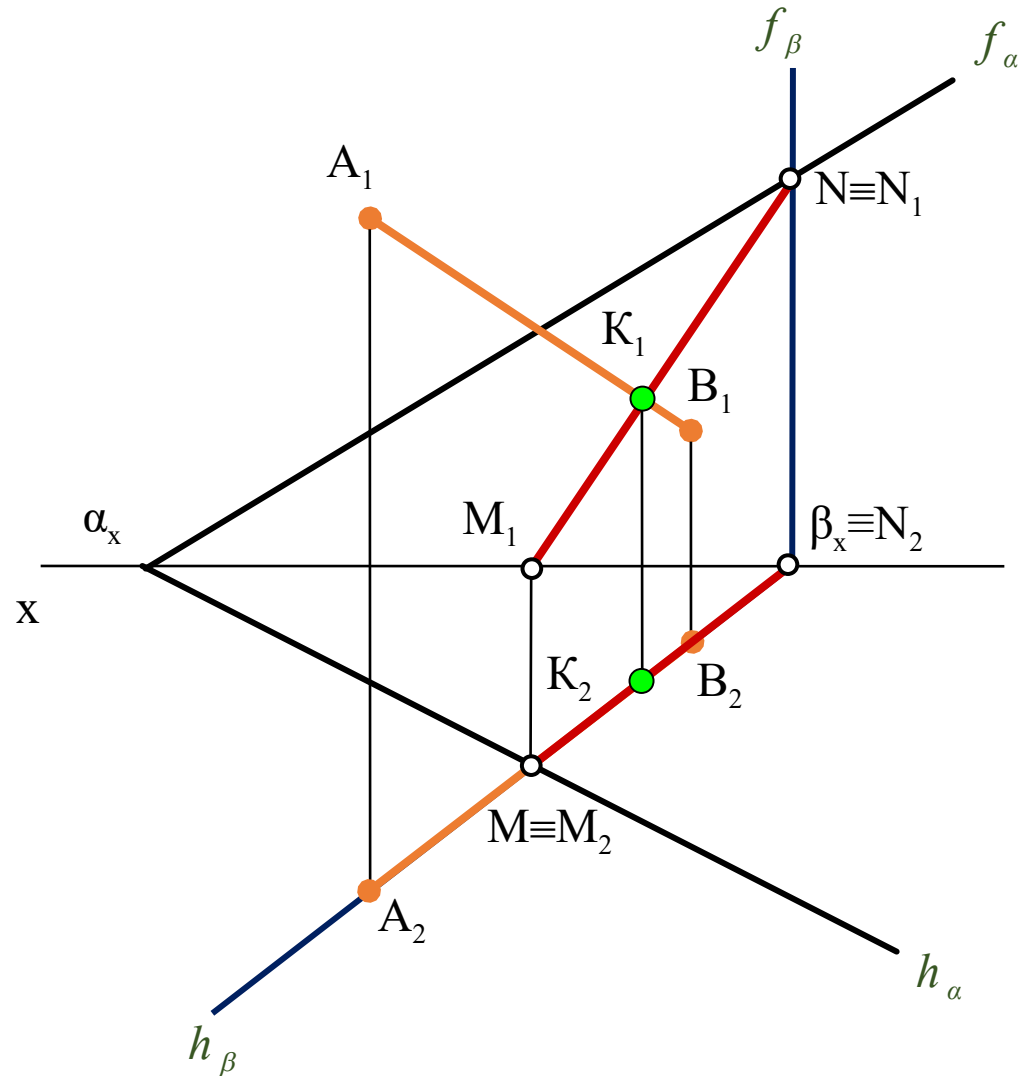
Задача. Построить точку пересечения прямой (AB) с плоскостью P, заданную следами.

1) $[AB] \subset \beta$

2) $\alpha \cap \beta = (MN)$

3) $(MN) \cap (AB) = K$

$K = (AB) \cap \alpha$



6. Взаимное расположение плоскостей.

Две различные плоскости пересекаются по собственной или несобственной прямой. Плоскости, которые пересекаются по несобственной прямой, принято называть параллельными.

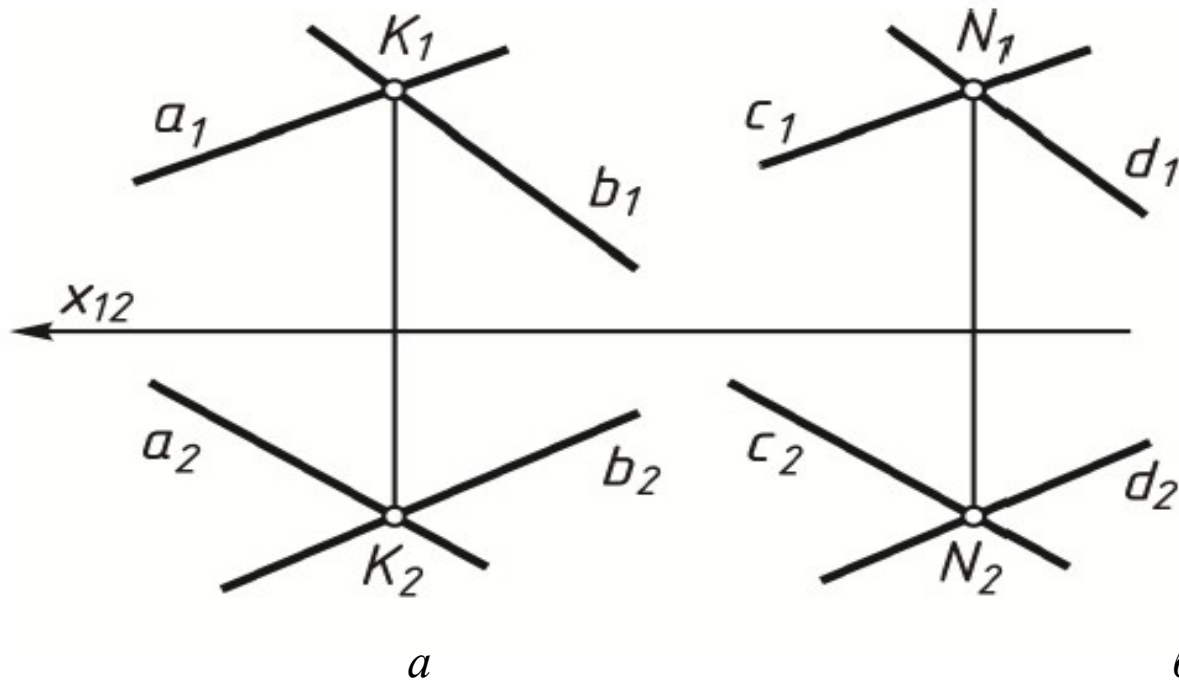
а) **Параллельные плоскости.** Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то такие плоскости параллельны. Также признаком параллельности плоскостей на эпюре является параллельность их соответствующих следов.

б) **Пересекающиеся плоскости.** Общим элементом двух пересекающихся плоскостей является прямая, поэтому для построения линии пересечения двух плоскостей достаточно найти две их общие точки.

а) Параллельные плоскости

Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Также признаком параллельности плоскостей на эпюре является параллельность их соответствующих следов.

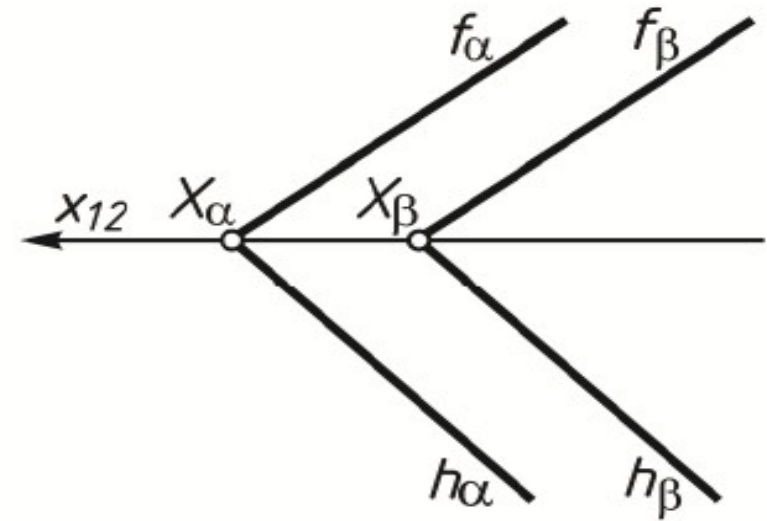


a

б

$$c \parallel a (c_1 \parallel a_1, c_2 \parallel a_2), d \parallel b (d_1 \parallel b_1, d_2 \parallel b_2)$$

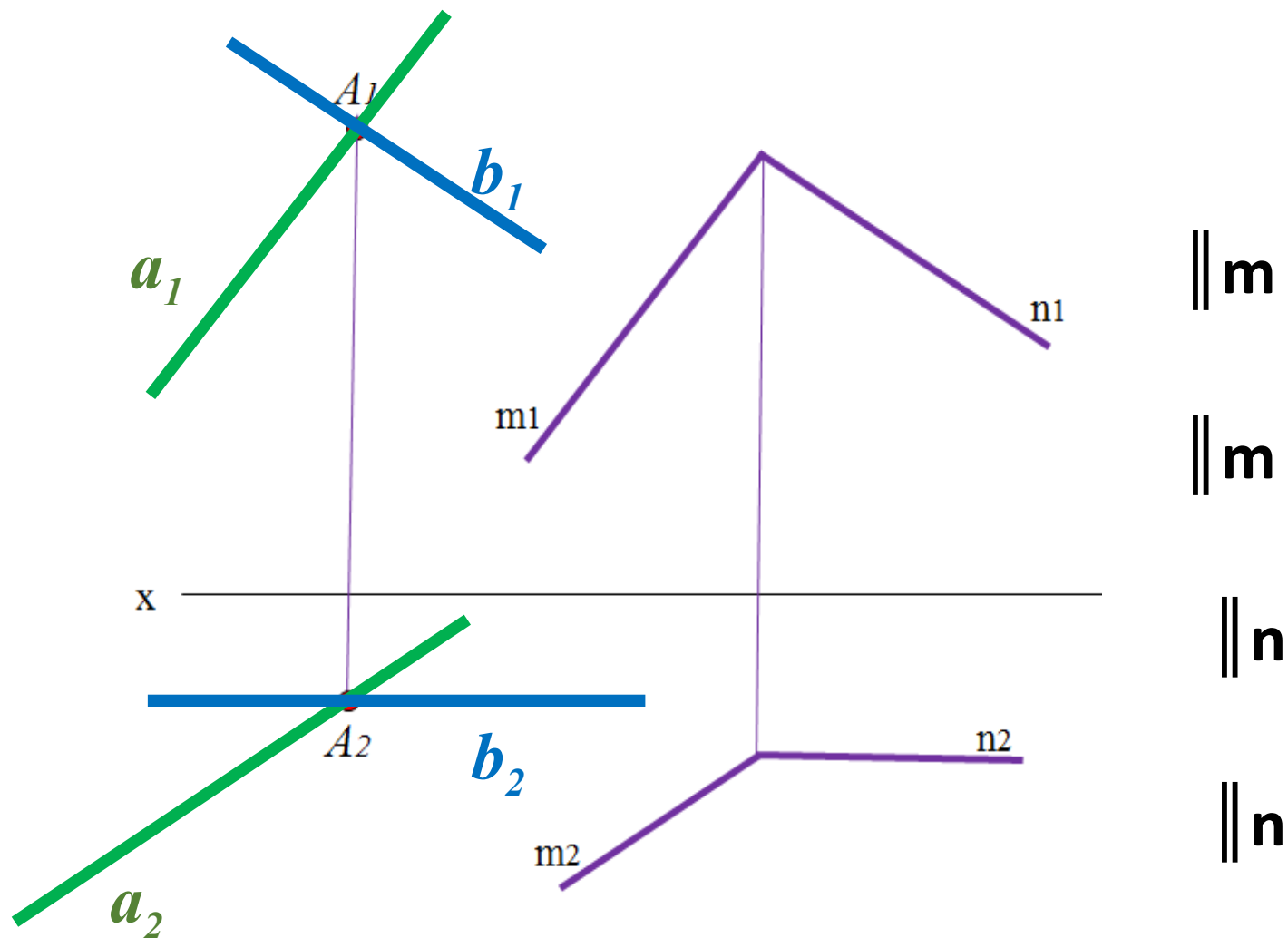
$$\alpha(a \cap b) \parallel \beta(c \cap d)$$



$$f_\alpha \parallel f_\beta, h_\alpha \parallel h_\beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

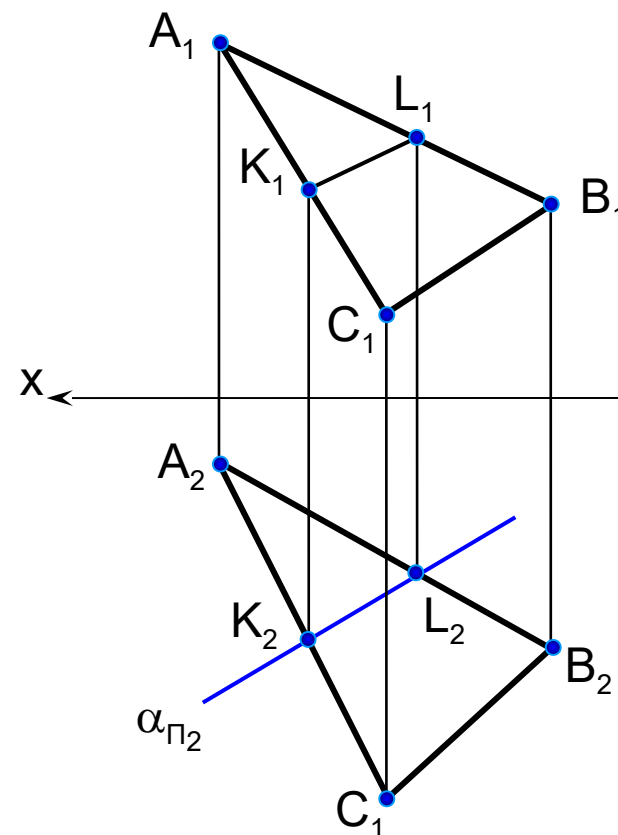
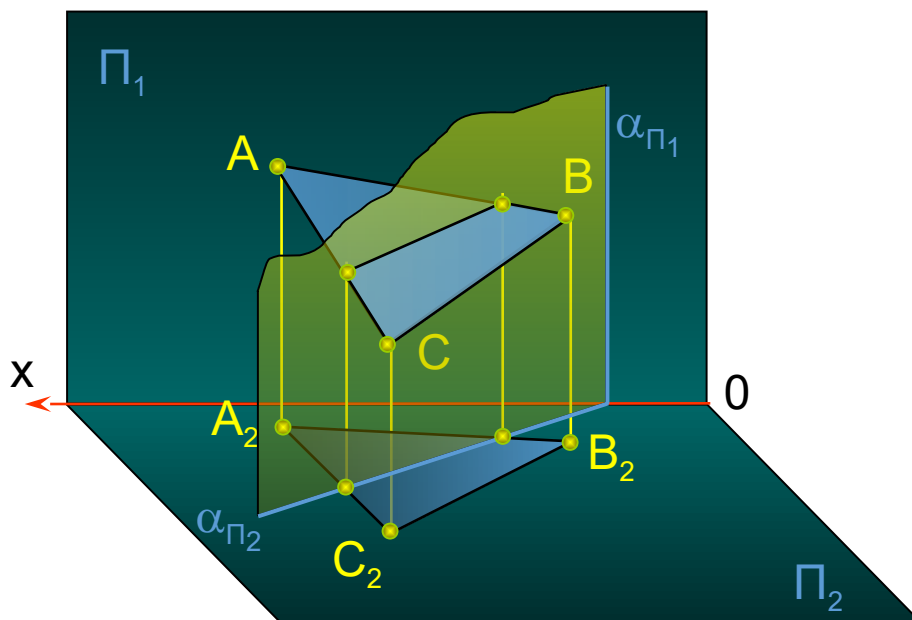
Задача

Через точку A провести плоскость, параллельную плоскости, заданной пересекающимися прямыми m и n .



б) Пересекающиеся плоскости.

Пересечение *плоскости общего положения*
с *проецирующей плоскостью*

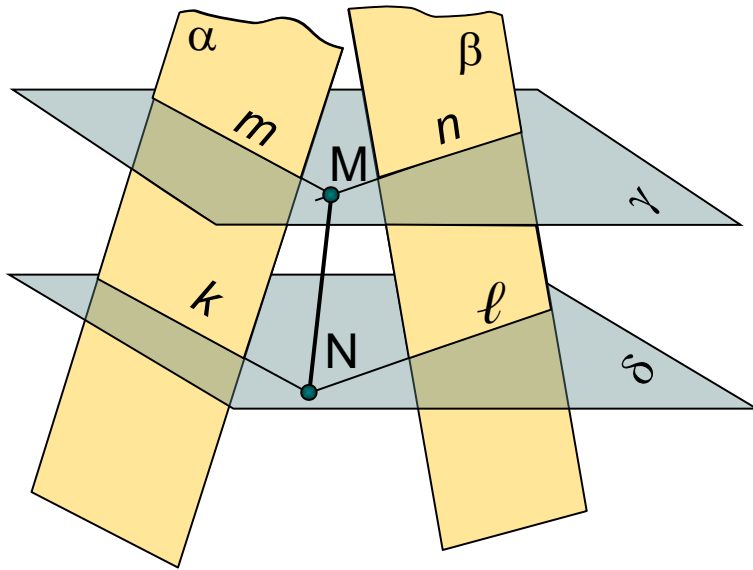


$$\alpha_{\Pi_1} \cap \beta(ABC) = KL$$

$$K_1 L_1 \equiv \alpha_1$$

Пересечение двух плоскостей общего положения

Алгоритм:

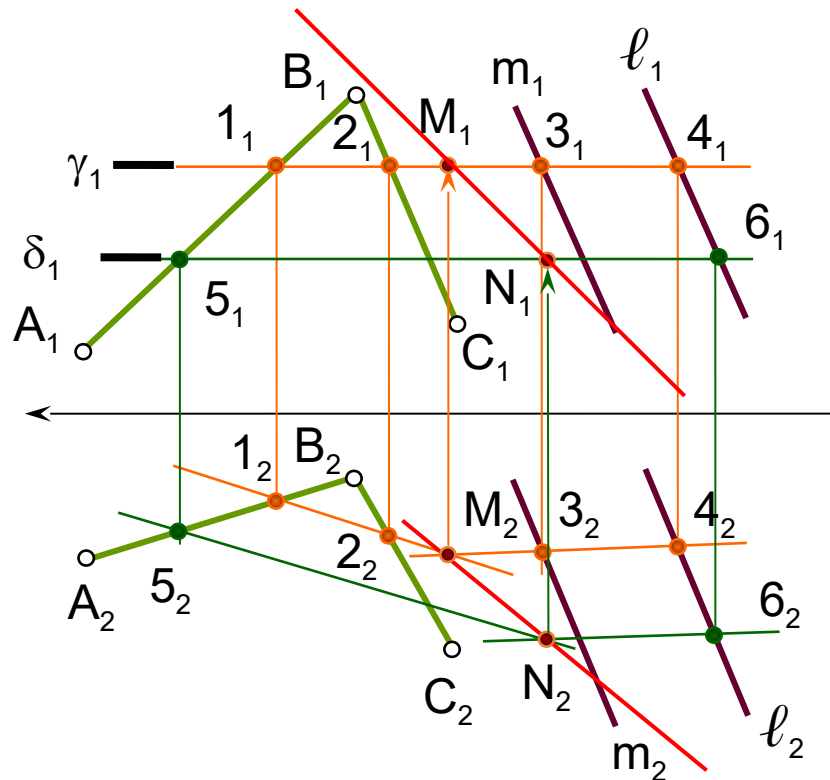


1. Вводится посредник – проецирующая плоскость γ
2. Определяется линия пересечения m плоскости α и посредника γ : $\alpha \cap \gamma = m$
3. Определяется линия n пересечения плоскости β и посредника γ : $\beta \cap \gamma = n$
4. Отмечается точка пересечения линий m и n : $m \cap n = M$
5. Вводится второй посредник δ

6. $\alpha \cap \delta = k$ 7. $\beta \cap \delta = l$ 8. $k \cap l = N$ 9. $\alpha \cap \beta = MN$

Задача

Построить линию пересечения плоскостей α и β



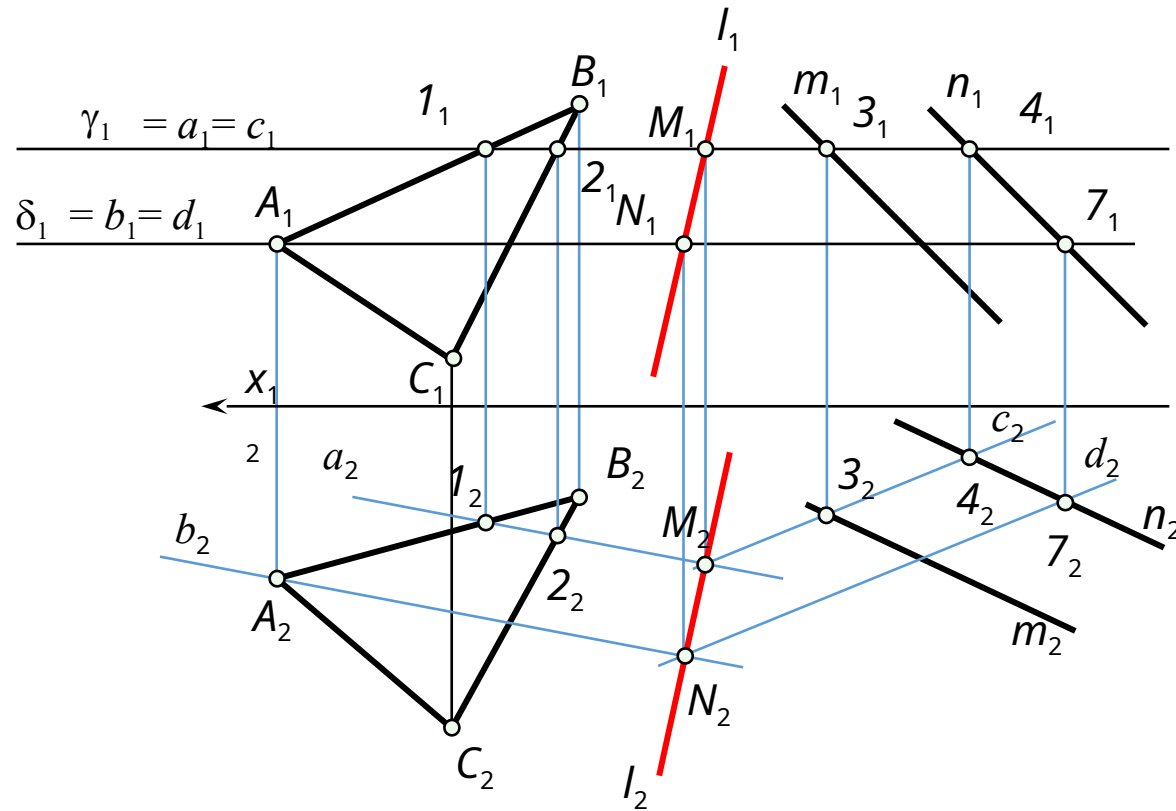
$$\alpha(AB \cap BC)$$

$$\beta(m \parallel l)$$

$$\gamma_{\Pi_1} \cap a = 12; \quad \gamma_{\Pi_1} \cap a = 34;$$

$$12 \cap 34 = M;$$

$$a \cap \beta = MN$$



$\alpha(ABC)$

$\beta(m||n)$

$\gamma \perp \pi_1$

$\gamma \cap \alpha = a$

$\gamma \cap \beta = c$

$a \cap c = M$

$\delta \perp \pi_1$

$\delta \cap \alpha = b$

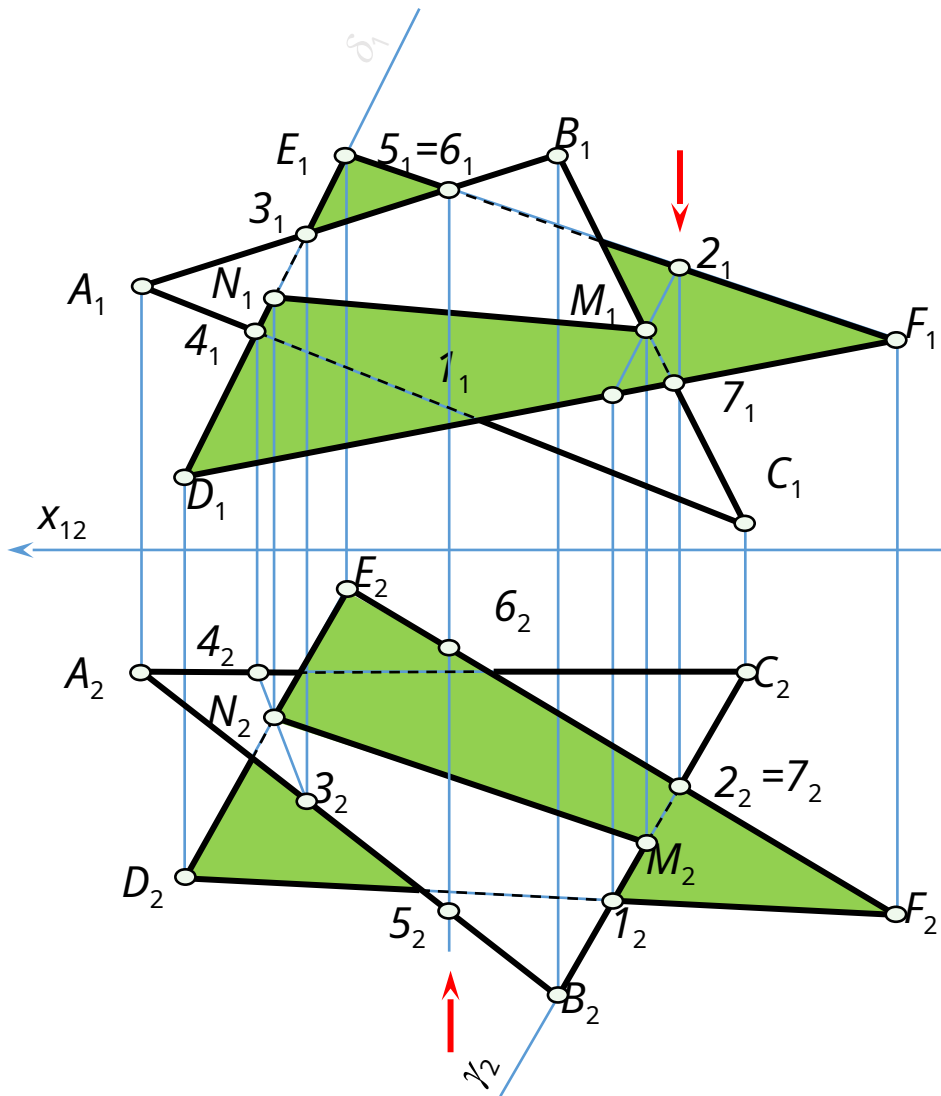
$\delta \cap \beta = d$

$b \cap d = N$

$$M_2 \wedge N_2 = l_2$$

$$M_1 \wedge N_1 = l_1$$

Построение линии пересечения двух плоскостей



$\alpha(ABC)$

$\beta(DEF)$

$$\alpha(ABC) \cap \beta(DEF) = (MN)$$

$$(BC) \in \gamma, \quad \gamma \perp \pi_2$$

$$\gamma \cap \beta(DEF) = (12)$$

$$(12) \cap (BC) = M$$

$$(DE) \in \delta, \quad \delta \perp \pi_1$$

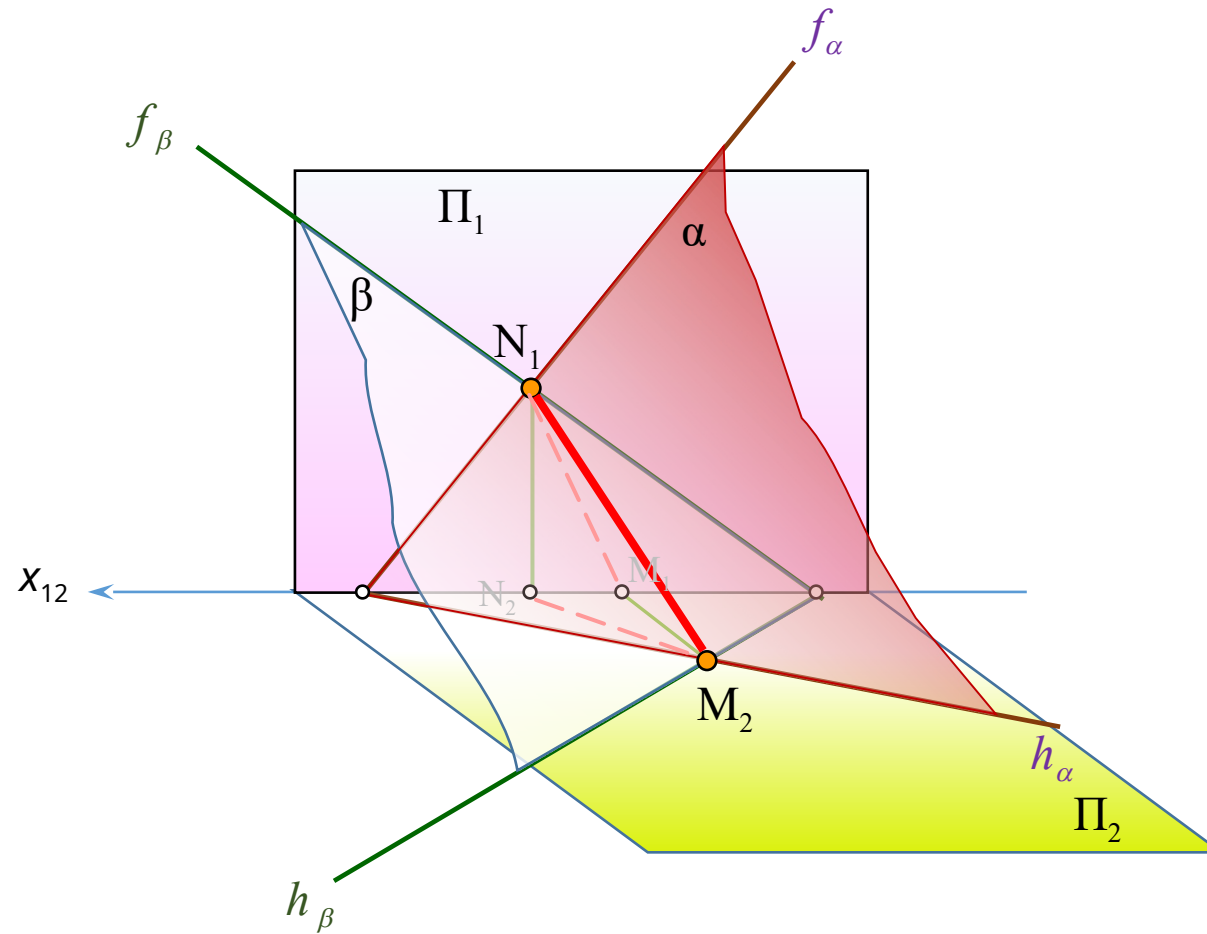
$$\delta \cap \alpha(ABC) = (34)$$

$$(34) \cap (DE) = N$$

$$M_1 \wedge N_1$$

$$M_2 \wedge N_2$$

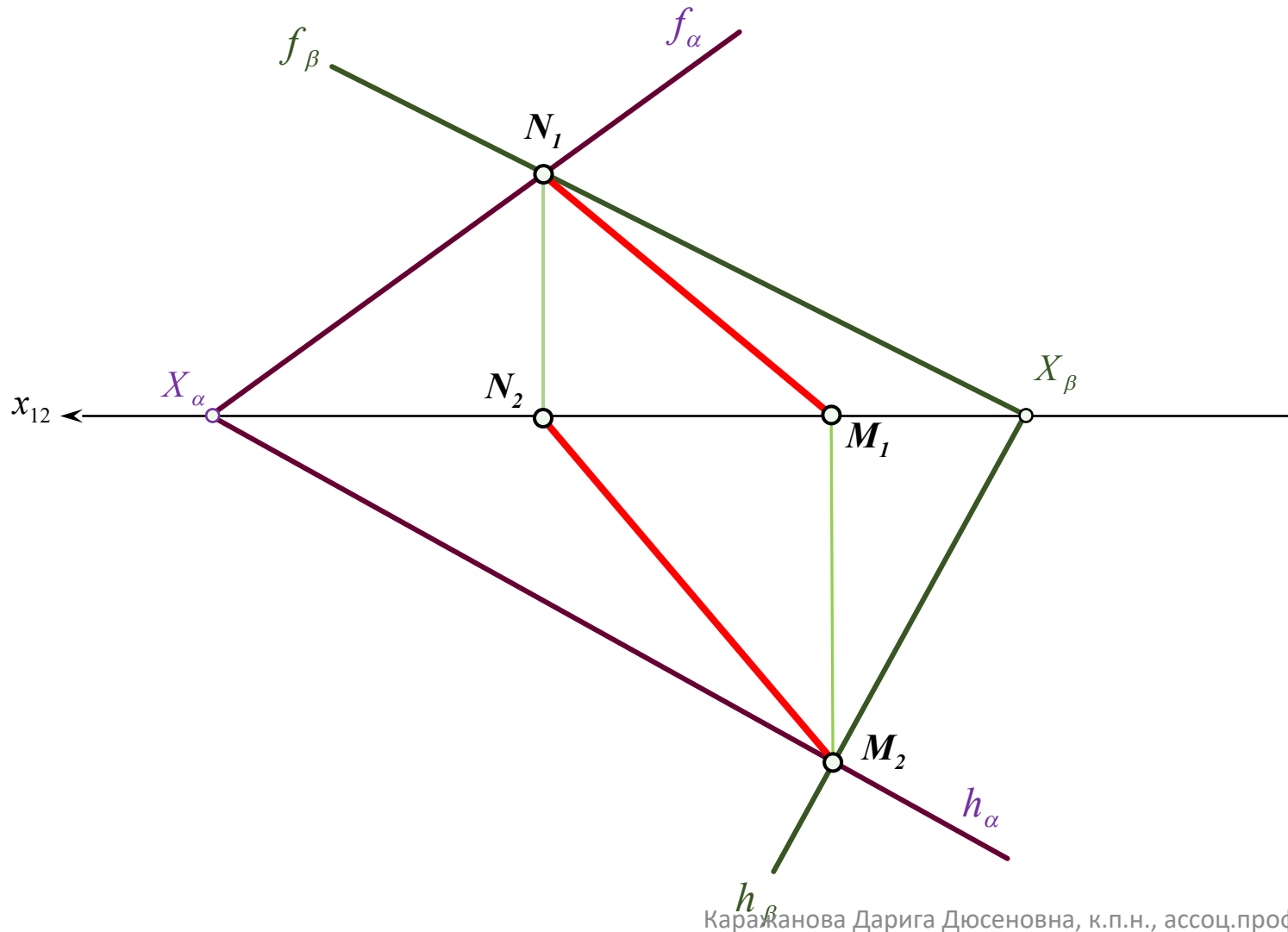
Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами



$$[MN] = \alpha \cap \beta$$

M, N – горизонтальный и фронтальный следы линии пересечения

Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами



$$\alpha(f_\alpha, h_\alpha)$$

$$\beta(f_\beta, h_\beta)$$

$$h_\alpha \cap h_\beta = M$$

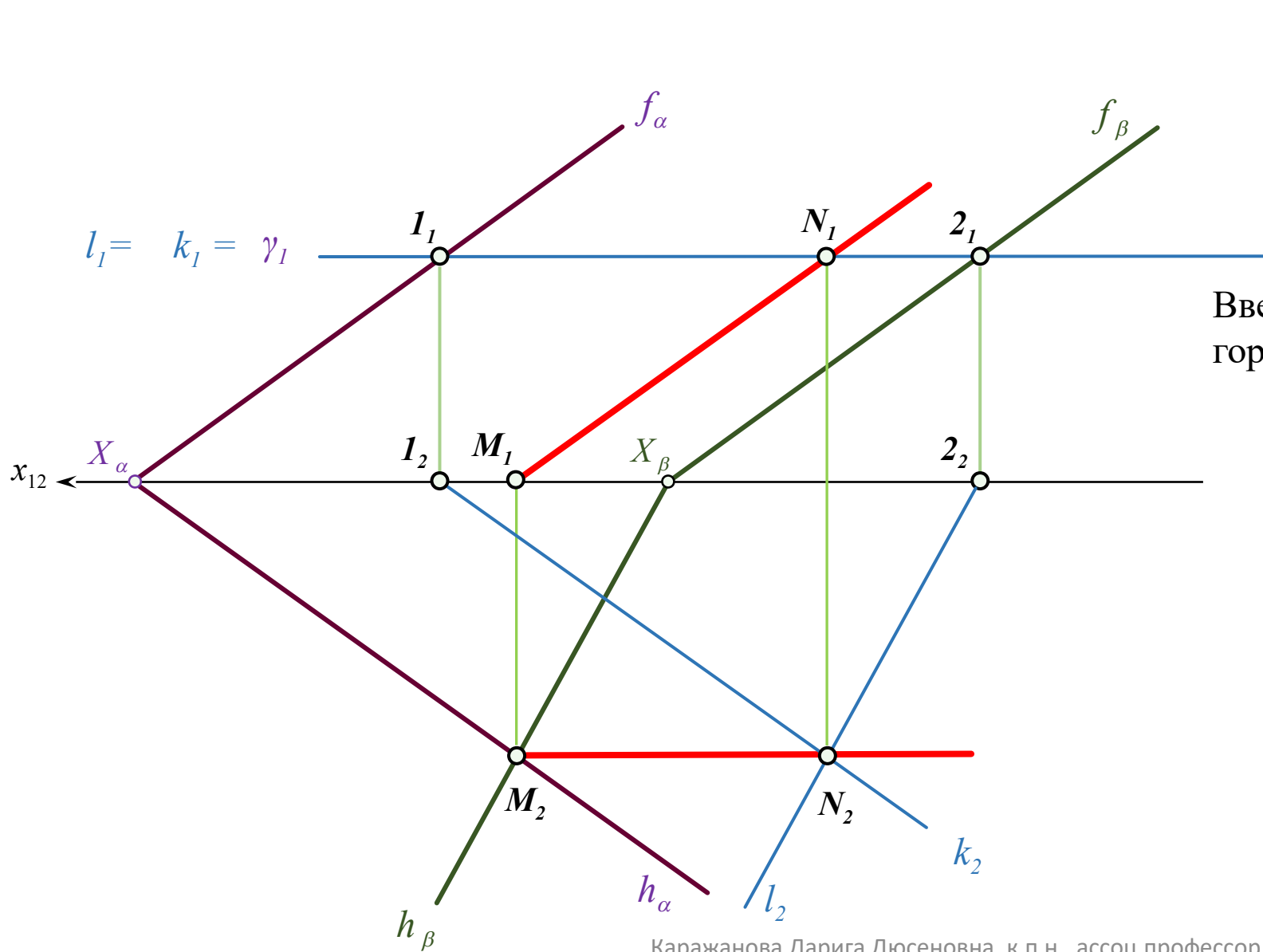
$$f_\alpha \cap f_\beta = N$$

$$\alpha(f_\alpha, h_\alpha) \cap \beta(f_\beta, h_\beta) = (MN)$$

M – Горизонтальный след линии пересечения плоскостей α и β

N – Фронтальный след линии пересечения двух плоскостей α и β

Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами



$\alpha(f_\alpha, h_\alpha)$

причём, $f_\beta \parallel f_\alpha$

$\beta(f_\beta, h_\beta)$

Введем в чертеж вспомогательную горизонтальную секущую плоскость $\gamma(\gamma_1)$

$\alpha \cap \gamma = k$

$\beta \cap \gamma = l$

Построение линии пересечения двух плоскостей, заданных следами

